УДК 519.21

З.Ф. НАЗИРОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків;
Н.В. ЧЕРЕМСЬКА, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХПІ»

ДИЛАТАЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. У статті розглядалися лінійні перетворення над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Рассмотрены линейные преобразования некоторых классов случайных полей. Получены необходимые и достаточные условия в терминах корреляционных функций для того чтобы преобразованное поле принадлежало тому или иному классу. В статье рассматривались линейные преобразования двухпараметрические последовательности в гильбертовом пространстве, которые строятся по заданному дискретному случайному полю.

The article deals with linear transformations of certain classes of random fields. Necessary and sufficient conditions in terms of correlation function to convert the field belonged to a particular class. The article deals with two-parameter sequence of linear transformations in Hilbert space, which are constructed from a given discrete random field.

Вступ. При розв’язанні прикладних задач доводиться розглядати лінійні перетворення випадкових полів. Наприклад, електромагнітні поля з випадковими джерелами, турбулентність у стадії виродження та інші [1, 2]. При гільбертовому підході до дослідження випадкових функцій виникає новий вид лінійних перетворень випадкових полів як багатопараметричних векторних функцій у гільбертовому просторі. Такі перетворення є мало дослідженими [3, 4].

Аналіз останніх досліджень. До цього часу була розроблена достатньо повна спектральна теорія однорідних випадкових полів [3]. Дискретні поля вивчались лише епізодично [5,7]. Гільбертів підхід до лінійних перетворень дискретних випадкових полів не розглядався.

Постановка задачі. Визиває зацікавленість розповсюдження результатів роботи [6], в якій розглянуто лінійні перетворення випадкових полів у гільбертовому просторі, на дискретні випадкові поля. Такий підхід дозволяє отримати широкі класи випадкових полів, розглядаючи лінійне операторне перетворення поля після занурення у гільбертів простір. Це дає можливість також моделювати кореляційні функції випадкових неоднорідних полів тільки за спектром даного поля і відхиленню оператора перетворення від унітарного.

Розв'язання задачі. Розглянемо еволюційно зображене поле (ЕПП) $u(n,m) = A_1^n A_2^m u_0$, де A_1, A_2 – несамоспряжені двічі переставні [4] обмежені оператори в гільбертовому просторі $H = \overline{\underset{n,m\in\mathbb{Z}}{V} u(n,m)}$. Такі поля та їх збурення розглядались у [6]

Розглянемо також лінійне перетворення ЕПП: $V(n,m) = Bu(n,m)$, де оператор $B \in [H,H]$, $\|B\| < \infty$, і $I - B^*B = \langle \cdot, e\rangle e$, $u(n,m)$ – *ганкелево поле* [6], оператор B називатимемо *дилатацією* [6].

Кореляційна функція дилатації ганкелева поля має вигляд:

$$K_{VV}(n,m,p,q) = \langle Bu(n,m), Bu(p,q)\rangle = \langle u(n,m), u(p,q)\rangle - \\ -\left\langle \left(I - B^*B\right)u(n,m), u(p,q)\right\rangle = K_{uu}(n,m,p,q) - \Phi(n,m)\overline{\Phi(p,q)}, \tag{1}$$

де $\Phi(n,m) = \langle u(n,m), e\rangle$.

Тоді кореляційну різницю $W(n,m,p,q)$, яка описує відхилення дискретного випадкового поля від ганкелева [6], запишемо так:

$$W(n,m,p,q) = LK(n,m,p,q) = K(n,m+1,p+1,q) + K(n+1,m,p,q+1) - \\ -K(n+1,m+1,p,q) - K(n,m,p+1,q+1).$$

У випадку, що розглядається маємо:

$$W_{VV} = LK_{VV}(n,m,p,q) = L\left(K_{UU}(n,m,p,q) - \Phi(n,m)\overline{\Phi(p,q)}\right),$$

$$LK_{UU}(n,m,p,q) = W_{UU}(n,m,p,q).$$

$$L\Phi(n,m)\overline{\Phi(p,q)} = \Phi(n,m+1)\overline{\Phi(p+1,q)} + \Phi(n+1,m)\overline{\Phi(p,q+1)} - \\ -\Phi(n+1,m+1)\overline{\Phi(p,q)} - \Phi(n,m)\overline{\Phi(p+1,q+1)}. \tag{2}$$

Позначимо

$$\Phi(n,m+1) = \Phi_1(n,m),\ \Phi(n+1,m) = \Phi_2(n,m),$$
$$\Phi(n+1,m+1) = \Phi_3(n,m),\ \Phi(n,m) = \Phi_4(n,m).$$

Тоді

$$W_{VV} = W_{UU}(n,m,p,q) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \Phi_\alpha(n,m) J_{\alpha\beta} \overline{\Phi_\beta(p,q)}, \tag{3}$$

де $J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – *інволютивна матриця*.

Нехай A_1, A_2 – несамоспряжені двічі переставні обмежені оператори Тоді кореляційна різниця ЕПП має вигляд:

$$W_{UU}\left(n,m,p,q\right)=\varphi\left(n,m\right)\overline{\varphi\left(p,q\right)},\ \varphi\left(n,m\right)=\left\langle A_1^n A_2^m u_0, g\right\rangle,$$

g – каналовий елемент.

Означення. *Біспектром* послідовності $u\left(n,m\right)=A_1^n A_2^m u_0$ у гільбертовому просторі назвемо об'єднання спектрів операторів $A_k\left(k=1,2\right)$.

Розв'язання задачі для послідовності з біспектром у нулі. Перейдемо до отримання відповідних необхідних і достатніх умов у випадку заданого спектра операторів A_1 и A_2. Нехай в еволюційному зображенні $u\left(n,m\right)=A_1^n A_2^m u_0$, де A_1, A_2 – оператори зі спектром у нулі [7] і g – каналовий елемент.

У цьому випадку модельний простір $\widehat{H}$ збігається з $L^2(D)$, $D=[0,a_1]\times[0,a_2]$; $a_1,a_2<\infty$, $\widehat{A_1}f(x,y)=i\int\limits_0^x f(t,y)dt$, $\widehat{A_2}f(x,y)=i\int\limits_0^y f(x,\tau)d\tau$, де $i=\sqrt{-1}$.

Теорема 1. *Для того щоб $V\left(n,m\right)$ була дилатацією першого порядку поля $u\left(n,m\right)=A_1^n A_2^m u_0$, де A_1, A_2 – несамоспряжені двічі переставні* [4] *обмежені оператори зі спектром у нулі, необхідно і достатньо щоб її кореляційна різниця другого порядку мала вигляд (2), до того ж $\Phi_\alpha\left(n,m\right)$ – лінійні функціонали від $u\left(n,m\right)$, а*

$$W_{UU}\left(n,m,p,q\right)=\varphi\left(n,m\right)\overline{\varphi\left(p,q\right)}, \tag{4),}$$

$$\varphi\left(n,m\right)=\frac{\left(-1\right)^m i^{n+m} a_1^{n+1} a_2^{m+1}}{(n+1)!(m+1)!}. \tag{5}$$

Доведення. Необхідність.

Розглянемо випадок, коли біспектр послідовності $u\left(n,m\right)$ міститься у нулі [7] та g – каналовий елемент.

Нехай модельний простір $\widehat{H}$ збігається з $L^2(D)$, $D=[0,a_1]\times[0,a_2]$;

$$a_1,a_2<\infty\ \ \widehat{A_1}f(x,y)=i\int\limits_0^x f(t,y)dt\ ,\ \widehat{A_2}f(x,y)=i\int\limits_0^y f(x,\tau)d\tau\ .$$

Згідно з унітарною еквівалентністю H_0 відображується оператором $\bigcup$ в $\widehat{H}_0 = \overline{2Jm\widehat{A}_1\widehat{H}} \bigcap \overline{2Jm\widehat{A}_2\widehat{H}}$ підпростір постійних функцій $L^2(D)$, через те що $\|g_0\| = 1$, отже $g_0(x,y) \equiv 1$.

Неважко показати, що

$$\left(\widehat{A}_1 - \lambda_1 I\right)^{-1}\left(\widehat{A}_2 - \lambda_2 I\right)^{-1} g_0(x,y) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} e^{i\frac{x}{\lambda_1} + i\frac{y}{\lambda_2}}.$$

Тоді

$$\varphi(n,m) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\gamma_1}\oint\limits_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^m \left[\int\limits_D \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} e^{i\frac{\xi_1}{\lambda_1} + i\frac{\xi_2}{\lambda_2}} d\xi_1 d\xi_2\right] d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_D \left[\oint\limits_{\gamma_1}\oint\limits_{\gamma_2} \lambda_1^{n-1}\lambda_2^{m-1} e^{i\frac{\xi_1}{\lambda_1} + i\frac{\xi_2}{\lambda_2}} d\lambda_1 d\lambda_2\right] d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int\limits_D \frac{i^n \xi_1^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^m i^m \xi_2^m}{m!} d\xi_1 d\xi_2 = (-1)^m \frac{i^{n+m}}{n!m!} \int\limits_0^{a_1}\int\limits_0^{a_2} \xi_1^n \xi_2^m d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= (-1)^m \frac{i^{n+m} a_1^{n+1} a_2^{m+1}}{(n+1)!(m+1)!},$$

$$W_{UU}(n,m,p,q) = \varphi(n,m)\overline{\varphi(p,q)}, \quad \varphi(n,m) = \frac{(-1)^m i^{n+m} a_1^{n+1} a_2^{m+1}}{(n+1)!(m+1)!}.$$

Той факт, що $\Phi_\alpha(n,m)$ – лінійні функціонали від $u(n,m)$ витікає з (2).

Достатність.

Покажемо, що існує дискретне поле вигляду $u(n,m) = \widehat{A}_1^n \widehat{A}_2^m u_0$, для якого $W_{UU}(n,m,p,q)$ є кореляційною різницею. Розглянемо гільбертів простір $L^2(D)$, $D = [0;a_1]\times[0;a_2]$. Введемо оператори $\widehat{A}_1 f(x,y) = i\int\limits_0^x f(t,y)dt$, $\widehat{A}_2 f(x,y) = i\int\limits_0^y f(x,\tau)d\tau$. Якщо провести такі ж міркування, як при доведенні необхідності, одержимо кореляційну різницю вигляду (4) з $\varphi(n,m)$ вигляду (5).

Теорема доведена.

Розглянемо випадок, коли біспектр послідовності $u(n,m)$ міститься у нулі [7] та h_0 не є каналовим елементом. Як модельний простір $\widehat{H}$ візьмемо $L^2(D)$, $D=[0;a_1]\times[0;a_2]$ $a_1,a_2<\infty$ $\widehat{A}_1 f(x,y)=i\int_0^x f(t,y)dt$, $\widehat{A}_2 f(x,y)=i\int_0^y f(x,\tau)d\tau$.

Розглянемо

$\left(\widehat{A}_1^*-\lambda_1 I\right)^{-1}h_0=f(x,y)$, $h_0=\left(\widehat{A}_1^*-\lambda_1 I\right)f(x,y)$, $h_0=-\lambda_1 f(x,y)-i\int_x^1 f(t,y)dt$.

Позначимо $u\left(x,y\right)=\int_x^1 f\left(t,y\right)dt$.

Тоді

$$-iu(x,y)+\lambda_1\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=h_0(x,y);\ u(1,y)=0,$$

Звідси

$$u(x,y)=\left\{c_1+\int_x^1\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)}dt\right\}e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}.$$

Оскільки $u(1,y)=0$, то $c_1=0$.

$$f(x,y)=-\frac{\partial u(x,y))}{\partial x}=\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}-\frac{i}{\lambda_1}e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}\int_x^1\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)}dt.$$

Таким чином,

$$\left(\widehat{A}_1^*-\lambda_1 I\right)^{-1}h_0=\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}-\frac{i}{\lambda_1}e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}\int_x^1\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)}dt=M_1(x,y,\lambda_1).$$

Аналогічно,

$$\left(\widehat{A}_2^*-\lambda_2 I\right)^{-1}h_0=\frac{h_0(x,t)}{\lambda_2}-\frac{i}{\lambda_2}e^{-\frac{i}{\lambda_2}(1-y)}\int_y^1\frac{h_0(x,t)}{\lambda_2}e^{\frac{i}{\lambda_2}(1-t)}dt=M_2(x,y,\lambda_2),$$

$$\varphi(n,m)=\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\lambda_1^n\lambda_2^m\left[\int_D M_1(x,y,\lambda_1)\overline{M_2(x,y,\lambda_2)}dxdy\right]d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Розв'язання задачі для послідовності з дискретним біспектром.

Теорема 2. *Для того щоб* $V\left(n,m\right)$ *була дилатацією першого порядку поля* $u\left(n,m\right)=A_1^n A_2^m u_0$, *де* A_1, A_2 *– несамоспряжені двічи переставні* [4] *обмежені оператори з дискретним спектром, необхідно і достатньо щоб її кореляційна різниця другого порядку мала вигляд (3), до того ж* $\Phi_\alpha(n,m)$ *– це лінійні функціонали від* $u(n,m)$, *а* $W_{UU}(n,m,p,q)=\varphi(n,m)\overline{\varphi(p,q)}$,

$$\varphi(n,m)=\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\lambda_1^n\lambda_2^m\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{\left(\beta_{m_1}^{(1)}\right)^2}{\lambda_{m_1}^{(1)}-\lambda_1}\frac{\overline{\left(\beta_{m_2}^{(2)}\right)^2}}{\lambda_{m_2}^{(2)}-\lambda_2}\prod_{s=1}^{m_1-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m_1-s}^{(1)}}\prod_{r=1}^{m_2-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{m_2-r}^{(2)}}d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Доведення. Необхідність.

Розглянемо випадок, коли послідовність $u(n,m)=A_1^n A_2^m u_0$ має дискретний біспектр [7] та $g_0(n,m)$ – каналовий елемент. У цьому випадку модельний простір $\widehat{H}$ збігається з простором

$$l^2(\beta_1,\beta_2)=$$

$$=\left\{f(m_1,m_2),m_1=1,\ldots,N_1;m_2=1,\ldots,N_2;\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\left|f(m_1,m_2)\right|^2\left(\beta_{m_1}^{(1)}\right)^2\left(\beta_{m_2}^{(2)}\right)^2<\infty\right\},$$

$N_1N_2<\infty$, де $\left\{\lambda_{m_1}^{(1)}\right\}_{m_1=1}^{N_1}$ – послідовність недійсних точок спектру A_1/H_2, $H_2=\overline{2JmA_2H}$, $\lambda_{m_1}^{(1)}=\alpha_{m_1}^{(1)}+i\frac{\left(\beta_{m_1}^{(1)}\right)^2}{2}$, $\left\{\lambda_{m_2}^{(2)}\right\}_{m_2=1}^{N_2}$ – послідовність недійсних точок спектру A_2/H_1, $H_1=\overline{2JmA_1H}$, $\lambda_{m_2}^{(2)}=\alpha_{m_2}^{(2)}+i\frac{\left(\beta_{m_2}^{(2)}\right)^2}{2}$.

Оператори $\widehat{A}_1$ та $\widehat{A}_2$ задаються формулами

$$\widehat{A}_1 f(m_1,m_2)=\lambda_{m_1}^{(1)}f(m_1,m_2)+i\sum_{s=1}^{m_1-1}f(s,m_2)\left(\beta_s^{(1)}\right)^2,$$

$$\widehat{A}_2 f(m_1,m_2)=\lambda_q^{(2)}f(m_1,m_2)+i\sum_{r=1}^{m_2-1}f(m_1,r)\left(\beta_r^{(2)}\right)^2.$$

Оскільки переріз неермітових підпросторів операторів $\widehat{A}_1$ та $\widehat{A}_2$ збігається з підпростором функцій, що не залежать від аргументів, то $g_0(n,m)=1$. Легко перевірити, що

$$\left(A_1-\lambda_1 I\right)^{-1}\left(A_2-\lambda_2 I\right)^{-1}g_0(m_1,m_2)^{-1}=\frac{\beta_{m_1}^{(1)}}{\lambda_{m_1}^{(1)}-\lambda_1}\frac{\beta_{m_2}^{(2)}}{\lambda_{m_2}^{(2)}-\lambda_2}\prod_{s=1}^{m_1-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m_1-s}^{(1)}}\prod_{r=1}^{m_2-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{m_2-r}^{(2)}}.$$

Тоді має місце зображення

$\varphi(n,m)=$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\lambda_1^n\lambda_2^m\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{\left(\beta_{m_1}^{(1)}\right)^2}{\lambda_{m_1}^{(1)}-\lambda_1}\frac{\overline{\left(\beta_{m_2}^{(2)}\right)^2}}{\lambda_{m_2}^{(2)}-\lambda_2}\prod_{s=1}^{m_1-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m_1-s}^{(1)}}\prod_{r=1}^{m_2-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{m_2-r}^{(2)}}d\lambda_1 d\lambda_2,$$

$$\varphi(n,m)=\varphi_1(n)\overline{\varphi_2(m)},\ \varphi_1(n)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\beta_{m_1}^{(1)}\Lambda_{m_1}^{(1)}(n)\ ,\ \varphi_2(m)=\sum_{m_2=1}^{\infty}\beta_{m_2}^{(2)}\Lambda_{m_2}^{(2)}(m),$$

$$\Lambda_{m_1}^{(1)}(n)=-\frac{1}{2\pi i}\beta_{m_1}^{(1)}\oint_{\gamma_1}\lambda_1^n\frac{1}{\lambda_{m_1}^{(1)}-\lambda_1}\prod_{s=1}^{m_1-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m_1-s}^{(1)}}d\lambda_1\ ,$$

$$\Lambda_{m_2}^{(2)}(m)=-\frac{1}{2\pi i}\beta_{m_2}^{(2)}\oint_{\gamma_2}\lambda_2^m\frac{1}{\lambda_{m_2}^{(2)}-\lambda_2}\prod_{r=1}^{m_2-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{m_2-r}^{(2)}}d\lambda_2\ .$$

Достатність.

Відповідні міркування аналогічні доведенню теореми 1.

Теорема доведена.

Розв'язання задачі для послідовності з мішаним біспектром. Розглянемо випадок, коли послідовність $u(n,m)=A_1^n A_2^m u_0$ має мішаний біспектр [7] та g_0 – каналовий елемент.

Теорема 3. *Для того щоб $V(n,m)$ була дилатацією першого порядку поля $u(n,m)=A_1^n A_2^m u_0$, де A_1, A_2 – несамоспряжені двічі переставні* [4] *обмежені оператори з мішаним спектром, необхідно і достатньо щоб її кореляційна різниця другого порядку мала вигляд (3), до того ж $\Phi_\alpha(n,m)$ –це лінійні функціонали від $u(n,m)$, а $W_{UU}(n,m,p,q)=\varphi(n,m)\overline{\varphi(p,q)}$,*

$$\varphi(n,m)=-\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\Lambda_k(m)\frac{i^n l^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{де}\ \Lambda_k(m)=-\frac{1}{2\pi}\beta_k\oint_{\gamma}\lambda^m\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\prod_{s=1}^{k-1}\frac{\lambda-\overline{\lambda_{k-s}}}{\lambda-\lambda_{k-s}}d\lambda\ .$$

Доведення. Необхідність.

Нехай послідовність $u(n,m)=A_1^n A_2^m u_0$ має мішаний біспектр [7] та g_0 – каналовий елемент. У цьому випадку модельний простір $\widehat{H}$ є така сукупність:

$$\widehat{H}=\left\{f_k(y),k\in N;y\in[0;l]:\sum_{k=1}^{N}\left[\int_0^l\left|f_k(y)\right|^2dy\right]\beta_k^2<\infty\right\},$$

де $\left\{\lambda_k = \alpha_k + i\frac{\beta_k^2}{2}\right\}_{k=1}^{N}$ – це послідовність недійсних точок спектра A_2/H_1 .

Модельні оператори $\hat{A}_1$ та $\hat{A}_2$ задаються формулами:

$$\left(\hat{A}_1 f\right)_k(y) = i\int_0^y f_k(t)dt\,,\ \left(\hat{A}_2 f\right)_k(y) = \lambda_k f_k(y) + i\sum_{s=1}^{k-1} f_s(y)\beta_s^2\ .$$

Легко бачити, що й у цьому випадку $g_0 \equiv 1$, тоді

$$\varphi(n,m) = -\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \Lambda_k(m)\frac{i^n l^{n+1}}{(n+1)!}\,,\ \text{де}\ \Lambda_k(m) = -\frac{1}{2\pi}\beta_k \oint_{\gamma}\lambda^m \frac{1}{\lambda_k - \lambda}\prod_{s=1}^{k-1}\frac{\lambda - \overline{\lambda_{k-s}}}{\lambda - \lambda_{k-s}}d\lambda\ .$$

Достатність. Міркування аналогічні доведенню теореми 1.

Теорема доведена.

Висновки. У статті розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. На відміну від стандартного підходу до лінійних перетворень полів у статті лінійні перетворення розглядалися над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Список літератури: 1. *Рытов С.М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения / М.: Изд-во Академии наук СССР, 1953. – 232с. **2.** *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика II ч / М.: Наука, 1967. – 720 с. **3.** *Яглом А.М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Том 1. – Вып.5(51),– С.3-168. **4.** *Золотарев В.А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм.ССР, –1979. – ХП. – № 3. – С.136-140. **5.** *Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А.* Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національног технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техниці та технологіях. – Харків: НТУ”ХПІ”. – 2011. – №13.–С.146-153. **6.** *Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А.* Лінійні перетворення дискретних випадкових полів // Вісник Національног технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техниці та технологіях. – Харків: НТУ”ХПІ”. – 2011. – №42.–С.144-154. **7.** *Шаронова Н.В., Черемская Н.В.* Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета.– 2004. – №1(19). – С.343-348.

Надійшла до редколегії 27.12.11