

Г.О. АНИЩЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Ю.В. РОМАШОВ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В статті розглянуто побудову числових розв'язків для різноманітних математичних формулювань задач теорії повзучості. Представлені числові розв'язки плоскої задачі теорії повзучості, що одержані методом скінченних елементів та методом Бубнова-Гальоркіна з використанням R-функцій. Досліджено достовірність одержаних числових розв'язків, показані перерозподіл напружень та параметру пошкоджуваності в умовах повзучості.

В статье рассмотрено построение численных решений для различных математических формулировок задач теории ползучести. Представлены численные решения плоской задачи теории ползучести, полученные методом конечных элементов и методом Бубнова-Галеркина с использованием R-функций. Исследована достоверность полученных численных решений, показаны перераспределение напряжений и параметра повреждаемости в условиях ползучести.

This article deals with numerical solutions constructing for different mathematical formulations of creep problem. Numerical solutions for creep plane problem obtained using finite element method and Galerkin-Bubnov method with R-functions are presented. Obtained numerical solutions reliability is investigated, stresses and damage parameter redistributions due to creep are shown.

Введение. Под ползучестью в простейшем случае понимают постепенное накопление необратимой (пластической) деформации, которое заметно проявляется при сочетании высоких механических нагрузок и температур, достигающих 35-70% абсолютной температуры плавления [1] и приводит к существенному перераспределению полей напряженно-деформированного состояния в твердых телах даже при стационарных нагрузках. Актуальность проблем ползучести обусловлена их инженерными приложениями, связанными с улучшением эксплуатационных характеристик машин за счет увеличения температуры и механических напряжений (рабочего давления, частоты вращения и т. п.) [1]. Нелинейность уравнений состояния тел при ползучести заставляет обращаться к численным решениям задач теории ползучести.

Анализ последних исследований и формулировка целей статьи. Численные решения задач теории ползучести в современных исследованиях [2-5] рассматриваются применительно к используемым там частным математическим формулировкам и на основе выбранных частных схем дискретизации (часто – метода конечных элементов). Используемые математические формулировки различаются выбором локальной [5] и вариационной формы [2-4]; пространства состояний: в перемещениях [2-4], в смешанной форме [5]; представлением напряженно-деформированного состояния либо самими искомыми величинами [4, 5], либо их скоростями [2, 3]. Алгоритмизация построения численных решений для задач теории ползучести в литературе практически не обсуждается, хотя обсуждается для других задач, например

для задач теплопроводности, что позволяет обеспечивать эффективность счета и использовать методически однотипные алгоритмы для достижения структурной простоты программ [6]. Целью данной статьи является изучение общих подходов к построению численных решений для задач теории ползучести.

Постановки задачи теории ползучести. Далее рассматриваем задачи ползучести для тела, которое занимает область объемом Υ с граничной поверхностью ν в случае малых деформаций, статических нагрузок, однородного стационарного температурного поля, полных деформаций в виде суммы обратимых упругих и необратимых деформаций ползучести; для упругих деформаций принимаем закон Гука; материал тела считаем однородным изотропным. Следуя методу Лагранжа, точки тела индивидуализируем в начальном состоянии, отвечающем моменту времени $t = 0$, и рассматриваем моменты времени $t \geq 0$ с использованием декартовых прямоугольных координат x_k ; все нижние индексы, значения которых отдельно не оговорены, принимают последовательно значения 1, 2, 3; по повторяющимся нижним индексам подразумевается суммирование. Формулировка задачи теории ползучести включает описание напряженно-деформированного состояния при упругом деформировании с учетом деформаций ползучести и описание закона изменения во времени деформаций ползучести, что для полного пространства состояний в рамках принятых допущений записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + c_{ij}, \quad e_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \\ u_i = \tilde{u}_i \quad \forall x_k \in \nu_u, \quad \sigma_{ij}n_j = p_i \quad \forall x_k \in \nu_p, \quad (1)$$

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{c}}{\sigma^{(c)}} s_{ij}, \quad \dot{c} = \dot{c}(c_{ij}, \omega, q_1, q_2, \dots; \sigma^{(c)}), \quad \sigma^{(c)} = \sigma^{(c)}(\sigma_{ij}), \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad c_{ij}(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\omega, q_1, q_2, \dots, c_{ij}; \sigma^{(\omega)}), \quad \sigma^{(\omega)} = \sigma^{(\omega)}(\sigma_{ij}), \quad \omega(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon, \\ \dot{q}_s = \dot{q}_s(\omega, q_1, q_2, \dots, c_{ij}; \sigma^{(s)}), \quad \sigma^{(s)} = \sigma^{(s)}(\sigma_{ij}), \quad \dot{q}_s(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon. \quad (3)$$

Здесь $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$; $u_i = u_i(x_k, t)$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t)$ – компоненты перемещений и напряжений; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t)$, $e_{ij} = e_{ij}(x_k, t)$ и $c_{ij} = c_{ij}(x_k, t)$ – компоненты деформаций: полных, упругих и ползучести; $f_i = f_i(x_k)$ – заданные компоненты объемных сил, $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x_k)$ – заданные компоненты перемещения в точках поверхности $\nu_u \subset \nu$; $p_i = p_i(x_k)$ – заданные компоненты поверхностных сил в точках поверхности $\nu_p \subset \nu$; n_j – компоненты внешней единич-

ной нормали к поверхности тела; a_{ijkl} – упругие постоянные материала тела; $\dot{c}_{ij} \equiv \partial c_{ij} / \partial t$; $\sigma^{(c)}$ – контролирующие скорость ползучести эквивалентные напряжения; $\omega = \omega(x_k, t)$ – параметр повреждаемости и $q_s = q_s(x_k, t)$, $s = 1, 2, \dots$ – другие параметры состояния, характеризующие накопление повреждений на микро-уровне и другие изменения на уровне структуры материала [7]; $\sigma^{(\omega)}$ и $\sigma^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots$ – эквивалентные напряжения, контролирующие скорость параметра повреждаемости и других параметров состояния. Кинетические уравнения (2), (3) для деформаций ползучести, параметра повреждаемости и других параметров состояния устанавливаются по результатам испытаний образцов в условиях ползучести вплоть до разрушения. Интегрирование по времени уравнений (1) – (3) выполняется вплоть до завершения этапа нелокализованного разрушения и образования локализованного дефекта (трещины), что устанавливает условием

$$\omega(x_k^*, t^*) = 1, \quad (4)$$

где t^* – время образования и x_k^* – координаты локализованного дефекта, причем для моментов времени $t > t^*$ поведение рассматриваемого тела нельзя адекватно описать уравнениями (1) – (3), поскольку в них не учитывается наличие локализованных дефектов, например трещин.

Для алгоритмизации численного решения некоторого класса задач целесообразно располагать его единообразной математической формулировкой [6]. Различие между записями формулировок задач теории ползучести в разных пространствах состояний при алгоритмизации их численного решения устраняется использованием понятия *оператора краевой задачи* [8]. Для этого введем вектор $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) \in R^N$, $N = N^{(1)}$, содержащий параметры напряженно-деформируемого состояния (перемещения, деформации полные и упругие, напряжения), $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)}(x_k, t) \in R^N$, $N = N^{(2)}$, содержащий деформации ползучести, $\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{(3)}(x_k, t) \in R^N$, $N = N^{(3)}$, содержащий параметр повреждаемости и другие параметры состояния. Тогда задача теории ползучести (1)–(3) примет следующий вид:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu, \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}; \mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(2)}(x_k, 0) = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)} = \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(3)}(x_k, 0) = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \Upsilon. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$ – линейные операторы и $\mathbf{f}^{(1)}$ – вектор, отвечающие дифференциальным уравнениям, а $\mathbf{L}$ – линейный оператор и $\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}$ – вектор, отве-

чающие граничным условиям (1). Вектор $\mathbf{f}^{(2)}$ отвечает уравнениям состояния при ползучести (2), а вектор $\mathbf{f}^{(3)}$ – кинетическим уравнениям для параметра повреждаемости и других параметров состояния (3). Выбор частного пространства состояний уменьшает число компонент вектора $\mathbf{u}^{(1)}$ и соответствующим образом видоизменяет операторы краевой задачи (5).

Вместо локальной формулировки краевой задачи (5) можно использовать ее эквивалентную вариационную формулировку, которую удобно представить в виде вариационного равенства с учетом главных условий, представляющих, как правило, часть граничных условий (5):

$$\int_{\Upsilon} \delta \mathbf{u}^{(1)T} \left(\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \mathbf{u}^{(1)T} \left(\mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}^{(1)} - \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_m \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu_m, \quad (9)$$

где учтено, что $\nu = \nu_m \cup \nu_n$, $\nu_m \cap \nu_n = \emptyset$; $\mathbf{L}_n$, $\mathbf{L}_m$ – операторы и $\tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)}$, $\tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)}$ – векторы, отвечающие естественным и главным граничным условиям.

Уравнения (5) – (7) наглядно показывают, что задача теории ползучести представляет собой две связанные математически различные задачи: краевую и начальную. Краевая задача описывает напряженно-деформированное состояние тела с учетом деформаций ползучести, а начальная – изменение во времени деформаций ползучести, параметра повреждаемости и внутренних структурных параметров с учетом текущего напряженного состояния. Единообразную математическую формулировку задачи теории ползучести можно получить дифференцированием по времени обеих частей уравнения (5) и представлением его в скоростях напряженно-деформированного состояния:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_k, 0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \nu, \\ \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu, \quad (10)$$

где $\mathbf{u}_0^{(1)}$ – поле вектора $\mathbf{u}^{(1)}$ (напряженно-деформированного состояния) в начальный момент времени $t = 0$, которое отвечает упругому деформированию тела при отсутствии деформаций ползучести.

Замена краевой задачи (5) начально-краевой задачей (10) позволяет представить задачу теории ползучести (5) – (7) в эквивалентной форме (10), (6), (7). Вместо начально-краевой задачи (10) можно использовать ее эквивалентную вариационную формулировку, которая в вариациях с учетом главных и естественных граничных условий примет следующий вид:

$$\int_{\Upsilon} \delta \dot{\mathbf{u}}^{(1)T} \left(\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \dot{\mathbf{u}}^{(1)T} \left(\mathbf{L}_n \cdot \dot{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0, \\ \int_{\Upsilon} \delta \mathbf{u}_0^{(1)T} \left(\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \mathbf{u}_0^{(1)T} \cdot \left(\mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} - \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0. \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_m \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_m \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu_m. \quad (12)$$

Одна из простейших теорий ползучести, в которой повреждаемость и другие параметры состояния не рассматриваются, а скорость деформаций ползучести зависит только от напряжений, приводит к равенству $\dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(1)})$.

Это позволяет, если задача о напряженно-деформированном состоянии представлена в форме (10), исключить из рассмотрения при формулировке задач теории ползучести деформации ползучести, представленные вектором $\mathbf{u}^{(2)}$:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = -\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_k, 0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \nu, \\ \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu. \quad (13)$$

В случае, когда напряженно-деформированное состояние описывается краевой задачей (5), то деформации ползучести не могут быть исключены из рассмотрения даже при использовании рассмотренной простейшей теории ползучести.

Построение численных решений. Алгоритмизация построения численных решений для задачи теории ползучести существенно зависит от выбора вида (5) – (7) или (8), (9), (6), (7) или (10), (6), (7) или (11), (12), (6), (7) ее математической формулировки. Вначале построим численное решение задачи теории ползучести, сформулированной в виде (11), (12), (6), (7). Для решения задачи (11), (12) поля напряженно-деформированного состояния представим аппроксимациями, тождественно удовлетворяющими главным условиям (12):

$$\mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) = \mathbf{u}_v^{(1)}(x_k) + \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \quad \delta \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) = \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \delta \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \quad (14)$$

где $\mathbf{u}_v^{(1)}$ – вектор, продлевающий заданные граничные значения внутрь области тела; n – число аппроксимирующих функций; $\mathbf{U}_n^{(1)}$ – матрица, составленная из принятых аппроксимирующих функций; $\mathbf{a}_n^{(1)}$ – вектор, составленный из подлежащих определению коэффициентов аппроксимаций.

В зависимости от выбора аппроксимирующих функций можно реализовывать различные схемы дискретизации [9]. Примерами могут служить классический *метод Рунца*, отвечающий случаю, когда аппроксимирующие функции определены во всей области Υ тела, а также метод конечных элементов – когда аппроксимирующие функции не равны нулю только в локальных подобластях, на которые разбита область Υ тела, а коэффициенты аппроксимаций имеют смысл узловых значений. Подстановка аппроксимаций (14) в равенства (11) с учетом независимости вариаций $\delta \mathbf{a}_n^{(1)}$ приведет к системам уравнений

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(1)} = - \int_{\Upsilon} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \right) d\Upsilon, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{n0}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n0}^{(1)} &\equiv \mathbf{a}_n^{(1)}(0); \quad \mathbf{A}_n^{(1)} = \int_{\Upsilon} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{U}_n^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{L}_n \cdot \mathbf{U}_n^{(1)} \right) d\nu; \\ \mathbf{f}_n^{(1)} &= \int_{\Upsilon} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_\nu \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} - \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}_\nu^{(1)} \right) d\nu. \end{aligned}$$

Интеграл из системы уравнений (15) представляем в виде квадратуры

$$\int_{\Upsilon} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right) d\Upsilon \approx \sum_{i=1}^Q w^{(i)} \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \left(\xi_k^{(i)} \right) \right)^T \cdot \left(\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \left(\xi_k^{(i)} \right) \right), \quad (17)$$

где Q – число, $w^{(i)}$ – весовые коэффициенты и $\xi_k^{(i)}$ – координаты узлов используемой квадратурой формулы [10].

Уравнения (6), (7) интегрируем в узлах квадратурной формулы (17):

$$\dot{\mathbf{u}}^{(2)} \left(\xi_k^{(i)} \right) = \mathbf{f}^{(2)} \left(\mathbf{u}^{(2)} \left(\xi_k^{(i)} \right), \mathbf{u}^{(3)} \left(\xi_k^{(i)} \right); \mathbf{u}^{(1)} \left(\xi_k^{(i)} \right) \right), \quad \mathbf{u}^{(2)} \left(\xi_k^{(i)}, 0 \right) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)} \left(\xi_k^{(i)} \right) = \mathbf{f}^{(3)} \left(\mathbf{u}^{(3)} \left(\xi_k^{(i)} \right), \mathbf{u}^{(2)} \left(\xi_k^{(i)} \right); \mathbf{u}^{(1)} \left(\xi_k^{(i)} \right) \right), \quad \mathbf{u}^{(3)} \left(\xi_k^{(i)}, 0 \right) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, Q$. Таким образом, решение задачи теории ползучести сведено к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (15) – (19). В результате на шагах интегрирования по времени получают поля напряженно-деформированного состояния, а также значения деформаций ползучести и параметра повреждаемости в узлах квадратурных формул и, кроме этого, возможно, в других, наперед заданных, точках тела. Рассмотренная схема (15) – (19) алгоритмизации построения численного решения для задач теории ползучести с некоторыми видоизменениями применяется в большинстве исследований. Определение момента времени t^* и координат x_k^* образования локализованного дефекта из условия (4) с высокой точностью требует вычисления деформаций ползучести и параметра повреждаемости в достаточно большом числе наперед заданных точек тела.

Рассмотрим решение задачи теории ползучести, представленной в локальной форме (5) – (7) с использованием взвешенных невязок [9] и структурного метода теории R-функций [11], как это сделано в работе [5]. Для этого представим неизвестные задачи в виде тождественно удовлетворяющих всем граничным условиям (5) структур решений [11]

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \left(\Phi^{(1)}, \Upsilon, \nu, \mathbf{L}, \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \right), \quad \mathbf{u}^{(2)} = \Phi^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \Phi^{(3)}, \quad (20)$$

с неопределенными компонентами $\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}(x_k, t)$, $\Phi^{(2)} = \Phi^{(2)}(x_k, t)$ и $\Phi^{(3)} = \Phi^{(3)}(x_k, t)$ в виде аппроксимаций по системам базисных функций про-

пространственных координат с зависящими от времени коэффициентами

$$\Phi^{(s)}(x_k, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i^{(s)}(x_k) \cdot a_i^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Здесь – $a_i^{(s)}(t)$ и $\phi_i^{(s)}(x_k)$, $s = 1, 2, 3$ – коэффициенты аппроксимаций и базисные функции, являющиеся элементами содержащих $\Phi^{(s)}$ функциональных пространств [11]. В случае линейных операторов граничных условий подстановка аппроксимаций (21) в структуры решений (20) приведет к выражениям в виде линейных комбинаций коэффициентов аппроксимаций [11], которые представим в матрично-векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) &= \mathbf{u}_v^{(1)}(x_k) + \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \\ \mathbf{u}^{(2)}(x_k, t) &= \mathbf{U}_n^{(2)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}(t), \quad \mathbf{u}^{(3)}(x_k, t) = \mathbf{U}_n^{(3)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{U}_n^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$ – матрицы пробных функций, составленные из множителей при коэффициентах $a_i^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$ в структурах решений (20) после подстановки в них аппроксимаций (21); $\mathbf{a}_n^{(s)} = \begin{pmatrix} a_1^{(s)} & a_2^{(s)} & \dots & a_n^{(s)} \end{pmatrix}^T$, $s = 1, 2, 3$.

Аппроксимации (22) удовлетворяют граничным условиям (5) и будут удовлетворять начальным условиям (6), (7), для коэффициентов аппроксимаций, удовлетворяющих начальным условиям

$$\mathbf{a}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_n^{(3)}(0) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Для определения коэффициентов аппроксимаций *методом взвешенных невязок* представим аппроксимации (22) в матрично-векторной форме и дифференциальные уравнения (5) – (7) одним уравнением [5]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{a}_n, \quad (24)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_v^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n^{(1)} \\ \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \mathbf{a}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (26)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}; \mathbf{u}^{(1)}) \\ \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{u}^{(1)}) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $\mathbf{I}^{(2)}$, $\mathbf{I}^{(3)}$ – тождественные и $\mathbf{0}$ – нулевые матричные операторы, размерности которых определяются размерностями векторов $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ и $\mathbf{u}^{(3)}$.

Подставим аппроксимации (24) в дифференциальное уравнение (26) и, следуя методу взвешенных невязок, воспользуемся условием ортогональности невязки выполнения этого уравнения к проверочным функциям [11]:

$$\int_Y \mathbf{V}_n \cdot [\mathbf{K} \cdot (\mathbf{U}_n \cdot \dot{\mathbf{a}}_n) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_v + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{a}_n)] dY = 0. \quad (28)$$

Здесь $\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n)$ – матрица, составленная из проверочных функций, являющихся линейно независимыми элементами пространства, сопряженного к содержащему элемент $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ пространству. Условие (28) может рассматриваться как обобщенное представление различных численных методов, различающихся выбором пробных и проверочных функций [9]. При использовании локальных пробных и проверочных функций метод взвешенных невязок (27) эквивалентен методу конечных элементов [9]. Если использовать глобальные пробные функции, а проверочные функции выбрать в виде $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n^T$, то условие ортогональности (28) будет отвечать классическому методу Бубнова-Галеркина [9], который, как в работе [5], после подстановки матриц (25), (27) в условие (28), с учетом линейности операторов приведет к алгебраическим и дифференциальным уравнениям

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)} + \mathbf{A}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)} = \mathbf{f}_n^{(1)}, \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_n^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(2)} = \mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(1)}), \quad \mathbf{a}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_n^{(3)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(3)} = \mathbf{f}_n^{(3)}(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(1)}), \quad \mathbf{a}_n^{(3)}(0) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где матрицы и векторы вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{A}_n^{(s)} = \int_Y \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{A}^{(s)} \cdot \mathbf{U}_n^{(s)} \right) dY, \quad s = 1, 2; \quad \mathbf{f}_n^{(1)} = \int_Y \left(\mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left(\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_v \right) dY,$$

$$\mathbf{K}_n^{(s)} = \int_Y \left(\mathbf{U}_n^{(s)} \right)^T \cdot \mathbf{U}_n^{(s)} dY, \quad s = 2, 3,$$

$$\mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)}) = \int_Y \left(\mathbf{U}_n^{(2)} \right)^T \cdot \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{U}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{U}_n^{(3)} \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}; \mathbf{u}_v^{(1)} + \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}) dY,$$

$$\mathbf{f}_n^{(3)}(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)}) = \int_Y \left(\mathbf{U}_n^{(3)} \right)^T \cdot \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{U}_n^{(3)} \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{U}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{u}_v^{(1)} + \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}) dY.$$

При помощи уравнения (29) можно представить вектор $\mathbf{a}_n^{(1)}$ в виде соотношения

$$\mathbf{a}_n^{(1)}(\mathbf{a}_n^{(2)}) = \left(\mathbf{A}_n^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{f}_n^{(1)} - \mathbf{A}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)} \right). \quad (32)$$

Соотношение (32) позволяет исключить вектор $\mathbf{a}_n^{(1)}$ из уравнений (30), (31) и в результате получить задачу Коши в канонической форме:

$$\dot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_n), \quad \mathbf{y}_n(0) = \mathbf{0}. \quad (33)$$

Здесь

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \mathbf{a}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_n) = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{K}_n^{(2)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_n^{(2)} \left(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(1)} \left(\mathbf{a}_n^{(2)} \right) \right) \\ \left(\mathbf{K}_n^{(3)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_n^{(3)} \left(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(1)} \left(\mathbf{a}_n^{(2)} \right) \right) \end{pmatrix}.$$

Решение задач теории ползучести по схеме (20) – (33) за счет использования аналитических аппроксимаций позволяет определять деформации ползучести и параметр повреждаемости в любой точке тела, причем число уравнений в разрешающей задаче Коши (33) определяется количеством аппроксимирующих функций. При решении задач теории ползучести по схеме (15) – (19) относительно узловых значений число уравнений в разрешающей задаче Коши (18), (19) определяется числом точек, в которых вычисляются деформации ползучести, параметр повреждаемости и другие параметры состояния. Точное определение момента времени t^* и координат x_k^* образовавшегося локализованного дефекта из условия (4) требует вычисления параметра повреждаемости в большом числе точек тела, так что число уравнений задачи Коши (18), (19) может оказаться большим числа уравнений задачи Коши (33). При построении численного решения задач теории ползучести по схеме (15) – (19) напряженно-деформированное состояние определяется путем интегрирования по времени с накоплением погрешностей на шагах интегрирования. В случае численного решения по схеме (20) – (33) погрешности пошагового интегрирования накапливаются только для деформаций ползучести, параметра повреждаемости и других параметров состояния, а напряженно-деформированное состояние определяется при этом путем решения системы линейных алгебраических уравнений (32). Отмеченные обстоятельства позволяют говорить о некоторых преимуществах построения численных решений по схеме (20) – (33) перед построением численных решений по схеме (15) – (19).

Пример численного решения задачи теории ползучести. Рассмотрим в декартовых координатах Ox_1x_2 плоскую начально-краевую задачу теории ползучести для квадратной пластины с длиной стороны $2a = 16$ мм, которая растягивается поверхностными силами $p = p(x_2)$, приложенными на краях $x_1 = \pm a$ и распределенными по параболическому закону (рис. 1)

$$p(x_2) = S \left(1 - (x_2/b)^2 \right), \quad (34)$$

где $S = 300$ МПа – заданное максимальное напряжение в сечениях $x_1 = \pm a$.

В качестве материала пластины примем сталь ЭИ-481, для которой: модуль упругости $E = 1,25 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, а скорость ползучести при температуре 700°C описывается с учетом повреждаемости материала в виде [3]:

$$\dot{c} = \dot{c}(\omega; \sigma^{(c)}), \quad \dot{c}(\omega; \sigma^{(c)}) = B \left(\frac{\sigma^{(c)}}{1 - \omega} \right)^n, \quad B = 8.98 \cdot 10^{-15} \text{ МПа}^{-n} / \text{ час}, \quad n = 4, 12,$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\omega; \sigma^{(\omega)}), \quad \dot{\omega}(\omega; \sigma^{(\omega)}) = A \left(\frac{\sigma^{(\omega)}}{1 - \omega} \right)^k, \quad A = 1, 11 \cdot 10^{-25} \text{ МПа}^{-k} / \text{ час}, \quad k = 8, 97,$$

где $\sigma^{(c)} = \sigma^{(\omega)} = \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)}$ – интенсивность напряжений.

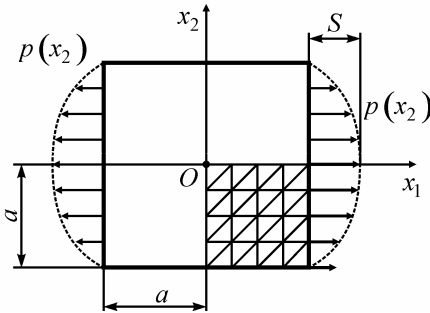


Рисунок 1 – Пластина и фрагмент конечно-элементной сетки с приведением нагрузки к ее узлам.

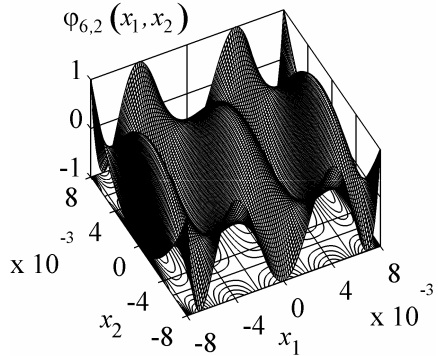


Рисунок 2 – Поверхность значений построенной на основе полиномов Чебышева одной из двумерных функций, использующейся в аппроксимации параметра повреждаемости.

Приближенные решения задач теории ползучести для такой пластины получены двумя способами. Во-первых, как в работе [3], при помощи специально созданного программного обеспечения методом конечных элементов (фрагмент сетки и приведение нагрузки к узлам показаны на рис. 1) на основе вариационной постановки в перемещениях по схеме (15) – (19) с интегрированием задачи Коши *методом прогноза-коррекции*. Во-вторых, как в работе [5], при помощи специально созданного программного обеспечения на основе методов теории R-функций и Бубнова-Галеркина по схеме (20) – (33) с описанием напряженно-деформированного состояния в перемещениях и напряжениях и решением задачи Коши методом Рунге-Кутты в модификации с переменным шагом интегрирования, предложенной *Мерсоном*. В последнем случае интегрирование в области пластины осуществлялось по *квадратурным формулам Гаусса*, а в качестве аппроксимирующих функций неопределенных компонент структур решения использовались произведения специально выбираемых с учетом симметрии задачи *полиномов Чебышева* [12]

$$\varphi_{i,j}(x_1, x_2) = T_i(x_1) \cdot T_j(x_2). \quad (35)$$

Здесь T_i – полином Чебышева степени i . С учетом симметрии задачи в аппроксимациях, например, параметра повреждаемости $i, j = 0, 2, 4, \dots, 2(n-1)$; одна из аппроксимирующих функций (35), используемая в аппроксимациях параметра повреждаемости, показана на рис. 2.

Для получаемых описанными двумя методами приближенных решений задачи ползучести, отвечающих упругому деформированию в момент времени $t = 0$, установлено соответствие с решениями задачи о числу упругом деформировании пластины, полученными в работах [13], [14]. Это позволяет говорить о достоверности решения задачи теории ползучести, отвечающего моменту времени $t = 0$. Достоверность решения задачи теории ползучести в моменты времени $t > 0$ устанавливалась сходимостью получаемых методом Бубнова-Галеркина приближенных решений и их сопоставлением с приближенным решением, полученным методом конечных элементов, что иллюстрируется рис. 3.

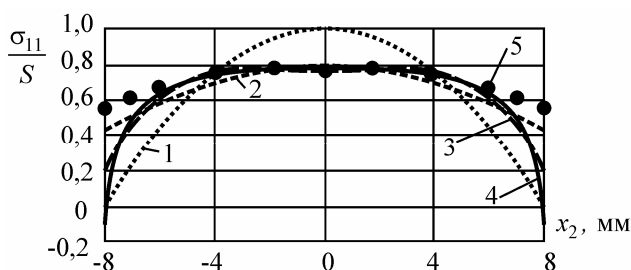


Рисунок 3 – Решения для напряжения σ_{11} в сечении $x_1 = a/2$ в момент времени $t = 150$ час, полученные методом Бубнова-Галеркина для разного числа аппроксимирующих функций: 1 – $n = 1$, 2 – $n = 2$, 3 – $n = 3$, 4 – $n = 14$, и решение, полученное при помощи метода конечных элементов – маркеры 5.

Расчеты показали сходимость с увеличением числа аппроксимирующих функций получаемых методом Бубнова-Галеркина приближенных решений; начиная с числа $n = 6$ аппроксимирующих функций, приближенные решения не различаются в масштабе рис. 3. Установлено различие приближенного решения, получаемого методом Бубнова-Галеркина (рис. 3, кривая 4), и получаемого методом конечных элементов (рис. 3, маркеры 5) около точек $x_2 = \pm a$, что можно объяснить двумя причинами. Во-первых, полученное методом конечных элементов решение на сетке рис. 1, по-видимому, имеет более высокую погрешность аппроксимации, чем решение, полученное методом Бубнова-Галеркина для $n = 14$ аппроксимирующих функций. В пользу этого говорит то обстоятельство, что полученное методом конечных элементов решение (рис. 3, маркеры 5) более близко к решению метода Бубнова-Галеркина с более высокой погрешностью аппроксимации для числа $n = 2$ (рис. 3, кривая 2). Во-вторых, решение методом конечных элементов при-

ближенно удовлетворяет граничным условиям: в точках с $x_2 = \pm a$ растягивающие напряжения не равны нулю (рис. 1) и именно около этих точек имеет место заметное различие получаемых решений. Полученные результаты позволяют говорить о достоверности получаемых численных решений задачи теории ползучести.

Рассмотрим далее некоторые закономерности ползучести, установленные на основе анализа результатов, представленных на рис. 4 и рис. 5, полученных методом Бубнова-Галеркина с числом $n=14$ аппроксимирующих функций.

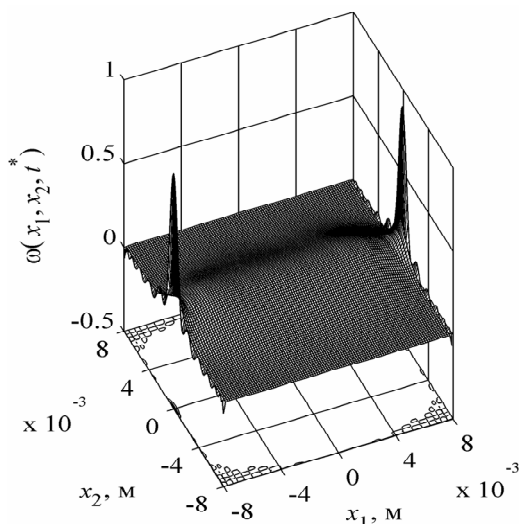


Рисунок 4 – Значения параметра повреждаемости в точках пластины в момент времени $t = t^*$.

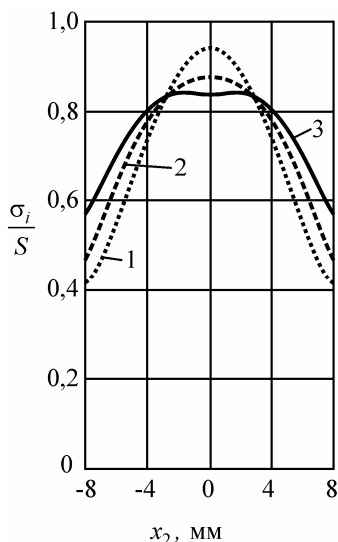


Рисунок 5 – Интенсивность напряжений в точках центрального сечения $x_1 = 0$ пластины в моменты времени 1 – $t = 0$, 2 – $t = 24$ час и 3 – $t = t^*$.

При решении задачи ползучести с использованием условия (4) установлено время $t^* \cong 152,39$ час до завершения этапа нелокализованного разрушения пластины и образования локализованного дефекта. Анализ поля повреждаемости (рис. 4) показывает, что в пластине следует ожидать образование в момент времени $t = t^*$ двух макроскопических дефектов вследствие ползучести, причем эти дефекты будут расположены в окрестности точек пластины с координатами $x_1 = \pm a$, $x_2 = 0$. Заметное перераспределение напряжений с течением времени вследствие ползучести, которое имеет место даже при стационарной нагрузке, иллюстрируется рис. 5.

Перспективы дальнейших исследований. Разработанные общие подходы к построению численных решений задач теории ползучести позволяют рассматривать задачи более сложные, чем в рассмотренном примере. Можно рассматривать, например, задачи ползучести для тел сложной формы, однако для дальнейших исследований более перспективными с точки зрения реализации возможностей предложенных подходов являются практически отсутствующие в литературе задачи теории ползучести с несколькими, кроме параметра повреждаемости, параметрами состояния.

Выводы. В статье рассмотрено построение численных решений для различных математических формулировок задач теории ползучести. Для плоской задачи теории ползучести получены методом конечных элементов и методами Бубнова-Галеркина и R-функций численные решения. Исследована достоверность полученных решений и установлено, что погрешности при приближенном удовлетворении силовых граничных условий могут существенно влиять на решение задачи теории ползучести. Показаны перераспределения параметра повреждаемости и напряжений в условиях ползучести.

Список литературы: 1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. анализ, предсказание, предотвращение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с. 2. Золочевський О. О., Рвачов В. Л., Скелупс С. М. Повзучість пластин неканонічної форми з асиметрією властивостей // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 67–74. 3. Анищенко Г. О., Бреславский Д. В., Морачковский О. К. Влияние циклического нагружения на ползучесть и длительную прочность пластин с отверстиями // Доповіді НАН України. – 1998. – № 8. – С. 59–64. 4. Баженев В. А., Гуляев А. И., Пискунов С. О., Шкрыль А. А. Определение ресурса лопатки газовой турбины в условиях ползучести на основе континуальной механики разрушения // Проблемы прочности. – 2006. – № 4. – С. 87–71. 5. Морачковский О. К., Ромашов Ю. В. К решению начально-краевых задач теории ползучести // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 33–44. 6. Расчет на ЭВМ температурных полей в твердых телах с подвижными границами // Калютин А. И., Мосин Е. Ф., Соковишин Ю. А., Энтин Е. П. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с. 7. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. – М.: Наука, 1987. – 80 с. 8. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физике. – М.: Наука, 1970. – 542 с. 9. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с. 10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с. 11. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 832 с. 13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 576 с. 14. Meleshko V. V. Equilibrium of Elastic Rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett Solution Revisited // Journal of Elasticity. – 1995. – 40. – P. 207–238.

Поступила в редколлегию 07.01.12