

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, ст. преп., НТУ «ХПИ»

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ЗЕРНОВОГО ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Описано коливання швидкості лінійно-неоднорідного кільцевого шару зернової суміші, які спричинені осевими вібраціями вертикального циліндричного решета. Амплітуди коливань швидкості в усталеному режимі руху виражено через функції Кельвіна індексів нуль та один.

Описаны колебания скорости линейно-неоднородного кольцевого слоя зерновой смеси, вызванные осевыми вибрациями вертикального цилиндрического решета. Амплитуды колебаний скорости в установившемся режиме движения выражены через функции Кельвина индексов нуль и единица.

The vibrations in linearly no uniform velocity annular layer of a mixture of grain, caused by the axial vibration of a vertical cylindrical sieve were describes. The amplitudes of velocity oscillations in the steady state of motion expressed in terms of Kelvin functions of indices zero and one.

Постановка проблеми. Колебания интенсифицируют виброрешётное разделение зерновой смеси на фракции. Поэтому анализ распространения колебаний в сепарируемой смеси, вызванных вибрациями решета, представляет научно-прикладной интерес.

Обзор последних исследований и публикаций. Колебания скорости однородного кольцевого слоя в вертикальном цилиндрическом виброрешете рассматривали в [1,2], где движение псевдооживленной зерновой смеси описывали уравнениями течения вязкой жидкости. Экспериментально установлено [3,4], что вибровязкость смеси во вращающемся цилиндрическом решете меняется по толщине слоя. Она увеличивается с удалением от свободной внутренней поверхности слоя в сторону поверхности решета, в связи с чем в [4] поставлена и решена задача колебаний линейно-неоднородного слоя. Её решение выражено с помощью *функций Бесселя и Неймана* комплексного аргумента. Отмечены затруднения с проведением вычислений по полученным формулам. Поэтому в [5] и [6] построены другие решения этой задачи в *функциях Кельвина*. Но, исследуя колебания неоднородного потока, в [4], [5] и [6] упрощали уравнение движения, отбрасывая в дифференциальном операторе Лапласа слагаемое, пропорциональное $1/r$, которым учитывается искривление рабочей поверхности решета. Фактически в этих публикациях, вместо колебаний скорости кольцевого слоя, моделировали колебания скорости неоднородного плоского слоя. В отличие от них, здесь решается задача колебаний в более точной постановке с учётом искривления рабочей поверхности решета.

Целью работы является вывод и апробация расчётами формулы колебаний скорости неоднородного кольцевого слоя зерна при движении его в вертикальном цилиндрическом виброрешете.

Постановка и аналитическое решение краевой задачи. За исходную принимаем расчётную схему на рис. 1.

Символами r и z обозначены радиальная и осевая координаты; R – радиус решета, которое совершает вертикальные осевые колебания с амплитудой A^* и круговой частотой ω ; h – толщина зернового слоя, а $R_0 = R - h$ – радиус его внутренней свободной поверхности.

Следуя [4], изменение эффективной кинематической вибровязкости смеси по радиальной координате описываем выражением

$$v = v(r) = v_0 + k(r - R_0). \quad (1)$$

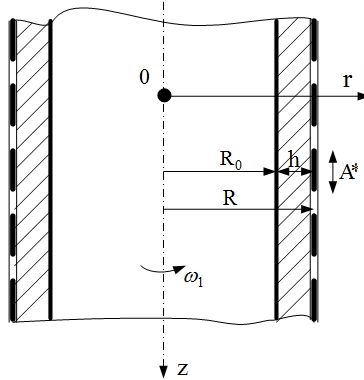


Рисунок 1 – Расчетная схема вертикального цилиндрического решета с сепарируемой зерновой смесью.

В нём v_0 – вибровязкость смеси у свободной поверхности слоя; k – характеризует её возрастание с увеличением r .

Движение смеси в направлении оси Oz описываем дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{v}, \quad (2)$$

в котором $u = u(r, t)$ – проекция скорости потока на ось Oz ; g – ускорение свободного падения; t – время.

Уравнение (2) будем решать при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0; \quad u(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t). \quad (3)$$

Учитывая, что в производственных условиях работы решета $h \ll R$, заменим в (2) слагаемое $1/r$ числом $1/r_*$, где $r_* = R - 0,5h$. Такая замена не влечёт существенных потерь точности, поскольку $1/r$ изменяется на коротком промежутке. Например, когда $R = 0,3075$ м; $h = 0,01$ м, то $r \in [3,2520; 3,3613]$. Постоянная $1/r_*$ при этом равна 3,3058, то есть незначительно отличается от крайних значений $1/r$. Эффективность указанного упрощения уравнения движения подтверждена расчётами колебаний скорости однородного кольцевого слоя в [7] и [8].

Итак, вместо (2), решаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r_*} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{v}. \quad (4)$$

Перейдём от переменной r к переменной v . В результате этого преобразования выражения (4) и (3) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \left(\frac{1}{kr_*} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{1}{vk^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{vk^2}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_{v=v_0} = 0; \quad u(a, t) = A^* \omega \cos(\omega t). \quad (6)$$

Здесь $a = v_0 + kh$.

По аналогии с [4], решение (5) представляем суммой

$$u(v, t) = v_{II}(v) + v_k(v, t). \quad (7)$$

Для определения слагаемых в (7), учитывая (5) и (6), получаем две краевые задачи:

$$\frac{d^2 v_{II}}{dv^2} + \left(\frac{1}{kr_*} + \frac{1}{v} \right) \frac{dv_{II}}{dv} = -\frac{g}{vk^2}; \quad (8)$$

$$\left. \frac{dv_{II}}{dv} \right|_{v=v_0} = 0; \quad v_{II}(a) = 0; \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial v^2} + \left(\frac{1}{kr_*} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial v_k}{\partial v} - \frac{1}{vk^2} \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial v_k}{\partial v} \right|_{v=v_0} = 0; \quad v_k(a, t) = A^* \omega \cos(\omega t). \quad (11)$$

Уравнение (8) решаем методом понижения порядка. Учитывая (9), находим:

$$\nu_{II}(\nu) = \frac{gr_*}{k} \left\{ \ln \frac{a}{\nu} + \exp\left(\frac{\nu_0}{kr_*}\right) \left[Ei\left(-\frac{\nu}{kr_*}\right) - Ei\left(-\frac{a}{kr_*}\right) \right] \right\}. \quad (12)$$

Здесь $Ei(-x)$ – интегральная показательная функция, таблицы которой есть в [9], [10] и других изданиях по специальным функциям.

В пределе, когда $r_* \rightarrow \infty$:

$$\exp\left(\frac{\nu_0}{kr_*}\right) \sim 1 + \frac{\nu_0}{kr_*}; \quad Ei\left(-\frac{\nu}{kr_*}\right) - Ei\left(-\frac{a}{kr_*}\right) \sim \ln \frac{\nu}{a} + \frac{a-\nu}{kr_*},$$

из (12) следует, что

$$\nu_{II}(\nu) = \frac{g}{k^2} \left(\nu_0 \ln \frac{\nu}{a} + a - \nu \right).$$

Такое выражение $\nu_{II}(\nu)$ использовали для расчётов в [4] и [5], а формула (12) обобщает его.

Решение краевой задачи (10), (11) ищем в виде [4]:

$$\nu_k(\nu, t) = \operatorname{Re} \left[w(\nu) e^{-i\omega t} \right] = \operatorname{Re} w(\nu) \cos(\omega t) + \operatorname{Im} w(\nu) \sin(\omega t), \quad (13)$$

где $i = \sqrt{-1}$, а комплексная функция $w(\nu)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 w}{d\nu^2} + \left(\frac{1}{kr_*} + \frac{1}{\nu} \right) \frac{dw}{d\nu} + \frac{i\omega}{\nu k^2} w = 0 \quad (14)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(a) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(a) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\nu} \operatorname{Re} w(\nu) \Big|_{\nu=\nu_0} = \frac{d}{d\nu} \operatorname{Im} w(\nu) \Big|_{\nu=\nu_0} = 0.$$

Ведём вспомогательную функцию $w_1(\nu)$ по формуле

$$w(\nu) = \nu^{-1/2} \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right) w_1(\nu). \quad (16)$$

Подставив (16) в (14), получаем:

$$\frac{d^2 w_1}{d\nu^2} + \frac{1}{k^2} \left(\frac{i\omega - k(2r_*)^{-1}}{\nu} + \frac{k^2}{4\nu^2} - \frac{1}{4r_*^2} \right) w_1 = 0. \quad (17)$$

Переходим к новой переменной $\xi = \nu(kr_*)^{-1}$, выражение (17) преобразуем в каноническое уравнение Уиттекера:

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \right) w_1 = 0, \quad (18)$$

где $\alpha = i\omega r_* k^{-1} - 0,5$.

Его фундаментальным решением являются функции $M_{\alpha,0}(\xi)$ и $W_{\alpha,0}(\xi)$. В связи с тем, что первый индекс α у функций Уиттекера комплексный, возникают затруднения с вычислением их значений.

Чтобы обойти их, вместо точного решения уравнения (18) будем использовать его приближённое решение.

Обычно, в производственных условиях сепарирования зерновых смесей значения расчётных параметров таковы, что

$$\frac{1}{4} \ll \left| \frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \right|.$$

Поэтому заменим (18) на упрощённое уравнение

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \right) w_1 = 0,$$

фундаментальное решение которого выражается через функции Бесселя и Хенкеля комплексного аргумента: $J_0(2\sqrt{\alpha\xi})$ и $H_0^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi})$. Используя эти функции и выражение (16), получаем приближённое решение уравнения (14):

$$w(v) = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \left[(c_1 + ic_2) J_0(2\sqrt{\alpha\xi}) + (c_3 + ic_4) H_0^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \right], \quad (19)$$

с точностью до произвольных постоянных $c_j, j = \overline{1;4}$.

Учитывая, что $\omega r_* k^{-1} \gg 0,5$, при выделении вещественной и мнимой частей цилиндрических функций заменим их приращения, а также приращения квадратного корня в аргументах, соответствующими дифференциалами. Тогда

$$J_0(2\sqrt{\alpha\xi}) \approx f_1(v) - if_2(v); \quad H_0^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \approx -f_3(v) + if_4(v);$$

$$f_1(v) = ber(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}ber_1(\beta\sqrt{v}); \quad \beta = \frac{2\sqrt{\omega}}{k};$$

$$f_2(v) = bei(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}bei_1(\beta\sqrt{v}); \quad \gamma = \frac{1}{2r_*\sqrt{\omega}};$$

$$f_3(v) = her(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}her_1(\beta\sqrt{v});$$

$$f_4(v) = hei(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}hei_1(\beta\sqrt{v});$$

$ber_s(x), bei_s(x), her_s(x), hei_s(x)$ – функции Кельвина, ($s = \overline{0;1}$).

Используя (19) и (20) находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w(\nu) &= \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right) \left[c_1 f_1(\nu) + c_2 f_2(\nu) - c_3 f_3(\nu) - c_4 f_4(\nu) \right]; \\ \operatorname{Im} w(\nu) &= \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right) \left[-c_1 f_2(\nu) + c_2 f_1(\nu) + c_3 f_4(\nu) - c_4 f_3(\nu) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив (21) и их производные по ν в (15), получаем систему четырёх уравнений, из которой находим c_j :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} \exp\left(\frac{a}{2kr_*}\right) \left[f_1(a) - \delta_1 f_3(a) + \delta_2 f_4(a) \right]; \\ c_2 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} \exp\left(\frac{a}{2kr_*}\right) \left[f_2(a) - \delta_1 f_4(a) - \delta_2 f_3(a) \right]; \\ c_3 &= \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = -\delta_2 c_1 + \delta_1 c_2; \\ \Delta &= \left[f_1(a) - \delta_1 f_3(a) + \delta_2 f_4(a) \right]^2 + \left[f_2(a) - \delta_1 f_4(a) + \delta_2 f_3(a) \right]^2; \\ \delta_1 &= \frac{F_1 F_3 + F_2 F_4}{F_3^2 + F_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{F_2 F_3 - F_1 F_4}{F_3^2 + F_4^2}; \\ F_1 &= \operatorname{ber}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[\zeta \operatorname{ber}'_1(\zeta) + \operatorname{ber}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_1(\nu_0); \\ F_2 &= \operatorname{bei}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[\zeta \operatorname{bei}'_1(\zeta) + \operatorname{bei}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_2(\nu_0); \\ F_3 &= \operatorname{her}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[\zeta \operatorname{her}'_1(\zeta) + \operatorname{her}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_3(\nu_0); \\ F_4 &= \operatorname{hei}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[\zeta \operatorname{hei}'_1(\zeta) + \operatorname{hei}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_4(\nu_0); \\ \zeta &= \beta \sqrt{\nu_0}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{\nu_0}}{k\beta}. \end{aligned}$$

Штрихом обозначены производные функции Кельвина.

Определив множители c_j , $j = 1, 4$, после подстановки (12), (13) и (21) в (7), получаем формулу скорости движения смеси по решетке

$$\begin{aligned} u(\nu, t) &= \frac{gr_*}{k} \left\{ \ln \frac{a}{\nu} + \exp\left(\frac{\nu_0}{kr_*}\right) \left[\operatorname{Ei}\left(-\frac{\nu}{kr_*}\right) - \operatorname{Ei}\left(-\frac{a}{kr_*}\right) \right] \right\} + \\ &+ \left[A_1(\nu) \cos(\omega t) + A_2(\nu) \sin(\omega t) \right] \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

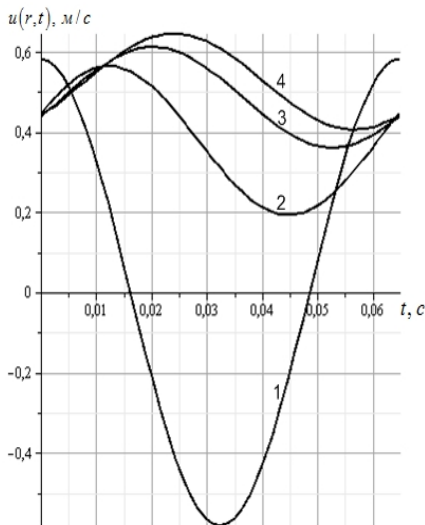


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных $r : 1, 2, 3, 4$ –
 $= R; R_0 + \frac{h}{2}; R_0 + \frac{h}{4}; R_0$.

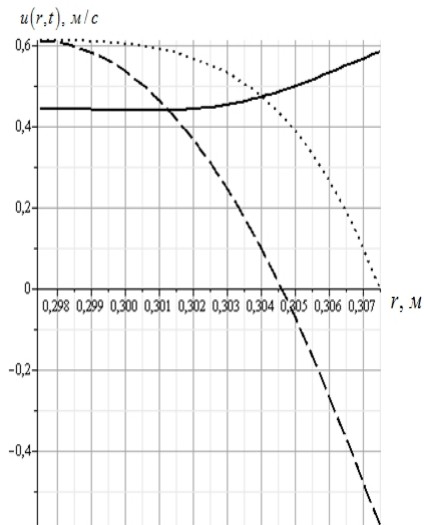


Рисунок 3 – Профили скорости потока зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени:
 — $t = 0$; $t = \frac{\pi}{2\omega}$; ---- $t = \frac{\pi}{\omega}$.

Здесь $A_1(v) = c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v) - c_3 f_3(v) - c_4 f_4(v)$;
 $A_2(v) = -c_1 f_2(v) + c_2 f_1(v) + c_3 f_4(v) - c_4 f_3(v)$.

Если устремить $r_* \rightarrow \infty$, то в пределе: $\gamma = 0$,

$$f_1(v) = ber(\beta\sqrt{v});$$

$$f_2(v) = bei(\beta\sqrt{v}); f_3(v) = her(\beta\sqrt{v}); f_4(v) = hei(\beta\sqrt{v});$$

$$F_1 = ber'(\zeta); F_2 = bei'(\zeta); F_3 = her'(\zeta); F_4 = hei'(\zeta).$$

Вычисление c_j сводится к формулам, которые опубликованы в [6], а решение (22) переходит в известное решение для скорости линейно-неоднородного плоского слоя.

Итак, формула (22) позволяет проводить расчёты колебаний скорости неоднородного кольцевого слоя в цилиндрическом виброрешете.

Проанализируем численные результаты. Для проведения расчётов при-

нимаем: $A^* = 0,006$ м; $\rho = 750$ кг/м³; $R = 0,3075$ м; $h = 0,01$ м;

$k = \frac{0,77 - 0,55}{h\rho}$ м/с; $\omega = 96,9$ с⁻¹, что соответствует зерновой смеси пшеницы.

Результаты компьютерных расчётов по формуле (22) графически представлены на рис. 2-3. На рис. 2 показано, что скорости и амплитуды её колебаний существенно изменяются с удалением от поверхности виброрешета.

Распределение скорости по толщине движущегося слоя также меняется с течением времени согласно графикам на рис. 3. Изменение профиля скорости во времени способствует сегрегации зерновой смеси.

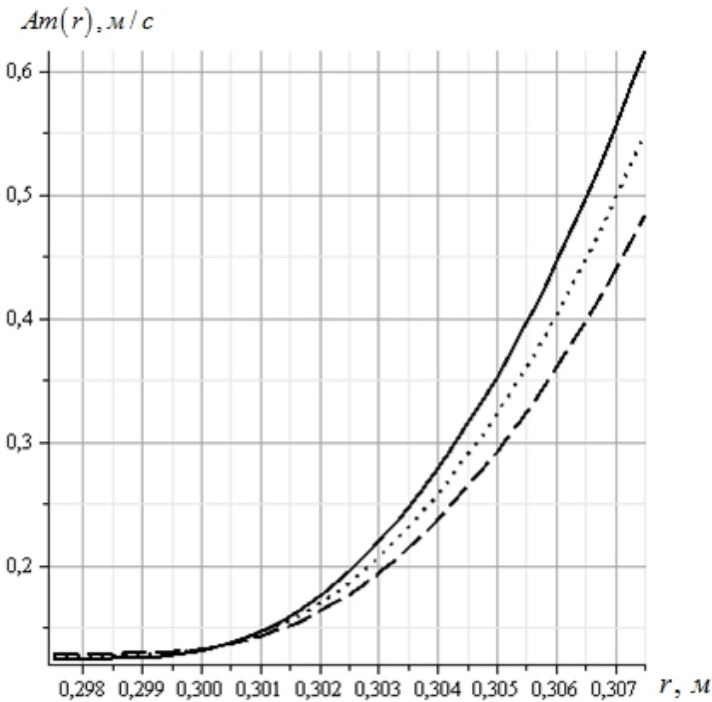


Рисунок 4 – Зависимость $Am(r) = \sqrt{A_1^2(v) + A_2^2(v)}$ при различных значениях ω :

— $\omega = 96,9$ с⁻¹; $\omega = 86,4$ с⁻¹; - - - $\omega = 75,9$ с⁻¹.

На рис. 4 представлены графики изменения амплитуд колебаний скорости для трёх значений ω . Амплитуды колебаний наибольшие у поверхности

виброрешета и наименьшие – у свободной поверхности слоя. С увеличением ω усиливается затухание вибрационного поля по толщине кольцевого слоя зерновой смеси.

Выводы. Изложенная теория позволяет проводить параметрический анализ влияния различных факторов на скорость потока зерна и её колебания в вертикальном цилиндрическом решете. Адекватность математической модели можно повысить путём идентификации значения коэффициента k по замеренным значениям вибровязкости смеси у свободной поверхности зернового слоя и у поверхности виброрешета.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Кинетика сепарируемых зерновых смесей в вертикальных цилиндрических виброрешётах // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. – № 1 (61). – С. 177-181. 2. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете // Динаміка та міцність машин: Вісник НТУ «ХПІ». – 2010. – Вып. 69. – С. 100-108. 3. Тищенко Л.Н., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В. Исследование закономерностей вибровязкости зерновой смеси при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решётами // Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вып. 88. – С. 34-44. 4. Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В. и др. Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харків: “Міськдрук”, 2010. – 360 с. 5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости потока зерна на решете виброцентробежного сепаратора // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва та переробки сільськогосподарської продукції. – Харків: ХНТУСГ, 2010. – Вып. 103. – С. 95-104. 6. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Математическая модель движения зерновых смесей по вертикальным решётам виброцентробежных сепараторов // Тракторы и сельськохозяйственные машины. – 2011. – №7. – С. 35-38. 7. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Приближённый расчёт колебаний зерновой смеси в цилиндрическом виброрешете // Вісник ХНТУСГ: Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні. – Харків: ХНТУСГ, 2011. – Вып. 115. – С. 48-54. 8. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гармонические колебания сепарируемой зерновой смеси при неравномерном вращении цилиндрического решета // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні Український міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2011. – №45. – С. 135-140. 9. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 10. Янке Е., Энде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редколлегию 15.12.2011