УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
Л.С. ЛОБАНОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц., УІПА, Харків;
І.В. НЕФЬОДОВА, ст. викл., УІПА, Харків

ПРО АНАЛІТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СТРУКТУРИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ В МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (ПРЯМОКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ) З ВИБОРОМ КООРДИНАТ ВУЗЛІВ ЕЛЕМЕНТІВ.

Запропоновано загальний метод побудови структури наближеного розв'язку крайової задачі в області Ω, згідно з яким проводиться вибір координат вузлів сітки, який зберігає глобальну неперервність наближеного розв'язку в області Ω або неперервність наближеного розв'язку і його частинних похідних до порядку $n-1$ включно. Метод істотно використовує інтерполяцію функцій, інтерлінацію функцій двох змінних на системі взаємно перпендикулярних прямих (лініях ректангуляції) та метод побудови базисних сплайнів 2-го порядку.

Предложен общий метод построения структуры приближенного решения краевой задачи в области Ω, согласно которому проводится выбор координат узлов сетки, который сохраняет глобальную непрерывность приближенного решения в области Ω или непрерывность приближенного решения и его частных производных до $n-1$ порядка включительно. Метод существенно использует интерполяцию функций, интерлинацию функций двух переменных на системе взаимно перпендикулярных прямых (линиях ректангуляции) и метод построения базисных сплайнов 2-го порядка.

The paper offers a general method of constructing the structure of the approximate solution of boundary value problem in the field Ω. According to this method the choice of grid nodes, which keeps the global continuity of the approximate solution in the field Ω, or the continuity of the approximate solution and its partial derivatives up to order $n-1$ inclusive. The method essentially uses interpolation of functions, interlination of functions of two variables in the system of mutually perpendicular lines (lines of rektangulation) and the method of constructing basis splines of order 2.

Вступ. На даний час метод скінченних елементів є одним з найбільш широко використовуваних методів дослідження теплових, електромагнітних та фізико-механічних полів. Як відмічалось на міжнародній конференції «Современные проблемы концентрации напряжений», яка проходила в Донецькому національному університеті в 1998 році під керівництвом академіка О.С. Космодаміанського, сучасні системи дослідження напруженого стану корпусів літаків, автомобілів тощо, вимагають розв'язання багатьох десятків тисяч рівнянь. Це пов'язано з тим, що при формуванні систем методу скінченних елементів (МСЕ) не враховуються відомі з теорії пружності факти про можливу наявність на поверхні напружено-деформованого тіла точок, в яких виникає концентрація напруження. Тобто прогин поверхні в околі вказаних точок може мати особливості. На вказаній вище конференції, зокрема, було зроблено висновок про необхідність розробки методів оптимального вибору вузлів в МСЕ.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1 – 3] запропоновано метод побудови оптимальних схем методу скінчених елементів, у яких знаходяться не тільки вузлові параметри, а також і базисні функції та координати вузлів елементів з умови мінімуму функціоналу енергії, відповідного розв'язуваній крайовій задачі. Однією з нерозв'язаних проблем цього методу на даний час залишається проблема оптимального розбиття області інтегрування на елементи. На практиці при оптимальному виборі вузлів елементів (прямокутні елементи) виникає необхідність розбиття окремо взятого елемента з найбільшим значенням функціонала на чотири додаткових елемента. В результаті отримаємо нерегулярне розбиття області на елементи, яке не вивчалося в цитованих вище працях.

В працях Іво Бабушки і його учнів [4], [5] був розроблений метод згущення сітки МСЕ в околі точок, які є концентраторами напружень. Цей метод добре себе зарекомендував, але проблема ефективного вибору вузлів в околі особливих точок залишається недослідженою у випадку, коли схема МСЕ використовує лише прямокутні елементи. Це твердження пов'язано з тим, що у цитованих вище працях Іво Бабушки та його співробітників пропонується переходити до полярної системи координат з центром в особливій точці.

В даній роботі пропонується загальний метод побудови структури наближеного розв'язку крайової задачі в області Ω на базі використання прямокутних елементів в МСЕ, який зберігає глобальну неперервність розв'язку в області. Метод істотно використовує інтерлінацію функцій двох змінних на *лініях ректангуляції* (системі взаємно перпендикулярних прямих) [8].

Постановка задачі. Припустимо, що область Ω поділена лініями $x = x_k$, $(k=\overline{1,m})$, $y = y_l$, $(l=\overline{1,n})$ на прямокутні елементи

$$\Pi_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}], \ (k=\overline{1,m-1},\ l=\overline{1,n-1})$$

і в кожному з цих елементів наближений розв'язок $\tilde{u}(x,y)$ крайової задачі

$$Lu(x,y) = f(x,y), \ (x,y)\in\Omega, \qquad u(x,y)=0, \ (x,y)\in\partial\Omega,$$

де $Lu(x,y) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p1(x,y)\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(p2(x,y)\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) + q(x,y)u(x,y)$,

$$p1, p2 \in C^1(\Omega), \ q\in C(\Omega), \ f\in L^2(\Omega)$$

подається у вигляді:

$$\tilde{u}(x,y) = u_{k,l}(x,y), \ (x,y)\in\Pi_{k,l}\subset\Omega,$$

$$u_{k,l}(x,y) = C_{k,l}\, h1^0_{k,l}(s)\, h2^0_{k,l}(t) + C_{k+1,l}\, h1^1_{k+1,l}(s)\, h2^0_{k+1,l}(t) +$$
$$+ C_{k,l+1}\, h1^0_{k,l+1}(s)\, h2^1_{k,l+1}(t) + C_{k+1,l+1}\, h1^1_{k+1,l+1}(s)\, h2^1_{k+1,l+1}(t) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} C_{k+\mu,l+\nu}\, h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}\left(s\right) h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}\left(t\right) = w_{k,l}\left(s,t\right), \qquad (1)$$

де $s = \dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$, $t = \dfrac{y - y_l}{y_{l+1} - y_l}$, функції $h1^{\mu}_{k,l}\left(s\right), h2^{\nu}_{k,l}\left(t\right) \in C^2\left[0,1\right]$ і мають властивості

$$h1^0_{k,l}\left(0\right) = h2^0_{k,l}\left(0\right) = 1,\ h1^0_{k,l}\left(1\right) = h2^0_{k,l}\left(1\right) = 0,\ h1^1_{k,l}\left(0\right) = h2^1_{k,l}\left(0\right) = 0,$$

$$h1^0_{k,l}\left(1\right) = h2^0_{k,l}\left(1\right) = 1,\ \forall\left(x_k, y_l\right) \in \bar{\Omega}.$$

Введемо позначення:

$$\tilde{J}_{k,l} = \int_0^1\int_0^1 \left[p1_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial s}\right)^2 \Delta1_k^{-2} + p2_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial t}\right)^2 \Delta2_k^{-2} + \right.$$

$$\left. + q_{k,l}\left(s,t\right) w^2_{k,l}\left(s,t\right) - 2 f_{k,l}\left(s,t\right) w_{k,l}\left(s,t\right) \right] \Delta1_k\, \Delta2_l\, ds dt, \qquad (2)$$

$$\Delta1_k = x_{k+1} - x_k,\ \Delta2_l = y_{l+1} - y_l,\ \ p1_{k,l}\left(s,t\right) = p1\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right),$$

$$p2_{k,l}\left(s,t\right) = p2\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right),\ \ q_{k,l}\left(s,t\right) = q\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right),$$

$$f_{k,l}\left(s,t\right) = f\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right).$$

Значення наближеного розв’язку $u_{k,l}$ у всіх внутрішніх вузлах сітки знаходяться шляхом мінімізації функціоналу

$$J\left(\tilde{u}\right) = \sum_{\Pi_{k,l} \subset \Omega} \tilde{J}_{k,l} \to \min_{C_{k,l}}.$$

Основні положення пропонованого методу оптимізації сітки вузлів. Алгоритм методу, який пропонується, полягає в наступному.

1. Розбиваємо область Ω на елементи $\Pi_{p,q} \subset \Omega$ прямими $x = x_p$, $y = y_q$. У даній роботі вважаємо, що Ω є об’єднанням таких прямокутних елементів.
2. При фіксованому розбитті області інтегрування на елементи $\Pi_{k,l}$, при відомих базисних функціях і вузлових параметрах, обчислюємо всі значення $J_{k,l}$ і знаходимо серед них максимальне.
3. Припустимо, що значення $J_{p,q}$ в елементі $\Pi_{p,q} \subset \Omega$ є максимальним, тобто задовольняє наступним нерівностям

$$J_{p,q} - J_{k,l} > \varepsilon,\quad k \neq p,\ \ l \neq q,\ \ \varepsilon - \text{задане додатне число.}$$

Якщо ця нерівність не виконується, тобто $\max\limits_{(k,l)\neq(p,q)}\left(J_{p,q} - J_{k,l}\right) \le \varepsilon$, $k \neq p$, $l \neq q$, процес розбиття на елементи припиняємо, тобто крок 4 не виконуємо.

4. Вважаємо елемент $\Pi_{p,q}$ базовим і для оптимізації сітки розіб'ємо його прямими

$$x = x_{p+0,5} = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}, \quad y = y_{q+0,5} = \frac{y_q + y_{q+1}}{2}.$$

на чотири елементи

$$\Pi_{p,q}^{(1)} = \left[x_p, x_{p+0,5}\right] \times \left[y_q, y_{q+0,5}\right]; \quad \Pi_{p,q}^{(2)} = \left[x_p, x_{p+0,5}\right] \times \left[y_{q+0,5}, y_{q+1}\right];$$

$$\Pi_{p,q}^{(3)} = \left[x_{p+0,5}, x_{p+1}\right] \times \left[y_{q+0,5}, y_{q+1}\right]; \qquad \Pi_{p,q}^{(4)} = \left[x_{p+0,5}, x_{p+1}\right] \times \left[y_q, y_{q+0,5}\right].$$

В результаті отримуємо нове розбиття області інтегрування на прямокутні елементи. Наближений розв'язок, який відповідає отриманому розбиттю, має новий вигляд в елементах $\Pi_{p,q}^{(1)}$, $\Pi_{p,q}^{(2)}$, $\Pi_{p,q}^{(3)}$, $\Pi_{p,q}^{(4)}$, а також у наступних чотирьох елементах: $\Pi_{p,q-1}$, $\Pi_{p-1,q}$, $\Pi_{p,q+1}$, $\Pi_{p+1,q}$, якщо ці елементи належать області інтегрування. У всіх інших елементах розбиття форма наближеного розв'язку не змінюється.

В елементі $\Pi_{p,q}^{(1)}$, наближений розв'язок запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{p,q}^{(1)}(x,y) = C_{p,q}\, h3_{p,q}^{0}(s1)\, h4_{p,q}^{0}(t1) + C_{p+0.5,q}\, h3_{p+0.5,q}^{1}(s1)\, h4_{p+0.5,q}^{0}(t1) + \\ + C_{p,q+0.5}\, h3_{p,q+0.5}^{0}(s1)\, h4_{p,q+0.5}^{1}(t1) + \\ + C_{p+0.5,q+0.5}\, h3_{p+0.5,q+0.5}^{1}(s1)\, h4_{p+0.5,q+0.5}^{1}(t1),\end{aligned} \tag{3}$$

де $s1 = \dfrac{x - x_p}{x_{p+0.5} - x_p}$, $s2 = \dfrac{x - x_{p+0.5}}{x_{p+1} - x_{p+0.5}}$, $t1 = \dfrac{y - y_q}{y_{q+0.5} - y_q}$, $t2 = \dfrac{y - y_{q+0.5}}{y_{q+1} - y_{q+0.5}}$, функції $h3_{p,q}^{\mu}(s1)$, $h4_{p,q}^{\nu}(t1)$, $h3_{p,q}^{\mu}(s2)$, $h4_{p,q}^{\nu}(t2) \in C^2[0,1]$ і мають властивості:

$$h3_{p,q}^{0}(0) = h4_{p,q}^{0}(0) = 1,\ h3_{p,q}^{0}(1) = h4_{p,q}^{0}(1) = 0,\ h3_{p,q}^{1}(0) = h4_{p,q}^{1}(0) = 0,$$

$$h3_{p,q}^{1}(1) = h4_{p,q}^{1}(1) = 1,\ \forall\left(x_p, y_q\right) \in \bar{\Omega}.$$

Аналогічні формули визначають наближений розв'язок в елементах $\Pi_{p,q}^{(2)}$, $\Pi_{p,q}^{(3)}$, $\Pi_{p,q}^{(4)}$.

Для написання структури наближеного розв'язку в елементах $\Pi_{p,q-1}$, $\Pi_{p-1,q}$, $\Pi_{p,q+1}$, $\Pi_{p+1,q}$ будемо використовувати інтерлінацію функцій на чотирьох сторонах вказаних прямокутників [6].

В елементі $\Pi_{p-1,q}$ структура наближеного розв'язку має вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{p-1,q}(x,y) = U\left(x_{p-1}, y\right) h1_{p-1,q}^{0}(s) + U\left(x_p, y\right) h1_{p,q}^{1}(s) + U\left(x, y_q\right) h2_{p-1,q}^{0}(t) + \\ + U\left(x, y_{q+1}\right) h2_{p-1,q+1}^{1}(t) - C_{p-1,q} h1_{p-1,q}^{0}(s)\, h2_{p-1,q}^{0}(t) -\end{aligned}$$

$$-C_{p-1,q+1}h1^0_{p-1,q+1}(s)\,h2^1_{p-1,q+1}(t)-C_{p,q}h1^1_{p,q}(s)\,h2^0_{p,q}(t)-$$
$$-C_{p,q+1}h1^1_{p,q+1}(s)\,h2^1_{p,q+1}(t), \tag{4}$$

де $x_{p-1}\le x\le x_p$, $y_q\le y\le y_{q+1}$, $s=\dfrac{x-x_{p-1}}{x_p-x_{p-1}}$, $t=\dfrac{y-y_q}{y_{q+1}-y_q}$,

$$U\left(x_{p-1},y\right)=C_{p-1,q}h2^0_{p-1,q}(t)+C_{p-1,q+1}h2^1_{p-1,q+1}(t),$$
$$U\left(x,y_q\right)=C_{p-1,q}h1^0_{p-1,q}(s)+C_{p,q}h1^1_{p,q}(s),$$
$$U\left(x,y_{q+1}\right)=C_{p-1,q+1}h1^0_{p-1,q+1}(s)+C_{p,q+1}h1^1_{p,q+1}(s),$$
$$U\left(x_p,y\right)=\begin{cases}C_{p,q}h4^0_{p,q}(t1)+C_{p,q+0.5}h4^1_{p,q+0.5}(t1),\ y_q\le y\le y_{q+0.5};\\ C_{p,q+0.5}h4^0_{p,q+0.5}(t2)+C_{p,q+1}h4^1_{p,q+1}(t2),\ y_{q+0.5}\le y\le y_{q+1};\end{cases}$$
$$t1=\frac{y-y_q}{y_{q+0,5}-y_q},\quad t2=\frac{y-y_{q+0,5}}{y_{q+1}-y_{q+0,5}},$$

Аналогічні структури наближених розв'язків будуть також у елементів $\prod_{p,q-1}$, $\prod_{p,q+1}$, $\prod_{p+1,q}$ нового розбиття.

5. Знаходимо серед всіх елементів нового розбиття Θ такий елемент $\prod_{p',q'}$ в якому виконуються умови
$J_{p',q'}-J_{k,l}>\varepsilon,\ \ \forall(k,l)\in\Theta$, $k\ne p',\ \ l\ne q'$, ε – задане додатне число, та переходимо до пункту 2.

Зауважимо, що послідовність максимальних значень $J_{p,q}$ буде не зростаючою і крім того такий елемент $\prod_{k,l}$ може бути не єдиний.

Теорема 1. *Якщо у вказаних восьми елементах розбиття структуру наближеного розв'язку $\tilde{u}(x,y)$ записати згідно з викладеним алгоритмом, а у всіх інших елементах розбиття її залишити незмінною, то незалежно від вибору невідомих параметрів* $C_{i,j}$, $(i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{1,n-1})$, $C_{p,q+0.5}$, $C_{p+0.5,q+0.5}$, $C_{p+0.5,q}$, $C_{p+0.5,q+1}$, $C_{p+1,q+0.5}$ *та невідомих базисних функцій* $h1^{\mu}_{p,q}$, $h2^{\nu}_{p,q}$, $h3^{\mu}_{p,q}$, $h4^{\nu}_{p,q}\in C^1[0,1]$ *з відповідними індексами* $0\le\mu,\nu\le 1$, *наближений розв'язок буде зберігати неперервність, тобто* $\tilde{u}(x,y)\in C(\Omega)$ *і* $\tilde{u}(x,y)\in W_2^1(\Omega)$.

Доведення. Враховуючи структуру наближеного розв'язку в кожному елементі розбиття, а також те, що всі базисні функції є неперервно диференційовними, можна стверджувати, що у кожному елементі розбиття наближений розв'язок буде функцією двох змінних, яка є неперервною і має неперервні частинні похідні першого порядку. Крім того, на сторонах, спільних для двох сусідніх прямокутників розбиття наближений розв'язок зберігає неперервність при довільному виборі вузлових параметрів. Тому $\tilde{u}(x,y)\in C(\Omega)$.

Твердження про те, що $\tilde{u}(x,y)\in W_2^1(\Omega)$, випливає з того, що $J(\tilde{u})=\sum\limits_{\Pi_{k,l}\subset\Omega}\tilde{J}_{k,l}$ і $\tilde{J}_{k,l}<\infty\forall\Pi_{k,l}\subset D$.

Теорема доведена.

Результати чисельного експерименту. Застосуємо запропонований метод до розв'язання наступної крайової задачі:

$$\Delta u=-2\,,\ (x,y)\in G\,, \tag{5}$$

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\partial G\,, \tag{6}$$

для області G, що має форму рівнобокого кута, тобто

$$G=\{([0,a]\times[0,b])\cup([a,b]\times[0,a])\},\ a=0.5,\ b=1\,.$$

Розіб'ємо область G на прямокутні елементи прямими

$$x=x_k=k\cdot\Delta\,,\ k=\overline{0,m}\,,\ y=y_l=l\cdot\Delta,\ l=\overline{0,n}\,.$$

В кожному з елементів $\Pi_{k,l}=[x_k,x_{k+1}]\times[y_l,y_{l+1}]$ наближений розв'язок представляється у вигляді:

$$\tilde{u}(x,y)=u_{k,l}(x,y)=\sum_{i=k}^{k+1}\sum_{j=l}^{l+1}C_{i,j}\,h_i(x)h_j(y)\,,$$

де $$h_k(x)=\begin{cases}0,\ x\le x_{k-1}\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}},\ x_{k-1}<x\le x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\ x_k<x<x_{k+1}\\ 0,\ x\ge x_{k+1}\end{cases},\qquad h_l(y)=\begin{cases}0,\ y\le y_{l-1}\\ \dfrac{y-y_{l-1}}{y_l-y_{l-1}},\ y_{l-1}<y\le y_l\\ \dfrac{y-y_{l+1}}{y_l-y_{l+1}},\ y_l<y<y_{l+1}\\ 0,\ y\ge y_{l+1}\end{cases}$$

Невідомі сталі $C_{k,l}$ знаходимо з умови

$$J(\tilde{u})=\sum_{\Pi_{k,l}\subset G}\tilde{J}_{k,l}\to\min_{C_{k,l}}\,,$$

де $\tilde{J}_{k,l} = \iint\limits_{\Pi_{k,l}} \left(\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial y} \right)^2 - 4u_{k,l} \right) dxdy$.

Шляхом мінімізації цього функціоналу знайдені невідомі $C_{k,l}$ (табл. 1) при $m = 4;\ n = 4$.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів $C_{k,l}$

4	0	0	0		
3	0	0,055719	0		
2	0	0,070755	0	0	0
1	0	0,064564	0,070755	0,055719	0
0	0	0	0	0	0
l \ k	0	1	2	3	4

При цьому отримані значення $\tilde{J}_{k,l}$, які представлені в таблиці 2.

Таблиця 2

Значення функціоналів $\tilde{J}_{k,l}$

3	-0,001413	-0,001413		
2	-0,003812	-0,003812		
1	-0,003864	-0,009809	-0,003812	-0,001413
0	-0,001256	-0,003864	-0,003812	-0,001413
l \ k	0	1	2	3

Порівнюючи значення $\tilde{J}_{k,l}$ бачимо, що найбільше по модулю з них буде $\tilde{J}_{1,1} = -0,009809$.

Згідно з описаним вище алгоритмом, розбиваємо елемент $\Pi_{1,1} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ на чотири елементи:

$$\Pi_{1,1}^{(1)} = [x_1, x_{1+0.5}] \times [y_1, y_{1+0.5}], \qquad \Pi_{1,1}^{(2)} = [x_1, x_{1+0.5}] \times [y_{1+0.5}, y_2],$$

$$\Pi_{1,1}^{(3)} = [x_{1+0.5}, x_2] \times [y_{1+0.5}, y_2], \qquad \Pi_{1,1}^{(4)} = [x_{1+0.5}, x_2] \times [y_1, y_{1+0.5}].$$

Далі знаходимо мінімум функціоналу

$$J\left(\tilde{u}^{(1)}\right) = \sum_{\substack{\Pi_{k,l} \subset G \\ \Pi_{k,l} \neq \Pi_{1,1}}} \tilde{J}_{k,l} + \tilde{J}_{1,1}^{(1)} + \tilde{J}_{1,1}^{(2)} + \tilde{J}_{1,1}^{(3)} + \tilde{J}_{1,1}^{(4)} \to \min_{C_{k,l}},$$

враховуючи, що в кожному з елементів розбиття наближений розв'язок залишається в такій же формі як і був, за виключенням восьми елементів $\Pi_{1,1}^{(1)}$, $\Pi_{1,1}^{(2)}$, $\Pi_{1,1}^{(3)}$, $\Pi_{1,1}^{(4)}$ та $\Pi_{0,1}$, $\Pi_{1,0}$, $\Pi_{1,2}$, $\Pi_{2,1}$,в яких наближений розв'язок будується з використанням формул (3)-(4). Значення наближеного розв'язку у вузлах нової сітки наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення функції $U(x, y)$ у вузлах

5	0	0	0	0		
4	0	0,057835		0		
3	0	0,068314	0,059991	0	0	0
2	0	0,071984	0,070198	0,059998		0
1	0	0,067119	0,071984	0,068228	0,057830	0
0	0	0	0	0	0	0
l / k	0	1	2	3	4	5

Для порівняння наведемо результати розв'язання задачі (5)-(6) класичним методом скінченних елементів теж з використанням прямокутних елементів та лінійних базисних функцій.

Зазначимо, що при п'яти внутрішніх вузлах (10 елементів) запропонований метод і класичний МСЕ дали майже однакові значення наближеного розв'язку у вузлах сітки.

В табл. 4 наведені значення наближеного розв'язку, отримані класичним методом скінченних елементів з використанням прямокутних елементів з довжиною сторони, рівною 0,125 (48 елементів, 33 внутрішніх вузлів).

Таблиця 4

Класичний розв'язок з використанням квадратної сітки

8	0	0	0	0	0				
7	0	0,0275	0,0350	0,0275	0				
6	0	0,0394	0,0520	0,0396	0				
5	0	0,0454	0,0615	0,0467	0				
4	0	0,0485	0,0679	0,0586	0	0	0	0	0
3	0	0,0488	0,0709	0,0692	0,0586	0,0467	0,0396	0,0275	0
2	0	0,0442	0,0652	0,0709	0,0679	0,0615	0,0520	0,0350	0
1	0	0,0309	0,0442	0,0488	0,0485	0,0454	0,0394	0,0275	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L / *k*	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Перспективи подальших досліджень. В подальшому автори планують удосконалення запропонованого алгоритму з метою застосування його до знаходження розв'язків крайових задач із заданим класом диференційованості. Планується провести також вибір вузлів з використанням оптимальних базисних функцій, отриманих в роботах О.М. Литвина [8].

Висновки. Розроблено та досліджено використання сплайн-інтерлінації функцій двох змінних для побудови адаптивної сітки вузлів МСЕ (прямокутні елементи), що згущується в околі точок, в яких точний розв'язок має особливості, при використанні лише прямокутних елементів.

Список літератури: 1. *Литвин О.Н.* Оптимальные схемы МКЭ // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – К.: Наук. думка. – 1978. С. 160-165. **2.** *Литвин О.М.* Узагальнена нелінійна інтерполяція і розв'язок граничних задач // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1980. №6. С. 23-29. **3.** *Литвин О.Н.* Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т.20, №4. – С. 677-688. **4.** *Babuska I.* Finite Element Method for domain with corners // Computing. – 1970. – Vol. 6, N. 3. – P.264-273. **5.** *Zienkiewicz O.C., Gago J.P.R., Kelly D.W.* The hierarchic concept in finite element analysis // Comp. Struct. – 1983. – Vol. 16. – P.53-65. **6.** *Литвин О.Н., Носов К.В.* Чисельная реализация оптимального метода конечных елементов для бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Соврем. проблемы конц. напр.: Тр. междунар. науч. конф. – Донецк: ДонГУ, «Кассиопея», 1998. – С. 151-157. **7.** *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – Т. 16 – С. 209-292. **8.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Надійшла до редколегії 08.12.2011