

**В.М. БУРЛАЄНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»,  
**О.К. МОРАЧКОВСЬКИЙ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХП»

## **СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТІЛА З ТРІЩИНОЮ, БЕРЕГИ ЯКОЇ КОНТАКТУЮТЬ**

В роботі розглянутий теоретичний підхід щодо скінченноелементного моделювання нелінійної динаміки тіла з тріщиною. Континуальна модель описує коливання тіла у лінійній постановці, та нелінійну поведінку берегів тріщини у контакті. Такий підхід дає можливість досліджувати локалізовані ефекти близько до кінця тріщини. Принцип Гамільтона та тривимірна теорія пружності використовуються у рамках континуальної механіки деформованого тіла щодо конструювання моделі. Модель передбачає малі деформації та матеріальну лінійність. Задача пружнодинаміки сформульована на базі метода скінчених елементів на явній схемі інтегрування за часом. Метод штрафу застосовано у моделюванні контактної взаємодії берегів тріщини.

В работе рассмотрен теоретический подход для конечноэлементного моделирования нелинейной динамики тела с трещиной. Континуальная модель описывает линейные колебания тела и нелинейное поведение границ трещины при контакте. Такой подход даёт возможность исследовать локальные эффекты в области конца трещины. Принцип Гамильтона и трёхмерная теория упругости используется в рамках континуальной механики деформированного тела для построения модели. Модель предусматривает малые деформации и материальную линейность. Задача упругодинамики сформулирована на базе метода конечных элементов с использованием явной схемы интегрирования по времени. Метод штрафа использован для моделирования контактного взаимодействия границ трещины.

A theoretical approach for finite element modeling of nonlinear dynamics of a body with a crack is considered. The model includes coupling between linear vibrations and nonlinear contact phenomenon that allow examining the localized effects in the vicinity of the crack tip. The derivation of the model is carried out within Continuum Mechanics' principles. Hamilton's variation principle and three-dimensional elasticity theory are exploited. The governing equations involve assumptions of small deformations and a material linear elasticity. The electrodynamics problem is formulated based on the finite element method with the explicit time integration scheme for the solution in time. Using the penalty approach is used to impose normal contact constraints onto contactable surfaces.

**Вступ.** Як показано у роботі [1] задача нелінійного динамічного аналізу є важливою сучасною науковою проблемою. Ця задача не відноситься до нової, її ранні дослідження датуються ХІХ століттям. Проте на даний час науковий інтерес до неї оновлений у зв'язку з необхідністю вирішення нових завдань, що враховують зв'язок між процесом коливання та, наприклад, контактом, тертям або руйнуванням. Подібні постановки задач обумовлені появою нових матеріалів, таких як композиційні. Ці матеріали, поряд з їх передовими властивостями по відношенню до звичайних металевих, мають нові типи пошкоджень, аналіз яких вимагає впровадження нових підходів.

У загальному випадку інженерного аналізу будь-яку механічну поведінку конструкції намагаються звести до її лінійної моделі. Так для лінійних коливань на сьогоднішній день розроблені численні та добре відомі методи і техніки структурного аналізу, які є стандартними процедурами більшості скінченноелементних пакетів прикладних програм, як вільно поширюваних,

так і комерційних [2]. Проте в задачах, де нелінійні ефекти є найбільш важливою частиною поведінки конструкції, значні труднощі в їх моделюванні ще існують на сучасний момент. Таким чином, розробка методів розв'язання задач динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують між собою, є одною з важливих цілей механіки суцільного середовища. Прямим інженерним застосуванням цієї задачі є динамічний аналіз панелі з багатошарового композиційного матеріалу, що має дефект при інтерфейсі між окремими шарами матеріалу [3].

Метою поточної статті є побудова загальної скінченноелементної моделі довільного тривимірного тіла з тріщиною, границі якої можуть взаємодіяти між собою за умов динамічної поведінки тіла. Передбачається, що побудована модель може бути легко адаптована в рамках відомих скінченноелементних комплексів, наприклад, таких як *ABAQUS*, *ANSYS*, *MSC. Nastran* та інші для конкретно вибраного об'єкту дослідження.

**Початково-крайова задача.** Коротко розглянемо загальні математичні аспекти задачі пружнодинаміки тіла з тріщиною. Тут і далі в статті ми використовуватимемо позначення, звичайні для літератури по континуальній механіці суцільних середовищ [4].

Розглянемо початкову конфігурацію тіла, як деякої області  $\Omega_0 \in \mathcal{R}^3$  і його межу, як деяку поверхню  $\Gamma^0 \in \mathcal{R}^2$ , рис. а. Враховуємо, що  $\Gamma_t^0 \cup \Gamma_u^0 = \Gamma^0$  та  $\Gamma_t^0 \cap \Gamma_u^0 = \emptyset$ , де  $\Gamma_t^0$  і  $\Gamma_u^0$  – це частини межи тіла із заданими зовнішнім поверхневим навантаженням і переміщеннями, відповідно.

Хай тіло містить зону внутрішнього розриву або тріщину, яка описується поверхнею  $\Gamma_c^0$ . Хай  $\tilde{\Omega}_0$  – це відкрита множина така, що виключає всі розриви, тобто  $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 \setminus \Gamma_c^0$ . У поточній конфігурації, початкові представлення області  $\Omega_0$  і  $\tilde{\Omega}_0$  замінюватимемо на  $\Omega$  і  $\tilde{\Omega}$ , відповідно. Аналогічно поступаем щодо інших позначень, пов'язаних з поточною конфігурацією області. Рух тіла описуватимемо функцією  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ , де  $t \in [0, T]$  – це час,

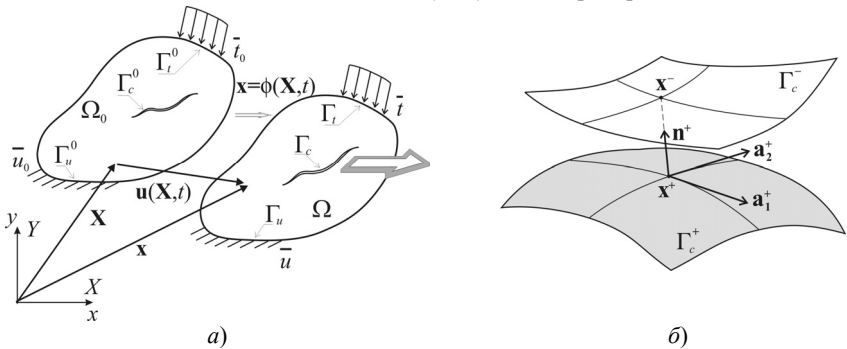


Рисунок – Тіло з тріщиною і його вид у початковій і поточній конфігураціях (а); береги тріщини, які контактують (б).

а  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{x}$  – матеріальна і просторова координати тіла, відповідно. При русі тіла переміщення його довільної матеріальної точки  $\mathbf{X}$  позначатимемо як  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ .

Передбачаємо, що деформації і повороти тіла малі, а також поведінка матеріалу тіла відповідає його деформуванню, що описується узагальненим *законом Гуку*. Тоді, загальна система рівнянь задачі у лагранжевому описі, яка включає рівняння руху, стану, геометричні співвідношення і задані крайові і початкові умови, має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \text{ для } \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ для } \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ для } \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad (3)$$

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{t}_i \text{ на } \Gamma_t \times [0, T], \quad (4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0 \text{ и } \mathbf{v}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_0 \text{ для } \Omega, \quad (6)$$

де  $\rho$  – щільність тіла;  $\mathbf{b}$  – масові сили;  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – тензори напруження і деформацій, відповідно.

Рівняння стану, що визначають взаємодію берегів тріщини, є функцією їх переміщень і контактних сил на них, тобто повинні мати вигляд

$$\mathfrak{N}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{t}_c^+, \mathbf{t}_c^-) = 0 \text{ на } \Gamma_c \times [0, T]. \quad (7)$$

Тут треба розрізнявати  $\Gamma_c^+$  і  $\Gamma_c^-$ , які передбачаються гладкими поверхнями та такими, що  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$ . На поверхнях визначимо: зовнішні нормалі  $\mathbf{n}^+$  і  $\mathbf{n}^-$ , переміщення  $\mathbf{u}^+(\mathbf{X}, t)$  і  $\mathbf{u}^-(\mathbf{X}, t)$  та контактний тиск  $\mathbf{t}_c^+(\mathbf{X}, t) = -\mathbf{t}_c^-(\mathbf{X}, t) = \mathbf{t}_c$ . У разі контакту, маємо поверхню  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ = \Gamma_c^-$ , на якій умови безперервності напружень повинні виконуватися, тобто

$$\sigma_{ji}^+ n_j^+ = \sigma_{ji}^- n_j^- = t_i^c \text{ для } \Gamma_c \times [0, T]. \quad (8)$$

Отже, рівняння (1-8) визначають строге формулювання початково-крайової задачі (ПКЗ) пружнодинаміки тіла з тріщиною. Конкретний вигляд закону (7), що визначає умови контакту берегів тріщини, залежить від припущення щодо їх нормальної і тангенціальної взаємодії.

**Контактна модель.** Нормальну взаємодію визначає умова непроникності берегів один в одного. Визначимо функцію проникнення  $g_N$  як у [5],

$$g_N \equiv (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = g_0 + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+, \quad (9)$$

де  $g_0 = (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{n}^+$  – початкове значення функції; точка  $\mathbf{x}^+$  є найближчою

до точки  $\mathbf{x}^-$ , відстань між ними знаходиться з рішення задачі на мінімум,  $\mathbf{n}^+$  - одинична зовнішня нормаль до  $\Gamma_c^+$ , яка є відновлена з  $\mathbf{x}^+$ .

Для того, щоб описати взаємодію поверхонь у горизонтальному напрямі введемо вектор-функцію  $\mathbf{g}_T$ , що визначає проекцію вектора  $(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-)$  на одиничні вектори  $\mathbf{a}_\alpha^+$ ,  $\alpha = 1, 2$  які тангенціальні до поверхні  $\Gamma_c^+$  (рис. б) і такі, що визначають напрямок нормалі:

$$\mathbf{n}^+ = \mathbf{a}_1^+ \times \mathbf{a}_2^+ / |\mathbf{a}_1^+ \times \mathbf{a}_2^+|.$$

Тоді тангенціальна функція  $\mathbf{g}_T$  буде визначена співвідношенням [5],

$$\mathbf{g}_T \equiv [(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+] \mathbf{a}_\alpha^+ = [(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+ + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+] \mathbf{a}_\alpha^+. \quad (10)$$

Тут і далі по тексту, якщо не обумовлене інше, потрібно розуміти підсумовування по індексу що повторюється.

У динамічному аналізі визначаються швидкості введених функцій:

$$\dot{g}_N = (\dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot \mathbf{n}^+, \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_v \mathbf{g}_T = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot (\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha), \quad (12)$$

де  $\mathbf{L}_v$  позначає похідну  $\mathbf{L}_i$  вектора-функції по напрямку вектора швидкості тангенціального руху.

Контактні сили  $\mathbf{t}_c$  на поверхні  $\Gamma_c$  можуть бути розкладені на нормальну  $t_N \mathbf{n}$ , де скаляр  $t_N$  визначає значення контактного тиску, а  $\mathbf{n}$  – це одинична нормаль в точці контакту, і тангенціальну  $\mathbf{t}_T$  складові такі, що

$$t_N = -\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{t}_T = -(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_c. \quad (13)$$

Використовуючи позначення, що введені раніше, умови непроникності можуть бути записані у формі критерію Куна-Такера з теорії оптимізації:

$$t_N \geq 0, \quad g_N \leq 0 \quad \text{та} \quad t_N g_N = 0. \quad (14)$$

У загальному випадку контактні пари на поверхні контакту мають два статуси – *злипання* і *ковзання*. Функція  $\mathbf{g}_T$  ненульова лише в ситуації ковзання, яке асоціюється з явищем тертя. Використовуючи закон Кулона у формі аналогічній з теорії пластичності [6], умови злипання і ковзання берегів тріщини набувають вигляду умов Куна-Такера:

$$\Phi(\mathbf{t}_T, t_N) = |\mathbf{t}_T| - \mu t_N \leq 0, \quad \mathbf{L}_v \mathbf{g}_T = \dot{\gamma} \mathbf{t}_T / |\mathbf{t}_T|, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0. \quad (15)$$

Отже, стан інтерфейсу (7) визначається нерівностями (14) і (15).

**Варіаційне формулювання.** Для розв'язання скінченноелементним методом (СЕМ) задачі, яка сформульована вище, необхідна її варіаційне формулювання. Спочатку визначимо клас просторів невідомих, які є кінематично допустимі функцій, що зазвичай використовуються у СЕМ [7]:

$$u_i(\mathbf{X}, t) \in U, U = \left\{ u_i \mid u_i \in C^0(\Omega), u_i = \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u \right\}. \quad (16)$$

Тоді простір варіацій цих функцій буде наступним:

$$\delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0, U_0 = \left\{ \delta u_i \mid \delta u_i \in C^0(\Omega), \delta u_i = 0 \text{ на } \Gamma_u \right\}. \quad (17)$$

Використовуючи *принцип Гамільтона* запишемо варіаційний функціонал, який в рамках даної задачі міститиме дві частини. Перша – це сума кінетичної і потенційної енергій тіла, а друга – відповідає вкладу контактної взаємодії берегів тріщини. Тоді, ПКЗ динаміки тіла з тріщиною еквівалентна наступній варіаційній задачі.

*Знайти такі функції  $u_i(\mathbf{X}, t) \in U \times [0, T]$ , що у будь-який момент часу  $t \in [0, T]$  приводять до стаціонарності функціонал*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_c} (t_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Відмітимо, якщо умови контакту (14) і (15), що накладаються на поверхню контакту  $\Gamma_c$ , виконуються точно, то контактний доданок в (18) не вносить вклад до загальної енергії. Проте, це можливо лише для точного рішення і не є обов'язковим для варіацій невідомих функцій. З іншого боку, оскільки умова непроникності приводить до нерівності  $t_N \delta g_N \geq 0$ , звідси варіаційна рівність (18) набуває форми варіаційної нерівності [8]:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega \geq \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma, \quad \forall \delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0. \quad (19)$$

Ця нерівність означає, що в задачі, де контактна взаємодія існує, одночасно заздалегідь невідоме ні поле переміщень, ні контактні сили, ні навіть контактні пари на взаємодіючих поверхнях. Вирішення варіаційних нерівностей типу (19) вимагає спеціальних методів, розвинених у варіаційному численні [7]. У літературі з контактної механіки найбільш використовувані є *метод штрафу, метод коефіцієнтів Лагранжа і модифікований метод Лагранжа* [5, 6], які в припущенні про те, що поверхня контакту в даний момент цілком відома, зводять варіаційну нерівність (19) до рівності (18). Остання може бути переписана у вигляді суми відповідних віртуальних робіт, що визначають фізичний сенс доданків в (18):

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{inert} - \delta P^{cont}(t_N, \mathbf{t}_T) = 0, \quad \forall \delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0, \quad (20)$$

де визначено віртуальну роботу внутрішніх сил, а також масових сил, зовнішніх поверхневих сил, інерційних сил і контактних сил.

**Скінченноелементна модель.** Скінченновимірна модель варіаційної

задачі (19) має бути сформульована для її вирішення методом СЕМ. Розбиваємо поточну область  $\Omega$  на відповідні елементи  $\Omega_e$  так, що  $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$ . Позначитимемо вузлові координати в поточній конфігурації через  $x_{iI}$ , де  $I = 1 \dots n_N$ . Тоді апроксимація невідомих переміщень функціями із скінченновимірному простору  $U^h \subset U$  виражається як

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_I(t) N_I(\mathbf{X}), \quad (21)$$

де  $N$  – загальне число вузлів в дискретній області;  $\mathbf{u}_I(t)$  – переміщення вузла  $I$  та  $N_I(\mathbf{X})$  – функції форми у вузлі  $I$ . Швидкості і прискорення підраховуються через *матеріальні похідні* від поля переміщень так, що:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}_I(t) N_I(\mathbf{X}), \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{u}}_I(t) N_I(\mathbf{X}). \quad (22)$$

Оскільки варіації невідомих функцій не залежать від часу, то їх апроксимація у скінченновимірному простору  $U_0^h \subset U_0$  може бути наступною:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \delta \mathbf{u}_I N_I(\mathbf{X}), \quad (23)$$

де  $\delta \mathbf{u}_I$  – вузлові віртуальні переміщення.

Підставляючи вирази для переміщень, швидкостей і прискорень невідомих функцій у варіаційну рівність (18), отримаємо його скінченновимірну форму. Оскільки ця рівність повинна виконуватися для будь-яких довільних  $\delta \mathbf{u}_I$  скрізь, окрім як на  $\Gamma_u$ , то у відповідність з рівністю (20) приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\mathbf{M}_{IJ} \ddot{\mathbf{u}}_J = \mathbf{f}_I^{ext} - \mathbf{f}_I^{int} - \mathbf{f}_I^{cont}(t_N, \mathbf{t}_T), \quad \forall I \notin \Gamma_u. \quad (24)$$

У випадку лінійної поведінки системи вектор вузлових внутрішніх сил знаходиться через *матрицю жорсткості*:

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} N_{I,j} \sigma_{ji} d\Omega = \int_{\Omega_0} N_{I,j} c_{ijkl} N_{J,l} J^0 d\Omega_0 u_{kJ} = K_{ikIJ} u_{kJ}. \quad (25a)$$

Вузлові зовнішні сили знаходяться як

$$f_{iI}^{ext} = \int_{\Omega} N_I \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_I \bar{t}_i d\Gamma. \quad (25b)$$

Інерційні вузлові сили обчислюються через *матрицю мас*

$$M_{ijIJ} \ddot{u}_J = f_{iI}^{inert} = \int_{\Omega} \rho N_I \ddot{u}_i d\Omega = \delta_{ij} \int_{\Omega_0} \rho_0 N_I N_J d\Omega_0 \ddot{u}_J. \quad (25c)$$

Виразення для обчислення вектора вузлових контактних сил залежить від методу використовуваного для накладення умови контакту для забезпечення існування варіаційної рівності (19). Наприклад, у разі методу штрафа і для контакту без врахування тертя, контактні сили знаходяться як у [5],

$$f_{iI}^{cont} = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N g_N(\mathbf{u}) \frac{\partial g_N}{\partial u_{iI}} H(g_N) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N \Phi_I \Phi_J H(g_N) d\Gamma u_{iJ} = K_{IJ}^{cont} u_{iJ}, \quad (25d)$$

де  $\Phi_I = \{ N_I \mathbf{n}^+ \text{ якщо } I \in \Gamma_c^+ \text{ або } N_I \mathbf{n}^- \text{ якщо } I \in \Gamma_c^- \}$ ;  $H(g_H)$  – функція Хевісайда і  $\varepsilon_N$  – параметр штрафу.

Далі, слідуючи за звичайною в СЕМ процедурою, де вузлові сили, матриці мас і жорсткості елементів об'єднуються у відповідні глобальні структури. Передбачаючи, що коливання системи здійснюються з пропорційним демпфіруванням, скінченноелементна система рівнянь задачі динаміки тіла з тріщиною набирає вигляду:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{cont}(\mathbf{U}, t_N, \mathbf{t}_T), \quad (26)$$

де  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , і  $\mathbf{K}$  – глобальні матриці мас, демпфірування та жорсткості,  $\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$ , і  $\mathbf{U}$  – глобальні вектори невідомих прискорень, швидкостей і переміщень,  $\mathbf{F}^{ext}$  і  $\mathbf{F}^{cont}$  – глобальні вектори зовнішніх і контактних сил.

Матричне рівняння (26) є системою нелінійних диференціальних рівнянь, яка, в загальному випадку, для знаходження невідомих переміщень вимагає використання *інкрементально-ітераційних процедур* рішення [8].

Інтегрування рівняння (26) за часом може бути виконане з використанням неявних або явних схем. Відзначимо, що явні схеми, які використовують скінченнорізницевий оператор, не вимагають розв'язання системи (26) на кожному інкрементальному кроці. Ця їх особливість робить використання явних схем переважачим в задачах динаміки. Тоді вектор прискорення в (26) на початку кожного інкремента ( $i$ ) обчислюється за формулою:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{ext}^{(i)} - \mathbf{I}^{(i)}). \quad (27)$$

Ця операція є чисельно ефективною у випадку діагональної матриці мас  $\tilde{\mathbf{M}}$ , яка може бути легко отримана зі звичайної матриці  $\mathbf{M}$  відомими методами [8].  $\mathbf{I}$  – загальний вектор вузлових сил, що включає внутрішні, зовнішні, контактні і пов'язані з демпфіруванням сили. Значення вектора відоме на поточному кроку інкремента. Знаючи прискорення вузлів, їх швидкості і переміщення знаходяться по *центрально-різницеви*х формулах:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{U}}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(i)} \text{ і } \mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})}, \quad (28)$$

де індекси  $(i-1/2)$  і  $(i+1/2)$  позначають серединні значення інкремента.

**Висновки.** Представлено скінченноелементну модель для вирішення задачі нелінійної динаміки тіла з тріщиною. Континуальна механіка суцільного середовища і контактна механіка використовуються для формулювання зв'язаної задачі про лінійні коливання тіла і математично нелінійної контактної взаємодії між берегами тріщини. Загальну систему скінченноелементних рівнянь отримано з використанням варіаційного підходу, у рамках якого використовувався принцип Гамільтону, а для знаходження контактних сил – методи що аналогічні у теорії оптимізації. Показано, що така система нелінійних диференціальних рівнянь обчислювально ефективно інтегрується за допомогою явної центрально-різницевої схеми.

**Список літератури:** 1. *Nayfeh A.H., Balachandran B.* Applied Nonlinear Dynamics. – Wiley, New York, USA, 1995. – 473 p. 2. *ABAQUS.* User Manual, Dassault Systèmes Simulia Corp. – Providence, RI, USA, 2010. 3. *Burlayenko V.N., Sadowski T.* Influence of skin/core debonding on free vibration behavior of foam and honeycomb cored sandwich plates// Int. J. Non-Linear Mech, 45(10) 2010, p. 959-968. 4. *Mase G.F., Mase G.T.* Continuum Mechanics for Engineers, – CRC Press, Florida, 1992. – 380 p. 5. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. – John Wiley & Sons Ltd, England, 2002. – 441 p. 6. *Laurssen T.A.* Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis. – Springer, Berlin, 2002. – 454 p. 7. *Kikuchi K., Oden J.T.* Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods.– Society for Industry and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988. – 495 p. 8. *Behytschko T., Liu W.K., Morgan B.* Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. – John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2000. – 667 p.

Надійшла до редколегії 05.12.2011

УДК 539.1

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспірант, НТУ «ХПИ»

## КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СОВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Проаналізовано відомі моделі фізичного простору, що реалізують різні теорії пасивного або активного механічного середовища. Дано теоретичне обґрунтування та вказані загальні технічні принципи зниження інерційності хвилі переносу в середовищі Максвелла.

Проанализированы известные модели физического пространства, реализующие различные теории пассивной и активной механической среды. Дано теоретическое обоснование и указаны общие технические принципы снижения инерционности волны переноса в среде Максвелла.

Analyzed by well-known models of the physical space that implement different theory of passive and active mechanical environment. The theoretical rationale and general technical principles are to reduce the inertia of the wave transport in the environment of Maxwell.

**Введение и постановка задачи.** Если внимательно проанализировать поля напряжений и деформаций твёрдого тела, как это сделано, например, в [1–3], то там можно найти обоснование для эффектов электромагнетизма. На эту аналогию впервые обратил внимание *Джеймс Максвелл* [4], который представлял электромагнитное поле полем напряжений механического эфира. Физики, работавшие после Максвелла, объясняли аналогию по-своему: это, мол, неудивительно, поскольку механика твёрдого поликристаллического тела базируется на уравнениях электромагнитного поля, полученных всё тем же Максвеллом. В этом они правы, но у Максвелла (и у *Анри Пуанкаре* в монографии [5]) речь шла совсем о другом твёрдом теле, первичном в отно-