УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
О.П. НЕЧУЙВІТЕР, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УІПА, Харків

2D - КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є НА КЛАСІ ЛІПШИЦЯ ТА ОПЕРАТОРИ КУСКОВО-СТАЛОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ

Побудовані кубатурні формули наближеного обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації на класі Ліпшиця. Інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана слідами функції на взаємно-перпендикулярних лініях, значеннями функції в точках. Отримані оцінки похибки наближення.

Построены кубатурные формулы приближенного вычисления 2 D - коэффициентов Фурье, которые используют в своем построении операторы кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации функций на классе Липшица. Информация о неосциллирующем множителе подынтегральной функции задана следами функции на взаимно-перпендикулярных линиях, значениями функции в точках. Получены оценки погрешности приближения.

Formulas of the evaluating of 2 D - Fourier's coefficients with using spline-interlineation were submitted. Cubature formulas are investigated in the case when information about function is set of lines set of knots on the class of Lipschitz. The estimations of error of approaching of the cubature formulas are presented.

Вступ. Сучасні задачі цифрової обробки сигналів вимагають вміння наближено обчислювати інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Зокрема, задачу наближеного обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій [1] відповідно на різних класах функцій. Важливим кроком в розв'язанні такої задачі є обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є за допомогою операторів куско-сталої сплайн-інтерлінації (тобто інформація про функцію $f(x,y)$ задається її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, значеннями функції в точках) на класі Ліпшиця.

Аналіз останніх досліджень. В [2]-[4] розглядалась задача наближеного обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію $f(x,y)$ задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, але вона розв'язувалась на класі диференційованих функцій. В [5] розглядалась побудова кубатурних формул обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є на класі Ліпшиця за допомогою оператора інтерполянта, побудованого з використанням кусково-сталої інтерлінації у випадку, коли інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задається значеннями функції в точках. Однак актуальним є питання отримання більш точних оцінок на класі Ліпшиця.

Постановка задачі. Обчислити наближено 2D - коефіцієнти Фур'є за допомогою кубатурних формул з використанням інтерлінації функцій на класі дійсних функцій двох змінних, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що задовольняють наступним умовам Ліпшиця:

$$\left|f(x_1,y)-f(x_2,y)\right|\le L|x_1-x_2|,\quad \left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L|y_1-y_2|,$$

$$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)-f(x_1,y_2)+f(x_2,y_2)\right|\le \tilde{L}|x_1-x_2||y_1-y_2|,$$

у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих $x_k=k\Delta-\Delta/2$, $y_j=j\Delta-\Delta/2$, $k,j=\overline{1,\ell}$, $\Delta=1/\ell$. Отримати оцінку похибки побудованих кубатурних формул.

Обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації.

Означення. Під *слідом функції* $f(x,y)$ *на лінії* розуміємо функцію однієї змінної

$$f(x_k,y),\ 0\le y\le 1,\ f(x,y_j),\ 0\le x\le 1,$$

$$x_k=k\Delta-\Delta/2,\quad y_j=j\Delta-\Delta/2,\ k,j=\overline{1,\ell},\ \Delta=1/\ell.$$

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k,\\ 0, x\notin X_k,\end{cases}\quad k=\overline{1,\ell};\qquad H_{0j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\ 0, y\notin Y_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,\ell},$$

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\ Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],$$

$$x_k=k\Delta-\Delta/2,\quad y_j=j\Delta-\Delta/2,\ k,j=\overline{1,\ell},\ \Delta=1/\ell.$$

Нехай $Jf(x,y)$ – оператор-інтерлінант

$$Jf(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell}f(x_k,y)h_{0k}(x)+\sum_{j=1}^{\ell}f(x,y_j)H_{0j}(y)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f(x_k,y_j)h_{0k}(x)H_{0j}(y),$$

для якого виконуються властивості [1]:

1. $Jf(x_k,y)=f(x_k,y),\quad k=\overline{1,\ell},\quad Jf(x,y_j)=f(x,y_j),\quad j=\overline{1,\ell},$

2. $\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)=O\left(\Delta^2\right),\quad \forall(x,y)\in G.$

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m,n)$, $k=1,2,3$,

$$I_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin 2\pi mx\sin 2\pi nydxdy,$$

$$I_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\cos 2\pi mx\cos 2\pi nydxdy,$$

$$I_3^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}dxdy$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)\sin 2\pi mx\sin 2\pi nydxdy,$$

$$\Phi_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)\cos 2\pi mx\cos 2\pi nydxdy,$$

$$\Phi_3^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}dxdy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерлінанта $Jf(x,y)$ та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул:

$$\Phi_1^2(m,n)=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi mxdx\int_0^1 f(x_k,y)\sin 2\pi nydy+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\int_0^1 f(x,y_j)\sin 2\pi mxdx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi nydy-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}f(x_k,y_j)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi mxdx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi nydy,$$

$$\Phi_2^2(m,n)=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\cos 2\pi mxdx\int_0^1 f(x_k,y)\cos 2\pi nydy+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\int_0^1 f(x,y_j)\cos 2\pi mx dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\cos 2\pi ny dy-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\cos 2\pi mx dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\cos 2\pi ny dy,$$

$$\Phi_3^2(m,n)=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi mx}dx\int_0^1 f(x_k,y)e^{-i2\pi ny}dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\int_0^1 f(x,y_j)e^{-i2\pi mx}dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi ny}dy-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi mx}dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi ny}dy\ .$$

Теорема 1. *Нехай* $f(x,y)\in C_{2,L,L}^2$ *та функція задана* $N=2\ell$ *слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих*

$$f\left(x_k,y\right),\ k=\overline{1,\ell}\ ,\ f\left(x,y_j\right),\ j=\overline{1,\ell}\ ,$$

в області $G=\left[0,1\right]^2$. *Тоді кубатурна формула* $\Phi_1^2\left(m,n\right)$ *для обчислення інтегралу* $I_1^2\left(m,n\right)$ *має наступну оцінку похибки при* $\ell>2\pi\max\left\{m,n\right\}$ *:*

$$\left|I_1^2\left(m,n\right)-\Phi_1^2(m,n)\right|\le\frac{\tilde{L}}{16\ell^2}=\frac{\tilde{L}}{4N^2}\ .$$

Доведення. Введемо оператори:

$$J_1 f(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell} f\left(x_k,y\right)h_{0k}(x),\ k=\overline{1,\ell},\ \ J_2 f(x,y)=\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x,y_j\right)H_{0j}\left(y\right),\ j=\overline{1,\ell},$$

тоді для оператора-інтерлінанта $Jf\left(x,y\right)$ справедлива тотожність

$$Jf=\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f\ .$$

Для кожної функції $f\left(x,y\right)$ виконується оцінка

$$\left|\int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y)-Jf(x,y)\right)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dxdy\right| \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y)-Jf(x,y)\right| dxdy =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y)-\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f\left(x,y\right)\right| dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left|f\left(x,y\right)-f\left(x_k,y\right)-f\left(x,y_j\right)+f\left(x_k,y_j\right)\right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{L}\left|x-x_k\right|\left|y-y_j\right| dxdy =$$

$$= \tilde{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\left|x-x_k\right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|y-y_j\right| dy =$$

$$= \frac{\tilde{L}}{4}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\left(-\left(x_k-x\right)^2\Bigg|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k}+\left(x-x_k\right)^2\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\right)\left(-\left(y_j-y\right)^2\Bigg|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j}+\left(y-y_j\right)^2\Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{\tilde{L}}{4}\frac{\Delta^2}{2}\frac{\Delta^2}{2}\ell^2 = \tilde{L}\frac{\Delta^2}{16}\cdot\frac{1}{\Delta^2}\Delta^2 = \tilde{L}\frac{\Delta^2}{16} = \frac{\tilde{L}}{16\ell^2} = \frac{\tilde{L}}{4N^2}\ .$$

Теорема 1 доведена.

Обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерполяції на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації. Введемо позначення:

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = \left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}} = \left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right],$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x\in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, x\notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1,\ell^2}, \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y\in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y\notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1,\ell^2},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{k},\tilde{j} = \overline{1,\ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Нехай $\tilde{J}f(x,y)$ – оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерлінанта $Jf\left(x,y\right)$:

$$\tilde{J}f\left(x,y\right)=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right)h_{0k}\left(x\right)\tilde{H}_{0\tilde{j}}\left(y\right)+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j\right)\tilde{h}_{0\tilde{k}}\left(x\right)H_{0j}\left(y\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x_k,y_j\right)h_{0k}\left(x\right)H_{0j}\left(y\right),$$

для якого виконуються властивості [1]:

$$1.\ \tilde{J}f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j\right)=f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j\right),\quad \tilde{k}=\overline{1,\ell^2},\quad j=\overline{1,\ell}\,,$$

$$\tilde{J}f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right)=f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right),\quad j=\overline{1,\ell^2},\quad k=\overline{1,\ell}\,;$$

$$2.\ \left|f(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)=O\left(\Delta^2\right),\ \forall\left(x,y\right)\in G.$$

Для обчислення інтегралів $I_k^2\left(m,n\right),\ k=1,2,3$ пропонуються формули:

$$\widetilde{\Phi}_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny dxdy,$$

$$\widetilde{\Phi}_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny dxdy,$$

$$\widetilde{\Phi}_3^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}dxdy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерполянта $\tilde{J}f(x,y)$ та отримаємо відповідні кубатурні формули, наприклад:

$$\widetilde{\Phi}_1^2(m,n)=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}})\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi mxdx\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi nydy+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j)\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi mxdx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi nydy-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi mxdx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\sin 2\pi nydy\,.$$

Теорема 2. *Хай* $f(x,y)\in C^2_{2,L,L}$ *та значення* $f_{kj}=f\left(x_k,y_j\right)$, $k=\overline{1,m_1}$, $j=\overline{1,m_2}$, *задані не більше, ніж в* $N=m_1m_2$, $m_1=m_2=\ell^2$, $N=\ell^4$ *фіксованих вузлових точках* $\left(x_k,y_j\right)\in G$. *Тоді кубатурна формула* $\widetilde{\Phi}_1^2\left(m,n\right)$ *для обчислення інтегралу* $I_1^2\left(m,n\right)$ *має наступну оцінку похибки при* $\ell>2\pi\max\{m,n\}$ *: причому*

$$\left|I_1^2\left(m,n\right)-\tilde{\Phi}_1^2(m,n)\right|\le\frac{\tilde{L}+8L}{16}\frac{1}{\ell^2}=\frac{\tilde{L}+8L}{16}\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Доведення. Розглянемо оператори

$$J_1f(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell}f\left(x_k,y\right)h_{0k}(x),\qquad J_2f(x,y)=\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x,y_j\right)H_{0j}\left(y\right),$$

$$\tilde{J}_1f(x,y)=\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y\right)\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x),\qquad \tilde{J}_2f(x,y)=\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}f\left(x,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right)\tilde{H}_{0\tilde{j}}\left(y\right)\ ,$$

тоді для оператора-інтерполянта $\tilde{J}f\left(x,y\right)$, побудованого на основі $Jf\left(x,y\right)$, справедлива тотожність $\tilde{J}f=\left(J_1\tilde{J}_2+\tilde{J}_1J_2-J_1J_2\right)f$.

Знайдемо оцінку величини $\left|I_1^2\left(m,n\right)-\tilde{\Phi}_1^2(m,n)\right|$:

$$\left|I_1^2\left(m,n\right)-\tilde{\Phi}_1^2(m,n)\right|\le\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right)\sin2\pi mx\sin2\pi nydxdy\right|\le$$

$$\le\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)+Jf(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right)\sin2\pi mx\sin2\pi nydxdy\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|dxdy+\int_0^1\int_0^1\left|Jf(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right|dxdy\ .$$

За теоремою 1 маємо: $\left|I_1^2\left(m,n\right)-\Phi_1^2(m,n)\right|\le\dfrac{\tilde{L}}{16\ell^2}=\dfrac{\tilde{L}}{4N^2}$. Отже,

$$\int_0^1\int_0^1\left|Jf(x,y)-\tilde{J}f(x,y)\right|dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left|\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f-\left(J_1\tilde{J}_2+J_2\tilde{J}_1-J_1J_2\right)f\right|dxdy\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2\right)f+\left(J_2-J_2\tilde{J}_1\right)f\right|dxdy\le$$

$$\le \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_1 - J_1 \tilde{J}_2 \right) f \right| dxdy + \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_2 - J_2 \tilde{J}_1 \right) f \right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k, y\ ) - f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \right| dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \left| f(x, y_j) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \le$$

$$\le L \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left| y - \tilde{y}_{\tilde{j}} \right| dy + L \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \left| x - \tilde{x}_{\tilde{k}} \right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \le$$

$$\le L\ell\Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 + L\ell\Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 = L\ell \frac{1}{\ell} \frac{\Delta_1}{2} = L \frac{1}{2} \Delta^2 = L \frac{\Delta^2}{2} = \frac{L}{2\ell^2}.$$

Таким чином,

$$\left| I_1^2 \left(m,n \right) - \tilde{\Phi}_1^2 (m,n) \right| \le \left| I_1^2 \left(m,n \right) - \Phi_1^2 (m,n) \right| + \left| \Phi_1^2 (m,n) - \tilde{\Phi}_1^2 (m,n) \right| \le$$

$$\le \frac{\tilde{L} + 8L}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{L} + 8L}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Теорема 2 доведена.

Чисельний експеримент. Нехай задана функція

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(2x - 2y\right) + \cos\left(2x + 2y\right) \right).$$

Покажемо, що

$$\varepsilon = \left| I_1^2 \left(m,n \right) - \tilde{\Phi}_1^2 (m,n) \right| \le$$

$$\le \left| I_1^2 \left(m,n \right) - \Phi_1^2 (m,n) \right| + \left| \Phi_1^2 (m,n) - \tilde{\Phi}_1^2 (m,n) \right| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 .$$

Точні значення інтегралів:

$$I_1^2(1,2) = 0.028997787909237,$$

$$I_1^2(2,3) = 0.008785471951418,$$

$$I_1^2(3,4) = 0.004308752165426,$$

$$I_1^2(3,4) = 0.002566548604326.$$

Таблиця 1.

Обчислення $I_1^2(m,n)$ за кубатурною формулою $\tilde{\Phi}_1^2(m,n)$

m	n	ℓ	$\tilde{\Phi}_1^2(m,n)$	ε
1	2	10	0.02899675888006	0.000001029029177
		20	0.028997722732186	0.000000065177052
2	3	10	0.00878516815062	0.000000303800798
		20	0.008785452326578	0.00000001962484
		30	0.008785468052442	0.000000003898977
3	4	10	0.004308608143948	0.000000144021479
		20	0.004308742628912	0.000000009536515
		30	0.004308750260989	0.000000001904438
4	5	10	0.002566464399399	0.000000084204928
		20	0.002566542991854	0.000000005612472
		30	0.002566547476052	0.000000001128274
		40	0.002566548245131	0.000000000359196

Таблиця 2.

Похибка обчислення $I_1^2(m,n)$ за формулами $\Phi_1^2(m,n)$ та $\tilde{\Phi}_1^2(m,n)$

m	n	ℓ	ε_1	ε_2	$\varepsilon_1+\varepsilon_2$
1	2	10	0.000000064804145	0.000000964225032	0.000001029029177
		20	0.000000004793151	0.000000060383901	0.000000065177052
2	3	10	0.000000012040883	0.000000291759915	0.000000303800798
		20	0.000000001331797	0.000000018293043	0.00000001962484
		30	0.00000000028432	0.000000003614657	0.000000003898977
3	4	10	0.000000001192014	0.000000142829465	0.000000144021479
		20	0.000000000565952	0.000000008970562	0.000000009536515
		30	0.000000000131706	0.000000001772732	0.000000001904438
4	5	10	0.000000000683359	0.000000084888287	0.000000084204928
		20	0.000000000269926	0.000000005342546	0.000000005612472
		30	0.000000000072364	0.00000000105591	0.000000001128274
		40	0.000000000025053	0.000000000334143	0.000000000359196

Аналіз таблиці 1 та 2 показує справедливість теоретичних тверджень.

Перспективи подальших досліджень. Результати даних досліджень будуть використані при побудові кубатурних формул наближеного обчислення 3D - коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на класі Ліпшиця.

Висновки. В статті досліджуються кубатурні формули обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на класі Ліпшиця. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Отримана оцінка похибки кубатурних формул. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

Список літератури: **1.** Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с. **2.** Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації. Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18-21 трав., 2010р., Харків, Ч.1. – 2010. – С. 211–213. **3.** Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доповіді НАН України. - 2010. № 3, - С. 24-29. **4.** Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». - 2010. № 926, - С.153-160. **5.** Литвин О. М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 136 с.

Надійшла до редколегії 15.12.2011

УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УІПА, Харків

ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ, АПРОКСИМАЦІЙНИХ ТА ІНТЕРЛІНАЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРАПЕЦЕВИДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Побудовані розривні апроксимаційні, інтерполяційні та інтерлінаційні сплайни для наближення розривної функції двох змінних з областю визначення, яку можна розбити на прямокутні трапеції. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни. Запропоновані методи наближення можна використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Построены разрывные аппроксимационные, интерполяционные и интерлинационные сплайны для приближения разрывной функции двух переменных с областью определения, которую можно разбить на прямоугольные трапеции. Построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны. Предложенные методы приближения можно использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Are constructed discontinuous approximation, interpolation and interlination splints for approach of discontinuous function of two variables with definition range which can be divided into rectangular trapezes. Constructed discontinuous splints include, as a special case, classical continuous splints. Offered methods approximations can be used for mathematical modeling of discontinuous processes in medical, geological, space and other researches

Вступ. Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту.