

**О.С. РЕДЧЕНКО**, асистент, НТУ «ХПІ»

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ У КРИВИХ ШВИДКІСНИХ ПОТЯГІВ З КУЗОВАМИ, ЩО НАХИЛЯЮТЬСЯ**

Розроблені математичні моделі, що дозволяють визначити потрібний кут нахилу кузова та досліджувати коливання надресорної будови екіпажу під дією відцентрової сили інерції у кривих.

Разработаны математические модели, которые позволяют определить необходимый угол наклона кузова и исследовать колебания наддресорного строения экипажа под действием центробежной силы инерции в кривых.

The mathematical models which allow determining necessary tilt angle of the car body and allow investigating the oscillations of the train over leaf suspension under inertial centrifugal force at the curve.

**Вступ та постановка задачі.** Державна програма по впровадженню на залізницях України швидкісного руху передбачає зростання швидкості пасажирських потягів до 200 км/год на лініях загальною протяжністю 2600 км [1]. В рамках цієї програми розглядається використання потягів зарубіжного виробництва з кузовами, що нахилиються. Введення в експлуатацію таких потягів дозволяє збільшити швидкість руху на існуючих залізничних лініях, які характеризуються великою кількістю кривих малих радіусів, що підтверджується позитивним досвідом низки європейських держав [2,3]. В нашій країні досвіду проектування та експлуатації таких потягів фактично не має, що, напевне, і призвело до відсутності у науково-технічній періодиці робіт, присвячених теоретичним дослідженням руху потягів з кузовами, що нахилиються, у кривих ділянках колії.

Тому, метою даної статті є створення математичних моделей що дозволяють визначити потрібний кут нахилу кузова та досліджувати коливання надресорної будови під дією відцентрової сили інерції.

**Математична модель для визначення потрібного кута нахилу кузова та відцентрової сили інерції.** Рух екіпажу у кривій характеризується виникненням відцентрової сили інерції, величина якої залежить від швидкості руху та радіусу кривої. Вона визначається формулою:

$$F_c = m \cdot V^2 / R, \quad (1)$$

де  $m$  – маса екіпажу;  $V$  – швидкість руху;  $R$  – радіус кривої.

Для зменшення її впливу на екіпаж у кривих зовнішню рейку встановлюють із підвищенням відносно внутрішньої рейки. При організації швидкісного руху на існуючих лініях підвищення зовнішньої рейки стає недостатньо для компенсації дії відцентрової сили інерції. Це призводить до необхідності примусово «довертати» кузов усередину кривої на певний кут,

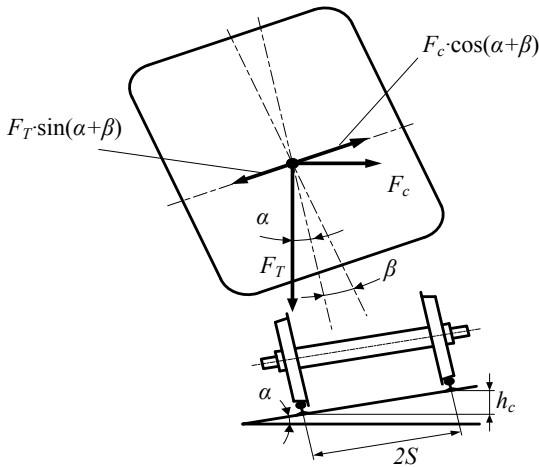


Рисунок 1 – Схема діючих на екіпаж сил при русі у кривій.

що значно розширює діапазон швидкостей руху по кривим малого радіусу. Значення цього додаткового кута повороту кузова може бути знайдено із наступних міркувань (див. рис. 1).

Кузов вагона при русі по кривій повернутий на певний кут усередину кривої. Цей кут представляє собою суму кутів від підвищення зовнішньої рейки –  $\alpha$  та додаткового кута повороту кузова –  $\beta$ . Повна компенсація відцентрової сили інерції настане при рівності проєкцій відцентрової сили інерції і сили тяжіння на вісь, паралельну площині підлоги вагона:

$$F_c \cdot \cos(\alpha + \beta) = F_T \cdot \sin(\alpha + \beta). \quad (2)$$

Підставляючи (1) у (2), та враховуючи, що  $F_T = m \cdot g$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння, отримаємо:

$$m \cdot V^2 / R \cdot \cos(\alpha + \beta) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha + \beta). \quad (3)$$

Далі із (3) отримуємо вираз для додаткового кута нахилу кузова:

$$\beta = \arctan(V^2 / (R \cdot g)) - \alpha. \quad (4)$$

Як видно на рис. 1, величина кута підвищення зовнішньої рейки складає:

$$\alpha = \arctan(h_c / 2S), \quad (5)$$

де  $h_c$  – підвищення зовнішньої рейки;  $2S$  – ширина колії по кругам катання.

У кривих улаштування шляху має три характерні ділянки: вхід – рух екіпажу по першій перехідній кривій зі змінним радіусом, який зменшується від безкінечного до радіусу  $R$  кругової кривої; рух екіпажу по круговій кривій із

постійним радіусом; вихід – рух екіпажу по другій перехідній кривій зі змінним радіусом, який збільшується від радіусу  $R$  кругової кривої до нескінченності. Розбивка перехідних кривих виконується по радіоїдальній спіралі.

При русі у кривій змінюється і величина підвищення зовнішньої рейки. Так, при вході у криву ця величина змінюється від нуля до підвищення  $h_c$  у круговій кривій. При виході – плавно зменшується від значення  $h_c$  до нуля.

У перехідній кривій величина миттєвого радіусу визначається формулою:

$$r(t) = A/L_t(t), \quad (6)$$

де  $A = R \cdot L_t$  – параметр кривої,  $L_t$  – довжина перехідної кривої,  $L_t(t)$  – точна координата екіпажу у перехідній кривій.

Після диференціювання по часу виразів (4) і (6) отримаємо:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} - \frac{V^2 (dr/dt)}{g \cdot r^2(t) \cdot \left(1 + V^4 / \left(g^2 \cdot r^2(t)\right)\right)}. \quad (7)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{R \cdot L_t \cdot V}{L_t^2(t)}. \quad (8)$$

Величина  $d\alpha/dt$  являє собою швидкість зміни кута підвищення зовнішньої рейки при русі по перехідній кривій і може бути визначена наступним чином.

Час руху по перехідній кривій становитиме  $t_t = L_t/V$ . При цьому швидкість зміни величини підвищення дорівнюватиме  $V_h = h_c/t_t$ . Таким чином, отримаємо:

$$V_h = \frac{dh_c}{dt} = \frac{h_c \cdot V}{L_t}. \quad (9)$$

Замінюючи у виразі (9)  $h_c$  величиною кута підвищення (5), маємо:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\arctan(h_c/2S) \cdot V}{L_t}. \quad (10)$$

Об'єднуючи (1), (7), (8) і (10), та враховуючи, що  $dL_t/dt = V$ , оскільки швидкість руху постійна, отримаємо систему алгебро-диференціальних рівнянь, що встановлюють зв'язок між координатою потяга у кривій, величиною миттєвого радіуса, кутом підвищення зовнішньої рейки та кутом додаткового нахилу кузова. Також ця система рівнянь дозволяє визначити миттєві значення відцентрової сили інерції, що діє на екіпаж.

Слід зауважити, що система рівнянь (11) відповідає руху потяга по першій перехідній кривій. При русі потяга по круговій кривій величини радіусу кривої, підвищення зовнішньої рейки та додаткового кута нахилу кузова ва-

гона матимуть незмінні значення. Тому праві частини відповідних виразів будуть дорівнювати нулю. При русі по другій перехідній кривій структура системи рівнянь (11) не зміниться. Відмінність полягатиме тільки у знаках правих частин виразів радіусу кривої та підвищення зовнішньої рейки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL_t}{dt} = V; \\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\arctan\left(\frac{h_c}{2S}\right) \cdot V}{L_t}; \\ \frac{dr}{dt} = -\frac{R \cdot L_t \cdot V}{L^2(t)}; \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{V^2 (dr/dt)}{g \cdot r^2(t) \cdot \left(1 + \frac{V^4}{g^2 \cdot r^2(t)}\right)}; \\ F_c = \frac{m \cdot V^2}{r(t)}. \end{array} \right. \quad (11)$$

**Математична модель для опису коливань кузова.** Як показує практика проектування і експлуатації потягів з кузовами, що нахилиються, повна компенсація відцентрової сили інерції є небажаною з точки зору негативного впливу на самопочуття пасажирів [4]. Тому, у більшості випадків ступінь компенсації обмежується величиною 0,7...0,75 від повної компенсації. Наявність некомпенсованої відцентрової сили інерції призводить до деформації елементів ресорного підвішування та поперечних зв'язків екіпажа.

Для встановлення зв'язку між величиною відцентрової сили інерції і деформаціями пружних елементів екіпажної частини використовується розрахункова схема, яка приведена на рис. 2. Прийнята розрахункова схема має чотири ступені свободи: поперечне переміщення кузова  $y_k$ , поперечне переміщення рами візка  $y_t$ , повороти кузова  $\theta_k$  і рами візка  $\theta_t$  навколо вісі, що проходить через їх центри мас.

Побудова математичної моделі базується на наступних допущеннях [5,6]:

- система, що розглядається, складається із абсолютно жорстких тіл, які з'єднані пружними елементами, паралельно до яких включені гасителі коливань;
  - у коливаннях приймають участь половина маси кузова і маса візка;
  - коливання по всім ступеням свободи розглядаються як малі;
  - нерівності шляху у плані і вертикальні нерівності не розглядаються.
- У якості вихідних обрані рівняння Лагранжа другого порядку [7].

Кінетична енергія системи:

$$T = 1/2 \cdot m_k \cdot \dot{y}_k^2 + 1/2 \cdot J_k \cdot \dot{\theta}_k^2 + 1/2 \cdot m_t \cdot \dot{y}_t^2 + 1/2 \cdot J_t \cdot \dot{\theta}_t^2, \quad (12)$$

де  $m_k, J_k$  – половина маси і моменту інерції кузова,  $m_t, J_t$  – маса і момент інерції візка.

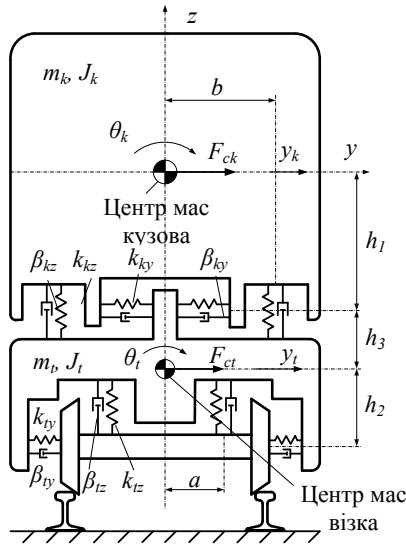


Рисунок 2 – Розрахункова схема.

Потенційна енергія системи:

$$\begin{aligned} \Pi = & 1/2 \cdot 2 \cdot k_{ty} \cdot (y_t + h_2 \cdot \theta_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t)^2 + \\ & + 1/2 \cdot 2 \cdot k_{tz} \cdot (a \cdot \theta_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot k_{kz} \cdot (b \cdot \theta_k - a \cdot \theta_t)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $k_{tz}, k_{kz}$  – коефіцієнти жорсткості ресорного підвішування першої та другої ступені;  $k_{ty}, k_{ky}$  – коефіцієнти жорсткості поперечних зв'язків екіпажу;  $h_1$  – відстань від центра мас кузова до вісі поперечних зв'язків кузова;  $h_2$  – відстань від центра мас візка до поперечних зв'язків візка;  $h_3$  – відстань від центра мас візка до вісі поперечних зв'язків кузова;  $a$  – відстань від вертикальної вісі кузова до вісі ресорного підвішування першої ступені;  $b$  – відстань від вісі кузова до вісі ресорного підвішування другої ступені.

Оскільки гасителі коливань включені паралельно пружним елементам, вираз дисипативної енергії має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi = & 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{ty} \cdot (\dot{y}_t + h_2 \cdot \dot{\theta}_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t)^2 + \\ & + 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{tz} \cdot (a \cdot \dot{\theta}_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{kz} \cdot (b \cdot \dot{\theta}_k - a \cdot \dot{\theta}_t)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $\beta_{tz}, \beta_{kz}$  – коефіцієнти демпфування ресорного підвішування першої та другої ступені;  $\beta_{ty}, \beta_{ky}$  – коефіцієнти демпфування поперечних зв'язків екіпажу.

Після виконання необхідних операцій диференціювання згідно вихідних рівнянь, отримаємо у розгорнутому вигляді систему рівнянь, яка дозволить визначити деформації пружних елементів екіпажної частини під дією непогашеної відцентрової сили інерції при русі по кривій:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_k \cdot \ddot{y}_k + 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) + \\ + 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) = \frac{m_k \cdot V}{r(t)}; \\ m_t \cdot \ddot{y}_t + 2 \cdot k_{ty} \cdot (y_t + h_2 \cdot \theta_t) - 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) + \\ + 2 \cdot \beta_{ty} \cdot (\dot{y}_t + h_2 \cdot \dot{\theta}_t) - 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) = \frac{m_t \cdot V}{r(t)}; \\ I_k \cdot \ddot{\theta}_k - 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) \cdot h_1 + 2 \cdot k_{kz} \cdot (b \cdot \theta_k - a \cdot \theta_t) \cdot b - \\ - 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) \cdot h_1 + 2 \cdot \beta_{kz} \cdot (b \cdot \dot{\theta}_k - a \cdot \dot{\theta}_t) \cdot b = 0; \\ I_t \cdot \ddot{\theta}_t + 2 \cdot k_{ty} \cdot (y_t + h_2 \cdot \theta_t) \cdot h_2 - 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) \cdot h_3 + \\ + 2 \cdot k_{tz} \cdot a^2 \cdot \theta_t - 2 \cdot k_{kz} \cdot (b \cdot \theta_k - a \cdot \theta_t) \cdot a + 2 \cdot \beta_{ty} \cdot (\dot{y}_t + h_2 \cdot \dot{\theta}_t) \cdot h_2 - \\ - 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) \cdot h_3 + 2 \cdot \beta_{tz} \cdot a^2 \cdot \dot{\theta}_t - \\ - 2 \cdot \beta_{kz} \cdot (b \cdot \dot{\theta}_k - a \cdot \dot{\theta}_t) \cdot a = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Об'єднуючи систему рівнянь (15) з системою (11), отримаємо математичну модель, що описує поведінку екіпажної частини при русі у кривій і встановлює зв'язок між параметрами шляху, величиною непогашеної відцентрової сили інерції і деформаціями пружних елементів екіпажної частини.

**Висновки.** Отримано математичні моделі, які дозволяють визначати потрібний кут нахилу кузова та досліджувати коливання надресорної будови під дією відцентрової сили інерції. Отримано об'єднану математичну модель що встановлює зв'язок між величиною відцентрової сили інерції, переміщеннями елементів екіпажної частини, параметрами шляху та рухомого складу. Ця модель може бути використана при виборі параметрів систем електромеханічного перетворення енергії для випробувальних каткових стендів.

**Список літератури:** 1. Корниченко В.В., Омеляненко В.И. Высокоскоростной электрический транспорт. Мировой опыт. – Харьков, НТУ «ХПИ», 2007. – 159 с. 2. Омеляненко В.И., Кривякин Г.В., Якунин Д.И., Редченко Е.С. Поезда с наклоняемыми кузовами для скоростного пассажирского движения. // Локомотив-информ. – 2008. - №5. – С.12-17. 3. Persson R. Tilting trains. Description and analysis of the present situation. Literature study. – Stockholm, КТН. – 2006. – 94 p. 4. Forstberg J. Ride comfort and motion sickness in tilting trains: Doctoral thesis. – Stockholm, КТН. – 2000. – p. 5. Масшев В.Г., Ананьев А.Д. Математическая модель движения по рельсовому пути колесно-моторного блока с упругим опорно-центровым приводом // Вестник ХПИ. Локомотивостроение. – Харьков, 1997. – №134., Вып.3. – С.8-13. 6. Блейхер А.И., Куценко С.М. неустановившееся движение локомотива в кривой с неровностями в плане // Вестник ХПИ. Локомотивостроение. – Харьков, 1972. – №65., Вып.2. – С.12-24. 7. Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Часть вторая. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 484с.

Надійшла до редколегії 15.12.11