

ISSN 2222-0631



**ВІСНИК**

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
«XIII»**

**2'2012**

**Харків**

# ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«Харківський політехнічний інститут»

Збірник наукових праць  
Тематичний випуск

2'2012

## «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА ТЕХНОЛОГІЯХ»

Видання засновано Національним технічним університетом  
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України  
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

### КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

**Голова:** Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

**Секретар:** К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;  
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;  
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;  
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;  
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;  
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;  
А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;  
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;  
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;  
В.В.Спифанов, канд. техн. наук, проф.;  
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;  
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;

С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;  
В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;  
В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;  
Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;  
В.С.Лупиков, д-р техн. наук, проф.;  
О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;  
В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;  
П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;  
В.А.Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;  
М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;  
Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;  
Ю.В.Тимофіїв, д-р техн. наук, проф.;  
М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Харків 2012

**Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».** Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіяx. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 2. – 226 с.

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

**Відповідальний редактор:** В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

**Заступник відповідального редактора:** Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ю. В. Гандель,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Ю. Л. Геворкян,	канд. фіз.-мат. наук, проф.;
О. Л. Григор'єв,	д-р техн. наук, проф.;
В. К. Дубовий,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. В. Курпа,	д-р техн. наук, проф.;
О. С. Куценко,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. М. Любчик,	д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
М. В. Новожилова,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
В. П. Северин,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий,	д-р техн. наук, проф.;
Є. Г. Янютін,	д-р техн. наук, проф.

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПІ».  
Каф. ВМ, тел. (057) 707-60-35, (057) 707-60-87. E-mail: kpi\_mmtt@mail.ru

Рекомендовано до друку вченою радою НТУ «ХПІ».  
Протокол № 1 від 20 січня 2012 р.

ISSN 2222-0631

© Національний технічний університет «ХПІ», 2012

**І.М. АНДРЕНКО**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХП»;

**І.П. ГРЕЧКА**, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХП»;

**А.Ю. ЛЕБЕДЕВ**, магістр, НТУ «ХП»

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛЬНИКА ПОТОКУ

Описано робочі процеси в розподільнику потоку робочої рідини. Наведена його математична модель, що враховує нестационарність гідродинамічних процесів, параметри робочої рідини, що змінюються. Дано рекомендації з вибору конструктивних параметрів розподільника потоку.

Описаны рабочие процессы в делителе потока рабочей жидкости. Приведена его математическая модель, которая учитывает нестационарность гидродинамических процессов и изменяющиеся параметры рабочей жидкости. Даны рекомендации для выбора конструктивных параметров делителя потока.

Describes the workflows working fluid flow dividers. Given its mathematical model that takes into account the nonstationarity of hydrodynamic processes and the changing parameters of the working fluid. Recommendations are given for selecting the design parameters of the flow divider.

**Вступ.** Гідравлічні апарати знайшли широке застосування в сучасних об'ємних гідроагрегатах (ГА), мехатронних систем технологічного обладнання, транспортних машин, іншому гідрофікованованому обладнанні. Це обумовлено тим, що такі ГА мають високу довговічність, надійно захищені від перевантажень, забезпечують їм механічну жорсткість по відношенню до навантаження та високу позиційну точність реверсу. Вони значно спрощують автоматизацію промислових процесів та підвищують якість машин, дозволяють суттєво зменшити їх вагу і габарити, надійно працюють в любых кліматичних умовах [1]. Номенклатура гідроапаратів становить сотні найменувань та неухильно зростає. Імітаційне математичне моделювання робочих процесів в гідроапаратах, яке спирається на їх математичні моделі, дозволяє пришвидшити розробку нових зразків гідроапаратів та модернізувати існуючі. Тому розробка адекватних математичних моделей гідроапаратів є актуальним науковим завданням.

**Аналіз останніх досліджень.** Питанням проектування та розрахунку об'ємних ГА, в тому числі і гідроапаратів, присвячено достатньо велика кількість робіт таких учених, як: *Т.М. Баїта, В.П. Бочаров, М.С. Гаминін, Г.Й. Зайончковський, Р.Д. Іскович-Лотоцький, Б.Л. Коробочкин, В.А. Лещенко, З.Я. Лур'є, К.Л. Навроцький, І.В. Ніколенко, В.М. Прокоф'єв, Д.М. Попов, О.М. Скляревський, В.Б. Струтинський, З.Л. Фінкельштейн, О.М. Яхно* та інших. В їх роботах розглянуті фундаментальні основи побудови ГА які базуються на їх повних математичних моделях та дозволяють отримати ГА з заданими статичними і динамічними властивостями. Стосовно роз-

роблювальних гідроапаратів незмінною залишається вимога підвищення їх характеристик, таких як, точність відпрацювання керуючих сигналів та чутливість до них. Вимоги, щодо розроблювальних гідроапаратів сформульовані нами в статті [2].

У роботі [3] описано робочий процес розподільника потоку та його математична модель. Однак наведена математична модель неповна, відсутнє рівняння руху запірно-регулюючого елемента (ЗРЕ), вона не враховує нестационарні гідродинамічні процеси, що відбуваються в розподільнику потоку, змінність в часі параметрів робочої рідини та коефіцієнта витрат. Такі самі недоліки має математична модель розподільника потоку, наведена в статті [4].

Більш повна математична модель робочого процесу розподільника потоку наведена в роботі [5]. Однак вона також не враховує нестационарні гідродинамічні процеси, змінність параметрів робочої рідини та коефіцієнта витрат. Наведені математичні залежності для визначення сил тертя та гідродинамічної сили не враховують конструктивних параметрів розподільника потоку. Відмітимо, що інформація щодо повних математичних моделей розподільників потоку в науково-технічній літературі відсутня. Таким чином, їх розробка є актуальним науковим завданням.

**Постановка задачі.** Метою статті є розробка повної математичної моделі робочого процесу розподільника потоку.

**Розподільник потоку.** Він служить для розподілення потоку на дві частини з метою забезпечення необхідного співвідношення швидкостей виконавчих механізмів ГА, незалежно від діючих на них навантажень. Розподільник [6] (рис. 1) складається з наступних основних деталей: корпусу 1, зрівняльного ЗРЕ 2, розподільного ЗРЕ 3 із двома діафрагмами 4, притиснутими пробками 5. Торці корпусу закриті пробками 6 і 7.

Працює розподільник потоку наступним чином. Потік робочої рідини підводить до отвору А і через діафрагми направляється в торцеві камери ЗРЕ 3. Далі через тангенціальні отвори Б і через змінні дроселі, утворені кромками канавок У і Г корпусу й кромками ЗРЕ 3, робоча рідина надходить у канавки Д і Е, звідки через другий щабель змінних дроселів, утворених кромками канавок Д і Е та кромками ЗРЕ 2, робоча рідина надходить у канали, що відводять, і И і К. Поряд із цим канавки Д і Е з'єднуються через отвори, що демпфують, М і Л з торцевими камерами ЗРЕ 2. Зрівняльний ЗРЕ 2 і ділильний ЗРЕ 3 перебувають у середнім положенні тільки при рівності тисків у каналах, що відводять.

Збільшення опору в одному з відводів, наприклад, у каналі ДО, викликає збільшення тиску в лівій торцевій камері зрівняльного ЗРЕ, у зв'язку із чим останній зміщається вправо, дроселюючи потік робочої рідини на ділянці між канавкою Е і відвідним каналом И. Зсув зрівняльного ЗРЕ відбувається

ся доти, поки тиск у каналах Д і Е (а отже й у торцевих камерах зрівняльного ЗРЕ), а також у канавках У і Г не вирівнюється.

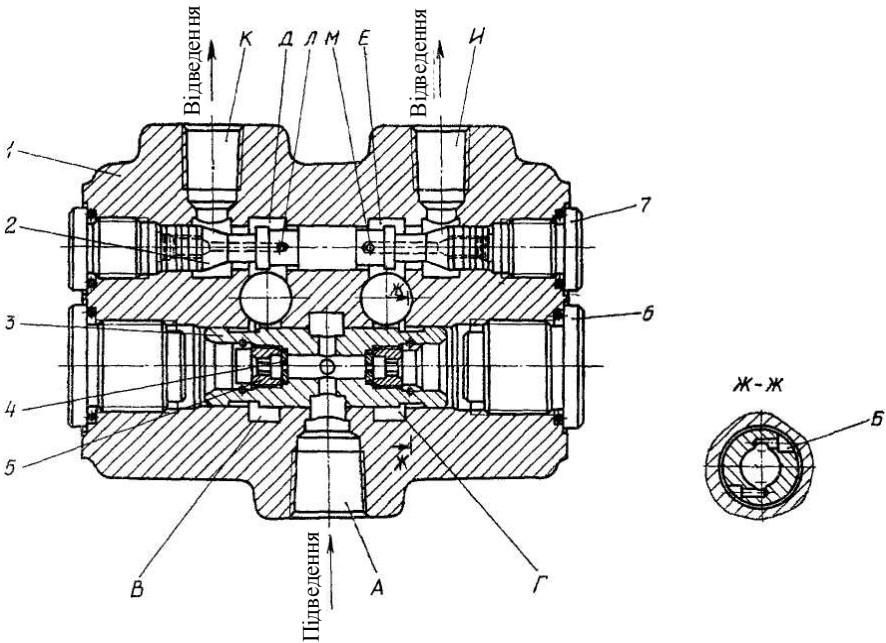


Рисунок 1 – Розподільник потоку.

Таким чином, незалежно від фактичної різниці тисків у каналах И і К, що відводять, зрівняльний ЗРЕ автоматично підтримує практично однаковий тиск у каналах У і Г. Цим забезпечується пропорційність умов витікання робочої рідини через обидві гілки ділильного ЗРЕ, і, як наслідок, висока точність роботи розподільника. Крім того, з метою підвищення чутливості шляхом виключення тертя спокою, розподільний ЗРЕ обертається за рахунок реактивного моменту, що виникає при проходженні потоку робочої рідини через тангенціальний отвір Б.

**Математична модель розподільника потоку.** Вважали, що в ГА відсутній гідравлічний удар та кавітація. Математична модель робочого процесу розподільника потоку (рис. 2), якщо зневажати опором каналів, витоками та перетоками, описується наступними рівняннями:

- руху розподільного ЗРЕ 3

$$m_{зре3} \ddot{x}_{зре3} = F_{кер3}(t) - F_{р пр}(t) - F_{гд}(t) - F_{тр в}(t); \quad (1)$$

- руху зрівняльного ЗРЕ 2

$$m_{зре2} \ddot{x}_{зре2} = F_{кер2}(t) - F_{р пр}(t) - F_{гд}(t) - F_{тр}(t) - F_{дем}(t); \quad (2)$$

- обмеження переміщення ЗРЕ 3

$$0 < x_{зре 3}(t) \leq x_{зре 3 \max}; \quad (3)$$

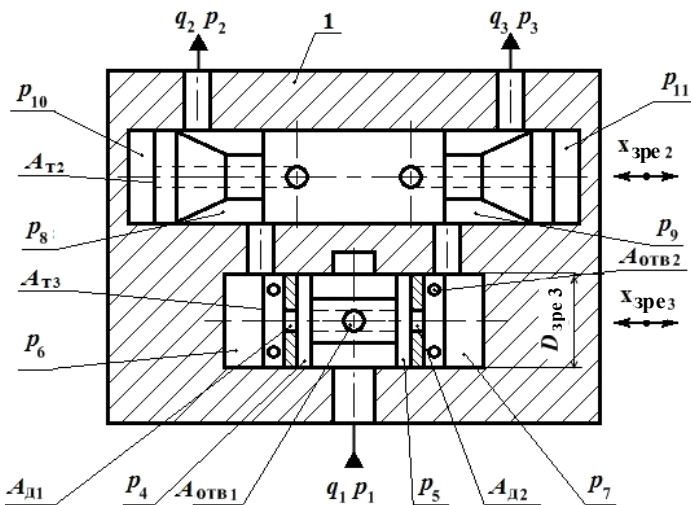


Рисунок 2 – Розрахункова схема розподільника потоку.

- обмеження переміщення ЗРЕ 2

$$0 < x_{зре 2}(t) \leq x_{зре 2 \max}, \quad (4)$$

- зміни стану робочої рідини

$$T_a = const, \rho(t), \quad (5)$$

де температуру  $T_a$  приймали рівною її середньому значенню, а густину робочої рідини  $\rho(t)$  визначали залежно від її газовмісту та зміни тиску в ГА за залежностями, наведеними у статті [7];

- нерозривності

$$q_1(t) = q_2(t) + q_3(t); \quad (6)$$

- витрати через канал, що відводить, ДО

$$q_2(t) = q_{д1}(t) = q_{отв 2}(t) = q_{др В}(t) = q_{др Д}(t) + q_{дем Л}(t); \quad (7)$$

- витрати через канал, що відводить, И

$$q_3(t) = q_{д 2}(t) = q_{отв 2}(t) = q_{др Г}(t) = q_{др Е}(t) + q_{дем М}(t). \quad (8)$$

У рівняннях (1) і (2)  $m_{зре 2}$  і  $m_{зре 3}$  – відповідно маси ЗРЕ 2 і 3 з приведеними до них рухомими частинами;  $x_{зре 2}(t)$  і  $x_{зре 3}(t)$  – відповідно переміщення ЗРЕ 2 і 3.

Силу рідинної пружини визначали за залежністю

$$F_{п пр}(t) = c_{п ср} x_{зре}(t), \quad (9)$$

де  $c_{p\text{cp}}$  – середній коефіцієнт жорсткості рідинної пружини, що розраховують за формулою з роботи [8]:

$$c_{p\text{cp}} = \frac{\pi^2 d_{\text{зпе}}^4 E_{\text{см}}}{8 V_0 (1 + \bar{V}_T)}, \quad (10)$$

де  $d_{\text{зпе}}$  – діаметр ЗРЕ;  $E_{\text{см}}$  – модуль об'ємної пружності газорідинної суміші;  $V_0$  – об'єм робочої рідини, що перебуває в камері керування при середньому положенні ЗРЕ, для гідроапарата;  $\bar{V}_T$  – відносний об'єм трубопроводів і камер керування:  $\bar{V}_T = V_T/V_0$ , де  $V_T$  – об'єм трубопроводів.

Гідродинамічну силу визначали за залежністю з роботи [9], записану нами у вигляді, що дозволяє враховувати нестационарні гідродинамічні процеси,

$$F_{\text{гд}}(t) = -2 c_{\text{гд}}(t) x_{\text{зпе}}(t) - k_{\text{ін}}(t) \frac{dx_{\text{зпе}}}{dt}, \quad (11)$$

де

$$c_{\text{гд}}(t) = \mu_{\text{рп}}(\text{Re}) b_{\text{вік}} (p_{\text{ж}} - p_{\text{зл}}) \cos \theta_{\text{н}}; \quad (12)$$

$$k_{\text{ін}}(t) = \rho(t)(l_3 - l_2) \mu_{\text{рп}}(\text{Re}) b_{\text{вік}} \sqrt{(p_{\text{ж}} - p_{\text{зл}})/\rho(t)}; \quad (13)$$

де  $\mu_{\text{рп}}(\text{Re})$  – коефіцієнт витрати регулятора потоку залежно від числа Рейнольдса –  $\text{Re}$ , що розраховували за залежністю з роботи [10];  $\theta_{\text{н}}$  – кут нахилу струменя потоку до осі ЗРЕ, що визначали відповідно до рекомендацій статті [11];  $b_{\text{вік}}$  – сумарна ширина вікон регулятора потоку;  $l_3$  і  $l_2$  – відповідно, відстані між віссю каналу живлення та виточкою у гільзі регулятора потоку, віссю каналу зливу та виточкою у гільзі регулятора потоку;  $p_{\text{ж}}$  і  $p_{\text{зл}}$  – відповідно тиск живлення та зливу.

Силу тертя ЗРЕ 2 розраховували за залежністю [12]:

$$F_{\text{трк}}(t) = \begin{cases} k_2 \text{sign } \dot{x}_{\text{зпе}}, & \text{при } \dot{x}_{\text{зпе}} \neq 0; \\ + k_2, & \text{при } \dot{x}_{\text{зпе}} = 0 \text{ та } F_0 > k_2; \\ - k_2, & \text{при } \dot{x}_{\text{зпе}} = 0 \text{ та } F_0 < -k_2; \\ F_0, & \text{при } \dot{x}_{\text{зпе}} = 0 \text{ та } |F_0| \leq k_2, \end{cases} \quad (14)$$

де  $F_0$  і  $k_2$  знаходили із рівняння

$$m \ddot{x}_{\text{зпе}} = F_0 - k_2. \quad (15)$$

Силу тертя обертання ЗРЕ 3  $F_{\text{трв}}(t)$  розраховували за формулою

$$F_{\text{трв}} = \mu \frac{A_{\text{кв}} v}{\delta} \frac{2(\delta/e) \left[ (\delta/e)^2 + 2 \right]}{\left[ 2(\delta/e)^2 + 1 \right] \sqrt{(\delta/e)^2 - 1}}, \quad (16)$$



де  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості робочої рідини;  $A_k = 2 \pi R_{зре3}$  – поверхня контакту ЗРЕ 3 одиничної довжини;  $v$  – кутова швидкість поверхні ЗРЕ 3;  $\delta$  – радіальний зазор;  $e$  – ексцентриситет ЗРЕ 3.

Сила, що діє на ЗРЕ розподільника витрати з боку камери, що демпфірує, визначали з залежності

$$F_{дем}(t) = \frac{\pi d_{дп}^2}{4} [p_{дп}(t) - p_{пч}(t)], \quad (17)$$

де  $d_{дп}$  – діаметр ЗРЕ з боку камери, що демпфірує;  $p_{дп}(t)$  і  $p_{пч}(t)$  – відповідно тиск у камері, що демпфірує, і в проточній частині регулятора потоку.

Силу керування  $F_{кер2(3)}(t)$  розраховували за формулою

$$F_{кер2(3)}(t) = A_{т2(3)} \Delta p(t)_{2(3)}, \quad (18)$$

де  $A_{т2(3)}$  – площа торця ЗРЕ 2 (3);  $\Delta p(t)_{2(3)}$  – перепад тиску на торцях ЗРЕ 2 (3),  $\Delta p(t)_{2(3)} = p_{10(6)} - p_{11(7)}$ .

Витрати через діафрагму  $q_{д1(2)}(t)$  та отвір  $q_{Б1(2)}(t)$  розраховували за однотипними залежностями

$$q_{д1(2); Б1(2)}(t) = \mu(\text{Re}) A_{д1(2); Б1(2)} \sqrt{\frac{2}{\rho(t)} \Delta p_{д1(2); Б1(2)}(t)}, \quad (19)$$

де  $A_{д1(2); Б1(2)}$  – площа прохідного перетину діафрагми (отвору),  $A_{д1(2); Б1(2)} = \pi d_{д1(2); Б1(2)}^2 / 4$ ;  $\Delta p_{д1(2); Б1(2)}(t)$  – перепад тиску на діафрагмі (отворі).

Витрати через змінні дроселі  $q_{дрВ(\Gamma)}(t)$  і  $q_{дрД(Е)}(t)$ , демпфірування  $q_{демЛ(М)}$  визначали за однотипними залежностями

$$q_{др}(t) = G_{др}(t) \sqrt{\Delta p_{др}(t) \text{sign} x_{зре2}(t)}, \quad (20)$$

де  $\Delta p_{др}(t)$  – перепад тиску на дроселі;  $\text{sign} x_{зре}$  – функція Кронекера від  $x_{зре}$ ;  $G_{др}(t)$  – провідність змінного дроселя розраховували за залежністю

$$G_{др}(t) = \mu_{др} (\text{Re}_{др}) A_{др}(x_{зредр}(t)) \sqrt{2/\rho(t)}. \quad (21)$$

Рівняння (1) – (21) є повною, з урахуванням максимальної кількості факторів, математичною моделлю регулятора потоку.

**Рекомендації з вибору конструктивних параметрів регулятора потоку.** При проектуванні регулятора потоку необхідно:

- найбільшу площу перетину робочого вікна регулятора потоку визначати з залежності (19), у яку підставляти максимальне значення витрати;

- щоб сумарні втрати тиску, втрати на робочих вікнах і каналах корпусу регулятора потоку, не перевищували 5 % від номінального значення тиску; припустимі значення швидкостей робочої рідини у каналах регулятора потоку наведені у роботі [13];
- діаметр ЗРЕ вибирати із рекомендованого ряду [13];
- щоб радіальний зазор між ЗРЕ і корпусом (втулкою) не був досить великим та забезпечив легке переміщення ЗРЕ всередині корпусу без великого тертя й «заїдання», у той же час зазор не повинен бути малим, щоб забезпечив малі витрати та високий КПД; його вибирають з таблиці роботи [14].

**Висновки.** Уперше розроблена повна математична модель робочого процесу регулятора потоку, що комплексно враховує нестаціонарні гідродинамічні процеси, змінність параметрів робочої рідини та коефіцієнта витрат. Використання розробленої математичної моделі дозволить, на етапі проектування регуляторів потоку, підвищити точність розрахунків.

Розроблена математична модель може бути використана при створенні математичної моделі суматора потоку.

**Список літератури:** 1. Кулешков Ю.В., Черновол М.И., Бевз О.В., Титов Ю.А. Шестеренные насосы с асиметричной линией зацепления шестерен. Теория, конструкция и расчет. – Кировоград: “КОД”, 2009 – 257 с. 2. Андренко П.М., Лебедев А.Ю. Поліпшення енергетичних характеристик об’ємних гідроагрегатів. – Вісник Чернігівського Державного технологічного університету. – Чернігів: ЧДТУ, 2011. – № 2 (49). – С. 98 – 101. 3. Федорец В.А., Педченко М.Н. и др. Гидроприводы и гидропневмоавтоматика станков; под ред. В.А. Федорца. К.: Выща школа, 1987. – 375 с. 4. Сахно Ю.А. Влияние переменной нагрузки на синхронность привода с делителем потока // Гидропривод и гидропневмоавтоматика. – К., 1981. Вып. 17. – С. 83 – 86. 5. Токаренко В.М., Терских В.З., Столяров А.Л. Гидропривод и гидрооборудование автотранспортных средств: учеб. пособие // К.: Лыбидь, 1991. – 232 с. 6. Гидравлическое оборудование. Отраслевой каталог. Лист № 5.6.02. Делители потока типа КД. – М.: ВНИИТЭМП, 1982. – 5 с. 7. Лурье З., Федоренко И. Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металлургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences. – Lublin. – 2010. – Vol. 12 С. 10 – 25. 8. Хохлов В.А., Прокофьев В.Н., Борисова Н.А. и др. Электрогидравлические следящие системы; под ред. В.А. Хохлова. – М.: Машиностроение, 1971. – 431 с. 9. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: [учебник для вузов]. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с. 10. Данилов Ю.А., Кирилловский Ю.Л., Колтаков Ю.Г. Аппаратура об’ємних гидроприводов: Рабочие процессы и характеристики. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с. 11. Андренко П.М. Визначення кута нахилу вектора швидкості потоку, для розрахунку гідродинамічної сили запорно-регулюючого елемента гідроапарата // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2005. – № 4/2 (16). – С. 60 – 63. 12. Склярєвський О.М. Об’ємний гідропривід: [навч. посіб.]. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2001. – 212 с. 13. Абрамов Е.И., Колисниченко К.А., Маслов В.Т. Элементы гидропривода: [справочник]. – К.: Техніка, 1977. – 320 с. 14. Аврунін Г.А., Кириченко І.Г., Мороз І.І. Основи об’ємного гідроприводу і гидропневмоавтоматика: навч. посіб.; під ред Г.А. Авруніна. Харків: ХНАДУ, 2009. – 424 с.

Надійшла до редакції 06.01.2012

**Г.О. АНИЩЕНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
**Ю.В. РОМАШОВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## **ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ**

В статті розглянуто побудову числових розв'язків для різноманітних математичних формулювань задач теорії повзучості. Представлені числові розв'язки плоскої задачі теорії повзучості, що одержані методом скінченних елементів та методом Бубнова-Галеркіна з використанням R-функцій. Досліджено достовірність одержаних числових розв'язків, показані перерозподіл напружень та параметру пошкоджуваності в умовах повзучості.

В статье рассмотрено построение численных решений для различных математических формулировок задач теории ползучести. Представлены численные решения плоской задачи теории ползучести, полученные методом конечных элементов и методом Бубнова-Галеркина с использованием R-функций. Исследована достоверность полученных численных решений, показаны перераспределение напряжений и параметра повреждаемости в условиях ползучести.

This article deals with numerical solutions constructing for different mathematical formulations of creep problem. Numerical solutions for creep plane problem obtained using finite element method and Galerkin-Bubnov method with R-functions are presented. Obtained numerical solutions reliability is investigated, stresses and damage parameter redistributions due to creep are shown.

**Введение.** Под ползучестью в простейшем случае понимают постепенное накопление необратимой (пластической) деформации, которое заметно проявляется при сочетании высоких механических нагрузок и температур, достигающих 35-70% абсолютной температуры плавления [1] и приводит к существенному перераспределению полей напряженно-деформированного состояния в твердых телах даже при стационарных нагрузках. Актуальность проблем ползучести обусловлена их инженерными приложениями, связанными с улучшением эксплуатационных характеристик машин за счет увеличения температуры и механических напряжений (рабочего давления, частоты вращения и т. п.) [1]. Нелинейность уравнений состояния тел при ползучести заставляет обращаться к численным решениям задач теории ползучести.

**Анализ последних исследований и формулировка целей статьи.** Численные решения задач теории ползучести в современных исследованиях [2-5] рассматриваются применительно к используемым там частным математическим формулировкам и на основе выбранных частных схем дискретизации (часто – метода конечных элементов). Используемые математические формулировки различаются выбором локальной [5] и вариационной формы [2-4]; пространства состояний: в перемещениях [2-4], в смешанной форме [5]; представлением напряженно-деформированного состояния либо самими искомыми величинами [4, 5], либо их скоростями [2, 3]. Алгоритмизация построения численных решений для задач теории ползучести в литературе практически не обсуждается, хотя обсуждается для других задач, например

для задач теплопроводности, что позволяет обеспечивать эффективность счета и использовать методически однотипные алгоритмы для достижения структурной простоты программ [6]. Целью данной статьи является изучение общих подходов к построению численных решений для задач теории ползучести.

**Постановки задачи теории ползучести.** Далее рассматриваем задачи ползучести для тела, которое занимает область объемом  $\Upsilon$  с граничной поверхностью  $\nu$  в случае малых деформаций, статических нагрузок, однородного стационарного температурного поля, полных деформаций в виде суммы обратимых упругих и необратимых деформаций ползучести; для упругих деформаций принимаем закон Гука; материал тела считаем однородным изотропным. Следуя методу Лагранжа, точки тела индивидуализируем в начальном состоянии, отвечающем моменту времени  $t = 0$ , и рассматриваем моменты времени  $t \geq 0$  с использованием декартовых прямоугольных координат  $x_k$ ; все нижние индексы, значения которых отдельно не оговорены, принимают последовательно значения 1, 2, 3; по повторяющимся нижним индексам подразумевается суммирование. Формулировка задачи теории ползучести включает описание напряженно-деформированного состояния при упругом деформировании с учетом деформаций ползучести и описание закона изменения во времени деформаций ползучести, что для полного пространства состояний в рамках принятых допущений записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + c_{ij}, \quad e_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \\ u_i = \tilde{u}_i \quad \forall x_k \in \nu_u, \quad \sigma_{ij}n_j = p_i \quad \forall x_k \in \nu_p, \quad (1)$$

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{c}}{\sigma^{(c)}} s_{ij}, \quad \dot{c} = \dot{c}(c_{ij}, \omega, q_1, q_2, \dots; \sigma^{(c)}), \quad \sigma^{(c)} = \sigma^{(c)}(\sigma_{ij}), \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad c_{ij}(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\omega, q_1, q_2, \dots, c_{ij}; \sigma^{(\omega)}), \quad \sigma^{(\omega)} = \sigma^{(\omega)}(\sigma_{ij}), \quad \omega(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon,$$

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(\omega, q_1, q_2, \dots, c_{ij}; \sigma^{(s)}), \quad \sigma^{(s)} = \sigma^{(s)}(\sigma_{ij}), \quad \dot{q}_s(x_k, 0) = 0 \quad \forall x_k \in \Upsilon. \quad (3)$$

Здесь  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ ;  $u_i = u_i(x_k, t)$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t)$  – компоненты перемещений и напряжений;  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t)$ ,  $e_{ij} = e_{ij}(x_k, t)$  и  $c_{ij} = c_{ij}(x_k, t)$  – компоненты деформаций: полных, упругих и ползучести;  $f_i = f_i(x_k)$  – заданные компоненты объемных сил,  $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x_k)$  – заданные компоненты перемещения в точках поверхности  $\nu_u \subset \nu$ ;  $p_i = p_i(x_k)$  – заданные компоненты поверхностных сил в точках поверхности  $\nu_p \subset \nu$ ;  $n_j$  – компоненты внешней единич-

ной нормали к поверхности тела;  $a_{ijkl}$  – упругие постоянные материала тела;  $\dot{c}_{ij} \equiv \partial c_{ij} / \partial t$ ;  $\sigma^{(c)}$  – контролирующие скорость ползучести эквивалентные напряжения;  $\omega = \omega(x_k, t)$  – параметр повреждаемости и  $q_s = q_s(x_k, t)$ ,  $s = 1, 2, \dots$  – другие параметры состояния, характеризующие накопление повреждений на микро-уровне и другие изменения на уровне структуры материала [7];  $\sigma^{(\omega)}$  и  $\sigma^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots$  – эквивалентные напряжения, контролирующие скорость параметра повреждаемости и других параметров состояния. Кинетические уравнения (2), (3) для деформаций ползучести, параметра повреждаемости и других параметров состояния устанавливаются по результатам испытаний образцов в условиях ползучести вплоть до разрушения. Интегрирование по времени уравнений (1) – (3) выполняется вплоть до завершения этапа нелокализованного разрушения и образования локализованного дефекта (трещины), что устанавливается условием

$$\omega(x_k^*, t^*) = 1, \quad (4)$$

где  $t^*$  – время образования и  $x_k^*$  – координаты локализованного дефекта, причем для моментов времени  $t > t^*$  поведение рассматриваемого тела нельзя адекватно описать уравнениями (1) – (3), поскольку в них не учитывается наличие локализованных дефектов, например трещин.

Для алгоритмизации численного решения некоторого класса задач целесообразно располагать его единообразной математической формулировкой [6]. Различие между записями формулировок задач теории ползучести в разных пространствах состояний при алгоритмизации их численного решения устраняется использованием понятия *оператора краевой задачи* [8]. Для этого введем вектор  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) \in R^N$ ,  $N = N^{(1)}$ , содержащий параметры напряженно-деформируемого состояния (перемещения, деформации полные и упругие, напряжения),  $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)}(x_k, t) \in R^N$ ,  $N = N^{(2)}$ , содержащий деформации ползучести,  $\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{(3)}(x_k, t) \in R^N$ ,  $N = N^{(3)}$ , содержащий параметр повреждаемости и другие параметры состояния. Тогда задача теории ползучести (1)–(3) примет следующий вид:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu, \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}; \mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(2)}(x_k, 0) = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)} = \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(3)}(x_k, 0) = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \Upsilon. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  – линейные операторы и  $\mathbf{f}^{(1)}$  – вектор, отвечающие дифференциальным уравнениям, а  $\mathbf{L}$  – линейный оператор и  $\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}$  – вектор, отве-

чающие граничным условиям (1). Вектор  $\mathbf{f}^{(2)}$  отвечает уравнениям состояния при ползучести (2), а вектор  $\mathbf{f}^{(3)}$  – кинетическим уравнениям для параметра повреждаемости и других параметров состояния (3). Выбор частного пространства состояний уменьшает число компонент вектора  $\mathbf{u}^{(1)}$  и соответствующим образом видоизменяет операторы краевой задачи (5).

Вместо локальной формулировки краевой задачи (5) можно использовать ее эквивалентную вариационную формулировку, которую удобно представить в виде вариационного равенства с учетом главных условий, представляющих, как правило, часть граничных условий (5):

$$\int_{\Upsilon} \delta \mathbf{u}^{(1)T} \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \mathbf{u}^{(1)T} \left( \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}^{(1)} - \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_m \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu_m, \quad (9)$$

где учтено, что  $\nu = \nu_m \cup \nu_n$ ,  $\nu_m \cap \nu_n = \emptyset$ ;  $\mathbf{L}_n$ ,  $\mathbf{L}_m$  – операторы и  $\tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)}$  – векторы, отвечающие естественным и главным граничным условиям.

Уравнения (5) – (7) наглядно показывают, что задача теории ползучести представляет собой две связанные математически различные задачи: краевую и начальную. Краевая задача описывает напряженно-деформированное состояние тела с учетом деформаций ползучести, а начальная – изменение во времени деформаций ползучести, параметра повреждаемости и внутренних структурных параметров с учетом текущего напряженного состояния. Единобразную математическую формулировку задачи теории ползучести можно получить дифференцированием по времени обеих частей уравнения (5) и представлением его в скоростях напряженно-деформированного состояния:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_k, 0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \nu, \\ \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu, \quad (10)$$

где  $\mathbf{u}_0^{(1)}$  – поле вектора  $\mathbf{u}^{(1)}$  (напряженно-деформированного состояния) в начальный момент времени  $t = 0$ , которое отвечает упругому деформированию тела при отсутствии деформаций ползучести.

Замена краевой задачи (5) начально-краевой задачей (10) позволяет представить задачу теории ползучести (5) – (7) в эквивалентной форме (10), (6), (7). Вместо начально-краевой задачи (10) можно использовать ее эквивалентную вариационную формулировку, которая в вариациях с учетом главных и естественных граничных условий примет следующий вид:

$$\int_{\Upsilon} \delta \dot{\mathbf{u}}^{(1)T} \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \dot{\mathbf{u}}^{(1)T} \left( \mathbf{L}_n \cdot \dot{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0, \\ \int_{\Upsilon} \delta \mathbf{u}_0^{(1)T} \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \delta \mathbf{u}_0^{(1)T} \cdot \left( \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} - \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} \right) d\nu = 0. \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_m \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_m \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_m^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu_m. \quad (12)$$

Одна из простейших теорий ползучести, в которой повреждаемость и другие параметры состояния не рассматриваются, а скорость деформаций ползучести зависит только от напряжений, приводит к равенству  $\dot{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(1)})$ .

Это позволяет, если задача о напряженно-деформированном состоянии представлена в форме (10), исключить из рассмотрения при формулировке задач теории ползучести деформации ползучести, представленные вектором  $\mathbf{u}^{(2)}$ :

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = -\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_k, 0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \forall x_k \in \nu, \\ \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \quad \forall x_k \in \Upsilon, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \quad \forall x_k \in \nu. \quad (13)$$

В случае, когда напряженно-деформированное состояние описывается краевой задачей (5), то деформации ползучести не могут быть исключены из рассмотрения даже при использовании рассмотренной простейшей теории ползучести.

**Построение численных решений.** Алгоритмизация построения численных решений для задачи теории ползучести существенно зависит от выбора вида (5) – (7) или (8), (9), (6), (7) или (10), (6), (7) или (11), (12), (6), (7) ее математической формулировки. Вначале построим численное решение задачи теории ползучести, сформулированной в виде (11), (12), (6), (7). Для решения задачи (11), (12) поля напряженно-деформированного состояния представим аппроксимациями, тождественно удовлетворяющими главным условиям (12):

$$\mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) = \mathbf{u}_\nu^{(1)}(x_k) + \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \quad \delta \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) = \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \delta \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \quad (14)$$

где  $\mathbf{u}_\nu^{(1)}$  – вектор, продлевающий заданные граничные значения внутрь области тела;  $n$  – число аппроксимирующих функций;  $\mathbf{U}_n^{(1)}$  – матрица, составленная из принятых аппроксимирующих функций;  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  – вектор, составленный из подлежащих определению коэффициентов аппроксимаций.

В зависимости от выбора аппроксимирующих функций можно реализовать различные схемы дискретизации [9]. Примерами могут служить классический *метод Рунца*, отвечающий случаю, когда аппроксимирующие функции определены во всей области  $\Upsilon$  тела, а также метод конечных элементов – когда аппроксимирующие функции не равны нулю только в локальных подобластях, на которые разбита область  $\Upsilon$  тела, а коэффициенты аппроксимаций имеют смысл узловых значений. Подстановка аппроксимаций (14) в равенства (11) с учетом независимости вариаций  $\delta \mathbf{a}_n^{(1)}$  приведет к системам уравнений

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(1)} = -\int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \right) d\Upsilon, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{n0}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n0}^{(1)} &\equiv \mathbf{a}_n^{(1)}(0); \quad \mathbf{A}_n^{(1)} = \int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{U}_n^{(1)} \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{U}_n^{(1)} \right) d\nu; \\ \mathbf{f}_n^{(1)} &= \int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_\nu \right) d\Upsilon + \int_{\nu_n} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \tilde{\mathbf{u}}_n^{(1)} - \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{u}_\nu^{(1)} \right) d\nu. \end{aligned}$$

Интеграл из системы уравнений (15) представляем в виде квадратуры

$$\int_{\Upsilon} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right) d\Upsilon \approx \sum_{i=1}^Q w^{(i)} \left( \mathbf{U}_n^{(1)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right), \quad (17)$$

где  $Q$  – число,  $w^{(i)}$  – весовые коэффициенты и  $\xi_k^{(i)}$  – координаты узлов используемой квадратурой формулы [10].

Уравнения (6), (7) интегрируем в узлах квадратурной формулы (17):

$$\dot{\mathbf{u}}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right) = \mathbf{f}^{(2)} \left( \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right), \mathbf{u}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)} \right); \mathbf{u}^{(1)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right), \quad \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)}, 0 \right) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)} \right) = \mathbf{f}^{(3)} \left( \mathbf{u}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)} \right), \mathbf{u}^{(2)} \left( \xi_k^{(i)} \right); \mathbf{u}^{(1)} \left( \xi_k^{(i)} \right) \right), \quad \mathbf{u}^{(3)} \left( \xi_k^{(i)}, 0 \right) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, Q$ . Таким образом, решение задачи теории ползучести сведено к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (15) – (19). В результате на шагах интегрирования по времени получают поля напряженно-деформированного состояния, а также значения деформаций ползучести и параметра повреждаемости в узлах квадратурных формул и, кроме этого, возможно, в других, наперед заданных, точках тела. Рассмотренная схема (15) – (19) алгоритмизации построения численного решения для задач теории ползучести с некоторыми видоизменениями применяется в большинстве исследований. Определение момента времени  $t^*$  и координат  $x_k^*$  образования локализованного дефекта из условия (4) с высокой точностью требует вычисления деформаций ползучести и параметра повреждаемости в достаточно большом числе наперед заданных точек тела.

Рассмотрим решение задачи теории ползучести, представленной в локальной форме (5) – (7) с использованием взвешенных невязок [9] и структурного метода теории R-функций [11], как это сделано в работе [5]. Для этого представим неизвестные задачи в виде тождественно удовлетворяющих всем граничным условиям (5) структур решений [11]

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \left( \Phi^{(1)}, \Upsilon, \nu, \mathbf{L}, \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \right), \quad \mathbf{u}^{(2)} = \Phi^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \Phi^{(3)}, \quad (20)$$

с неопределенными компонентами  $\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}(x_k, t)$ ,  $\Phi^{(2)} = \Phi^{(2)}(x_k, t)$  и  $\Phi^{(3)} = \Phi^{(3)}(x_k, t)$  в виде аппроксимаций по системам базисных функций про-



странственных координат с зависящими от времени коэффициентами

$$\Phi^{(s)}(x_k, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i^{(s)}(x_k) \cdot a_i^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Здесь –  $a_i^{(s)}(t)$  и  $\phi_i^{(s)}(x_k)$ ,  $s = 1, 2, 3$  – коэффициенты аппроксимаций и базисные функции, являющиеся элементами содержащих  $\Phi^{(s)}$  функциональных пространств [11]. В случае линейных операторов граничных условий подстановка аппроксимаций (21) в структуры решений (20) приведет к выражениям в виде линейных комбинаций коэффициентов аппроксимаций [11], которые представим в матрично-векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(x_k, t) &= \mathbf{u}_v^{(1)}(x_k) + \mathbf{U}_n^{(1)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}(t), \\ \mathbf{u}^{(2)}(x_k, t) &= \mathbf{U}_n^{(2)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}(t), \quad \mathbf{u}^{(3)}(x_k, t) = \mathbf{U}_n^{(3)}(x_k) \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\mathbf{U}_n^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, 3$  – матрицы пробных функций, составленные из множителей при коэффициентах  $a_i^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, 3$  в структурах решений (20) после подстановки в них аппроксимаций (21);  $\mathbf{a}_n^{(s)} = \left( a_1^{(s)} \quad a_2^{(s)} \quad \dots \quad a_n^{(s)} \right)^T$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Аппроксимации (22) удовлетворяют граничным условиям (5) и будут удовлетворять начальным условиям (6), (7), для коэффициентов аппроксимаций, удовлетворяющих начальным условиям

$$\mathbf{a}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_n^{(3)}(0) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Для определения коэффициентов аппроксимаций *методом взвешенных невязок* представим аппроксимации (22) в матрично-векторной форме и дифференциальные уравнения (5) – (7) одним уравнением [5]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{a}_n, \quad (24)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_v^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n^{(1)} \\ \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \mathbf{a}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (26)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}; \mathbf{u}^{(1)}) \\ \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}^{(3)}, \mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{u}^{(1)}) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{I}^{(2)}$ ,  $\mathbf{I}^{(3)}$  – тождественные и  $\mathbf{0}$  – нулевые матричные операторы, размерности которых определяются размерностями векторов  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  и  $\mathbf{u}^{(3)}$ .

Подставим аппроксимации (24) в дифференциальное уравнение (26) и, следуя методу взвешенных невязок, воспользуемся условием ортогональности невязки выполнения этого уравнения к проверочным функциям [11]:

$$\int_{\Upsilon} \mathbf{V}_n \cdot [\mathbf{K} \cdot (\mathbf{U}_n \cdot \dot{\mathbf{a}}_n) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}_v + \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{a}_n)] d\Upsilon = 0. \quad (28)$$

Здесь  $\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$  – матрица, составленная из проверочных функций, являющихся линейно независимыми элементами пространства, сопряженного к содержащему элемент  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  пространству. Условие (28) может рассматриваться как обобщенное представление различных численных методов, различающихся выбором пробных и проверочных функций [9]. При использовании локальных пробных и проверочных функций метод взвешенных невязок (27) эквивалентен методу конечных элементов [9]. Если использовать глобальные пробные функции, а проверочные функции выбрать в виде  $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n^T$ , то условие ортогональности (28) будет отвечать классическому методу Бубнова-Галеркина [9], который, как в работе [5], после подстановки матриц (25), (27) в условие (28), с учетом линейности операторов приведет к алгебраическим и дифференциальным уравнениям

$$\mathbf{A}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)} + \mathbf{A}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)} = \mathbf{f}_n^{(1)}, \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_n^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(2)} = \mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(1)}), \quad \mathbf{a}_n^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_n^{(3)} \cdot \dot{\mathbf{a}}_n^{(3)} = \mathbf{f}_n^{(3)}(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(1)}), \quad \mathbf{a}_n^{(3)}(0) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где матрицы и векторы вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{A}_n^{(s)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(1)})^T \cdot (\mathbf{A}^{(s)} \cdot \mathbf{U}_n^{(s)}) d\Upsilon, \quad s = 1, 2; \quad \mathbf{f}_n^{(1)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(1)})^T \cdot (\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_v) d\Upsilon,$$

$$\mathbf{K}_n^{(s)} = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(s)})^T \cdot \mathbf{U}_n^{(s)} d\Upsilon, \quad s = 2, 3,$$

$$\mathbf{f}_n^{(2)}(\mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)}) = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(2)})^T \cdot \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{U}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{U}_n^{(3)} \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}; \mathbf{u}_v^{(1)} + \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}) d\Upsilon,$$

$$\mathbf{f}_n^{(3)}(\mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)}) = \int_{\Upsilon} (\mathbf{U}_n^{(3)})^T \cdot \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{U}_n^{(3)} \cdot \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{U}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{u}_v^{(1)} + \mathbf{U}_n^{(1)} \cdot \mathbf{a}_n^{(1)}) d\Upsilon.$$

При помощи уравнения (29) можно представить вектор  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  в виде соотношения

$$\mathbf{a}_n^{(1)}(\mathbf{a}_n^{(2)}) = (\mathbf{A}_n^{(1)})^{-1} \cdot (\mathbf{f}_n^{(1)} - \mathbf{A}_n^{(2)} \cdot \mathbf{a}_n^{(2)}). \quad (32)$$

Соотношение (32) позволяет исключить вектор  $\mathbf{a}_n^{(1)}$  из уравнений (30), (31) и в результате получить задачу Коши в канонической форме:

$$\dot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_n), \quad \mathbf{y}_n(0) = \mathbf{0}. \quad (33)$$

Здесь

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \mathbf{a}_n^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_n(\mathbf{y}_n) = \begin{pmatrix} \left( \mathbf{K}_n^{(2)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_n^{(2)} \left( \mathbf{a}_n^{(2)}, \mathbf{a}_n^{(3)}; \mathbf{a}_n^{(1)} \left( \mathbf{a}_n^{(2)} \right) \right) \\ \left( \mathbf{K}_n^{(3)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_n^{(3)} \left( \mathbf{a}_n^{(3)}, \mathbf{a}_n^{(2)}; \mathbf{a}_n^{(1)} \left( \mathbf{a}_n^{(2)} \right) \right) \end{pmatrix}.$$

Решение задач теории ползучести по схеме (20) – (33) за счет использования аналитических аппроксимаций позволяет определять деформации ползучести и параметр повреждаемости в любой точке тела, причем число уравнений в разрешающей задаче Коши (33) определяется количеством аппроксимирующих функций. При решении задач теории ползучести по схеме (15) – (19) относительно узловых значений число уравнений в разрешающей задаче Коши (18), (19) определяется числом точек, в которых вычисляются деформации ползучести, параметр повреждаемости и другие параметры состояния. Точное определение момента времени  $t^*$  и координат  $x_k^*$  образовавшегося локализованного дефекта из условия (4) требует вычисления параметра повреждаемости в большом числе точек тела, так что число уравнений задачи Коши (18), (19) может оказаться большим числа уравнений задачи Коши (33). При построении численного решения задач теории ползучести по схеме (15) – (19) напряженно-деформированное состояние определяется путем интегрирования по времени с накоплением погрешностей на шагах интегрирования. В случае численного решения по схеме (20) – (33) погрешности пошагового интегрирования накапливаются только для деформаций ползучести, параметра повреждаемости и других параметров состояния, а напряженно-деформированное состояние определяется при этом путем решения системы линейных алгебраических уравнений (32). Отмеченные обстоятельства позволяют говорить о некоторых преимуществах построения численных решений по схеме (20) – (33) перед построением численных решений по схеме (15) – (19).

**Пример численного решения задачи теории ползучести.** Рассмотрим в декартовых координатах  $Ox_1x_2$  плоскую начально-краевую задачу теории ползучести для квадратной пластины с длиной стороны  $2a = 16$  мм, которая растягивается поверхностными силами  $p = p(x_2)$ , приложенными на краях  $x_1 = \pm a$  и распределенными по параболическому закону (рис. 1)

$$p(x_2) = S \left( 1 - (x_2/b)^2 \right), \quad (34)$$

где  $S = 300$  МПа – заданное максимальное напряжение в сечениях  $x_1 = \pm a$ .

В качестве материала пластины примем сталь ЭИ-481, для которой: модуль упругости  $E = 1,25 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , а скорость ползучести при температуре  $700^\circ\text{C}$  описывается с учетом повреждаемости материала в виде [3]:

$$\dot{c} = \dot{c}(\omega; \sigma^{(c)}), \quad \dot{c}(\omega; \sigma^{(c)}) = B \left( \frac{\sigma^{(c)}}{1-\omega} \right)^n, \quad B = 8.98 \cdot 10^{-15} \text{ МПа}^{-n} / \text{ час}, \quad n = 4, 12,$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\omega; \sigma^{(\omega)}), \quad \dot{\omega}(\omega; \sigma^{(\omega)}) = A \left( \frac{\sigma^{(\omega)}}{1-\omega} \right)^k, \quad A = 1, 11 \cdot 10^{-25} \text{ МПа}^{-k} / \text{ час}, \quad k = 8, 97,$$

где  $\sigma^{(c)} = \sigma^{(\omega)} = \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)}$  – интенсивность напряжений.

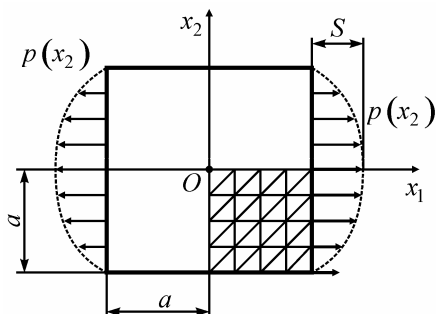


Рисунок 1 – Пластина и фрагмент конечно-элементной сетки с приведением нагрузки к ее узлам.

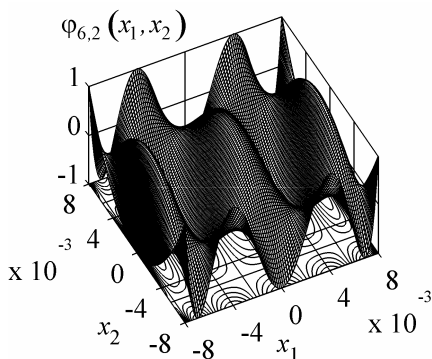


Рисунок 2 – Поверхность значений построенной на основе полиномов Чебышева одной из двумерных функций, используемой в аппроксимации параметра повреждаемости.

Приближенные решения задач теории ползучести для такой пластины получены двумя способами. Во-первых, как в работе [3], при помощи специально созданного программного обеспечения методом конечных элементов (фрагмент сетки и приведение нагрузки к узлам показаны на рис. 1) на основе вариационной постановки в перемещениях по схеме (15) – (19) с интегрированием задачи Коши *методом прогноза-коррекции*. Во-вторых, как в работе [5], при помощи специально созданного программного обеспечения на основе методов теории R-функций и Бубнова-Галеркина по схеме (20) – (33) с описанием напряженно-деформированного состояния в перемещениях и напряжениях и решением задачи Коши методом Рунге-Кутта в модификации с переменным шагом интегрирования, предложенной *Мерсоном*. В последнем случае интегрирование в области пластины осуществлялось по *квадратурным формулам Гаусса*, а в качестве аппроксимирующих функций неопределенных компонент структур решения использовались произведения специально выбираемых с учетом симметрии задачи *полиномов Чебышева* [12]

$$\varphi_{i,j}(x_1, x_2) = T_i(x_1) \cdot T_j(x_2). \quad (35)$$

Здесь  $T_i$  – полином Чебышева степени  $i$ . С учетом симметрии задачи в аппроксимациях, например, параметра повреждаемости  $i, j = 0, 2, 4, \dots, 2(n-1)$ ; одна из аппроксимирующих функций (35), используемая в аппроксимациях параметра повреждаемости, показана на рис. 2.

Для получаемых описанными двумя методами приближенных решений задачи ползучести, отвечающих упругому деформированию в момент времени  $t = 0$ , установлено соответствие с решениями задачи о число упругом деформировании пластины, полученными в работах [13], [14]. Это позволяет говорить о достоверности решения задачи теории ползучести, отвечающего моменту времени  $t = 0$ . Достоверность решения задачи теории ползучести в моменты времени  $t > 0$  устанавливалась сходимостью получаемых методом Бубнова-Галеркина приближенных решений и их сопоставлением с приближенным решением, полученным методом конечных элементов, что иллюстрируется рис. 3.

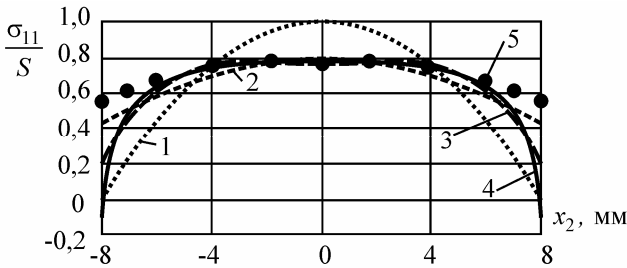


Рисунок 3 – Решения для напряжения  $\sigma_{11}$  в сечении  $x_1 = a/2$  в момент времени  $t = 150$  час, полученные методом Бубнова-Галеркина для разного числа аппроксимирующих функций: 1 –  $n = 1$ , 2 –  $n = 2$ , 3 –  $n = 3$ , 4 –  $n = 14$ , и решение, полученное при помощи метода конечных элементов – маркеры 5.

Расчеты показали сходимость с увеличением числа аппроксимирующих функций получаемых методом Бубнова-Галеркина приближенных решений; начиная с числа  $n = 6$  аппроксимирующих функций, приближенные решения не различаются в масштабе рис. 3. Установлено различие приближенного решения, получаемого методом Бубнова-Галеркина (рис. 3, кривая 4), и получаемого методом конечных элементов (рис. 3, маркеры 5) около точек  $x_2 = \pm a$ , что можно объяснить двумя причинами. Во-первых, полученное методом конечных элементов решение на сетке рис. 1, по-видимому, имеет более высокую погрешность аппроксимации, чем решение, полученное методом Бубнова-Галеркина для  $n = 14$  аппроксимирующих функций. В пользу этого говорит то обстоятельство, что полученное методом конечных элементов решение (рис. 3, маркеры 5) более близко к решению метода Бубнова-Галеркина с более высокой погрешностью аппроксимации для числа  $n = 2$  (рис. 3, кривая 2). Во-вторых, решение методом конечных элементов при-

ближенно удовлетворяет граничным условиям: в точках с  $x_2 = \pm a$  растягивающие напряжения не равны нулю (рис. 1) и именно около этих точек имеет место заметное различие получаемых решений. Полученные результаты позволяют говорить о достоверности получаемых численных решений задачи теории ползучести.

Рассмотрим далее некоторые закономерности ползучести, установленные на основе анализа результатов, представленных на рис. 4 и рис. 5, полученных методом Бубнова-Галеркина с числом  $n=14$  аппроксимирующих функций.

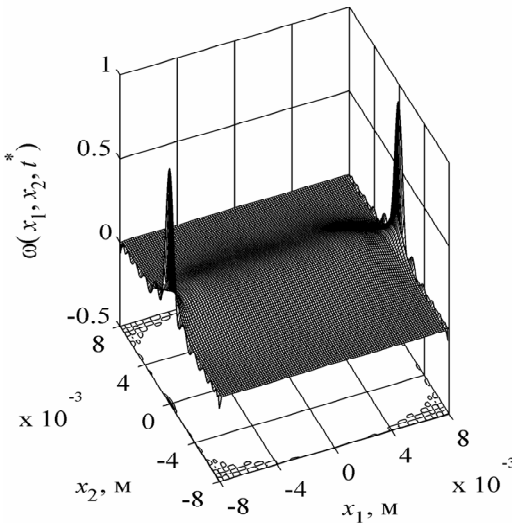


Рисунок 4 – Значения параметра повреждаемости в точках пластины в момент времени  $t = t^*$ .

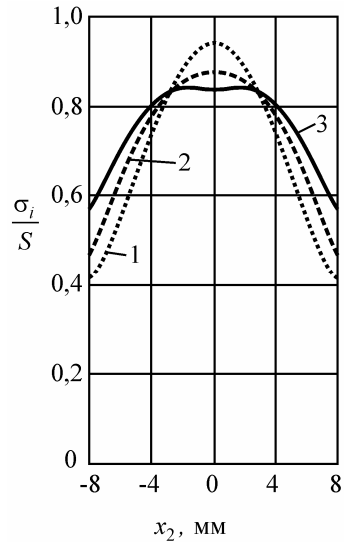


Рисунок 5 – Интенсивность напряжений в точках центрального сечения  $x_1 = 0$  пластины в моменты времени 1 –  $t = 0$ , 2 –  $t = 24$  час и 3 –  $t = t^*$ .

При решении задачи ползучести с использованием условия (4) установлено время  $t^* \cong 152,39$  час до завершения этапа нелокализованного разрушения пластины и образования локализованного дефекта. Анализ поля повреждаемости (рис. 4) показывает, что в пластине следует ожидать образование в момент времени  $t = t^*$  двух макроскопических дефектов вследствие ползучести, причем эти дефекты будут расположены в окрестности точек пластины с координатами  $x_1 = \pm a$ ,  $x_2 = 0$ . Заметное перераспределение напряжений с течением времени вследствие ползучести, которое имеет место даже при стационарной нагрузке, иллюстрируется рис. 5.

**Перспективы дальнейших исследований.** Разработанные общие подходы к построению численных решений задач теории ползучести позволяют рассматривать задачи более сложные, чем в рассмотренном примере. Можно рассматривать, например, задачи ползучести для тел сложной формы, однако для дальнейших исследований более перспективными с точки зрения реализации возможностей предложенных подходов являются практически отсутствующие в литературе задачи теории ползучести с несколькими, кроме параметра повреждаемости, параметрами состояния.

**Выводы.** В статье рассмотрено построение численных решений для различных математических формулировок задач теории ползучести. Для плоской задачи теории ползучести получены методом конечных элементов и методами Бубнова-Галеркина и R-функций численные решения. Исследована достоверность полученных решений и установлено, что погрешности при приближенном удовлетворении силовых граничных условий могут существенно влиять на решение задачи теории ползучести. Показаны перераспределения параметра повреждаемости и напряжений в условиях ползучести.

**Список литературы:** 1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. анализ, предсказание, предотвращение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с. 2. Золочевський О. О., Рвачов В. Л., Склетус С. М. Повзучість пластин неканонічної форми з матеріалів із асиметрією властивостей // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2006. – 49, № 1. – С. 67–74. 3. Анищенко Г. О., Бреславский Д. В., Морачковский О. К. Влияние циклического нагружения на ползучесть и длительную прочность пластин с отверстиями // *Доповіді НАН України*. – 1998. – № 8. – С. 59–64. 4. Баженов В. А., Гуляев А. И., Пискунов С. О., Шкрель А. А. Определение ресурса лопатки газовой турбины в условиях ползучести на основе континуальной механики разрушения // *Проблемы прочности*. – 2006. – № 4. – С. 87–71. 5. Морачковский О. К., Ромашов Ю. В. К решению начально-краевых задач теории ползучести // *Прикладная механика*. – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 33–44. 6. Расчет на ЭВМ температурных полей в твердых телах с подвижными границами // *Калютин А. И., Мосин Е. Ф., Соковишин Ю. А., Энтин Е. П.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с. 7. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. – М.: Наука, 1987. – 80 с. 8. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физике. – М.: Наука, 1970. – 542 с. 9. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с. 10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с. 11. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 832 с. 13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 576 с. 14. Meleshko V. V. Equilibrium of Elastic Rectangle: Mathieu-Inggris-Pickett Solution Revisited // *Journal of Elasticity*. – 1995. – 40. – P. 207–238.

*Поступила в редколлегию 07.01.12*

*М.В. АРТЮХ*, аспірантка, УІПА, Харків;

*О.М. ЛИТВИН*, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

## **ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЕЛАСТИЧНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

Пропонуються формулювання і доведення теорем про виробничі функції від двох змінних, частинні коефіцієнти еластичності яких є функціями однієї або двох змінних. Наведено приклад виробничої функції, що пов'язана з управлінням урожайністю овочів в залежності від вологості ґрунту та концентрації добрив.

Предлагаются формулировка и доказательство теорем о производственных функциях от двух переменных, частные коэффициенты, эластичности которых являются функциями одной или двух переменных. Приведен пример производственной функции, которая связана с управлением урожайностью овощей в зависимости от влажности грунта и концентрации удобрений.

In this paper the formulation and the proof of theorems of production functions from two variables is offered, particular which factors of elasticity are functions of one or two variables. The example of production function which is connected with management of productivity of vegetables depending on humidity of a ground and concentration of fertilizers is offered.

**Вступ.** Виробничі функції є широко розповсюдженими функціями при моделюванні в економіці. Найбільш поширені у застосуваннях виробничі функції кількох змінних мають сталі частинні коефіцієнти еластичності. Але на практиці виникають ситуації, коли частинні коефіцієнти еластичності деяких виробничих функцій можуть бути відомими функціями однієї або двох змінних. Враховуючи, що дивіденда 2-го роду має чіткий економічний зміст, пропонується використовувати для аналізу виробничих функцій дивідендальні та мультигральні числення другого роду.

**Аналіз останніх досліджень з побудови виробничих функцій із заданими коефіцієнтами еластичності.** В теперішній час існує багато виробничих функцій, які використовуються для математичного моделювання економічних процесів [1,4]. Але на практиці виникають ситуації, коли коефіцієнти еластичності цих функцій можуть бути змінними. Тому актуальною є розробка теорії побудови виробничих функцій із змінними коефіцієнтами еластичності.

Математичний апарат дивідендальних та мультигральних числень, розроблених в праці [2] відрізняється тим, що дивіденда 2-го роду

$$\leftarrow \frac{\delta u(x)}{\delta x} \rightarrow := \lim_{h \rightarrow 1} \leftarrow \frac{u(x \times h) - u(x)}{h} \rightarrow$$

має чіткий економічний зміст – вона є коефіцієнтом еластичності функції



$u(x)$  в залежності від  $x$  (тут і далі знак « $\longleftrightarrow$ » означає логарифмування: він використовується з метою досягнення повної аналогії з похідною).

Зокрема, це виробничі функції для дослідження економіки управління врожайністю овочів в залежності від вологості ґрунту та в залежності від концентрації добрив [3]. Наприклад, процес, який описується функцією  $u(x, y)$ , яка має коефіцієнти еластичності, що залежать від змінних  $x$  та  $y$ : якщо  $u(x, y)$  – врожайність овочів,  $x$  ( $л/м^3$ ) – вологість ґрунту,  $y$  ( $кг/м^3$ ) – концентрація добрив (мінеральних, органічних), то коефіцієнт еластичності  $E_x[u] = xu'_x / u$  є величиною, яка залежить від  $x$  при фіксованому  $y$ . Оскільки легко зрозуміти, що при малій вологості ґрунту для підвищення врожайності можна збільшувати обсяги зрошення ґрунту, а для випадку, коли вологість досягає деякої оптимальної величини, врожайність для заданого  $y$  буде найвищою. Аналогічно коефіцієнт еластичності  $E_y[u] = yu'_y / u$  є величиною, яка залежить від  $y$  при фіксованому  $x$ , оскільки легко зрозуміти, що при малій концентрації добрив у ґрунті для підвищення врожайності можна збільшувати обсяги внесення добрив, а для випадку, коли концентрація добрив у ґрунті досягає деякої оптимальної величини, врожайність для заданого  $x$  буде найвищою і т.д..

Тому актуальною є розробка теорії побудови виробничих функцій частинні коефіцієнти еластичності яких залежать від однієї або двох змінних з використанням дивідіріального та мультигрального числення для конкретних галузей економіки народного господарства.

**Постановка задачі.** В даній роботі розв'язується наступна задача: побудувати і дослідити функції двох змінних  $u(x, y)$ , частинні коефіцієнти еластичності яких за змінними  $x$  та  $y$  відповідно є функціями однієї змінної  $x$  чи  $y$  або двох змінних  $x, y$ .

**Математична модель.** Нижче сформулюємо і доведемо теореми, що стосуються побудови явних формул для функцій двох змінних  $u(x, y)$ , які мають задані змінні частинні коефіцієнти еластичності.

**Теорема 1.** *Розв'язок системи дивідіріальних рівнянь*

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\delta u}{\delta x} \right\rangle = f(y) + x \ln y \cdot g'(x), \\ \left\langle \frac{\delta u}{\delta y} \right\rangle = g(x) + y \ln x \cdot f'(y). \end{cases} \quad (1)$$

*тобто виробнича функція, може бути представлена у вигляді:*

$$u(x, y) = x^{f(y)} y^{g(x)} C, \quad (2)$$

де  $C$  – довільна стала.

**Доведення.** Зауважимо, що система (1) еквівалентна системі нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ u(x, y) \end{cases} = f(y) + x \ln y \cdot g'(x), \quad (3)$$

$$\begin{cases} y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ u(x, y) \end{cases} = g(x) + y \ln x \cdot f'(y).$$

Візьмемо дивіденду 2-го роду по  $x$  від (2):

$$\begin{aligned} \frac{x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{u(x, y)} &= \frac{x \left\{ f(y) x^{f(y)-1} y^{g(x)} + x^{f(y)} \left[ y^{g(x)} \ln y g'(x) \right] \right\} \cdot C}{x^{f(y)} y^{g(x)} \cdot C} = \\ &= \frac{x \cdot f(y) x^{f(y)-1} y^{g(x)} + x \cdot x^{f(y)} y^{g(x)} \ln y g'(x) \cdot C}{x^{f(y)} y^{g(x)} \cdot C} = \\ &= f(y) + x \cdot \ln y g'(x). \end{aligned}$$

Тобто перше твердження теореми 1 доведено.

Візьмемо дивіденду 2-го роду по  $y$  від (2):

$$\begin{aligned} \frac{y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{u(x, y)} &= \frac{y \left\{ g(x) y^{g(x)-1} x^{f(y)} + y^{g(x)} \left[ x^{f(y)} \ln x f'(y) \right] \right\} \cdot C}{x^{f(y)} y^{g(x)} \cdot C} = \\ &= \frac{y \cdot g(x) y^{g(x)-1} x^{f(y)} + y \cdot y^{g(x)} x^{f(y)} \ln x f'(y)}{x^{f(y)} y^{g(x)}} = \\ &= g(x) + y \ln x f'(y). \end{aligned}$$

Тобто доведено і друге твердження теореми 1.

Таким чином, теорема 1 доведена.

**Теорема 2.** Виробнича функція  $u(x, y)$ , яка задовольняє наступним умовам:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\delta u}{\delta x} \right\rangle = f(x), \\ \left\langle \frac{\delta u}{\delta y} \right\rangle = g(y), \end{cases} \quad (4)$$

може бути представлена у вигляді:

$$u(x, y) = e^{\int \frac{f(x)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(y)}{y} dy} \cdot C, \quad (5)$$

де  $C$  – довільна стала.

**Доведення.** Система (4) еквівалентна такій системі нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ u(x, y) \end{cases} = f(x), \quad (6)$$

$$\begin{cases} y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ u(x, y) \end{cases} = g(y).$$

Візьмемо дивідіру 2-го роду по  $x$ , отримаємо:

$$\frac{\delta u(x, y)}{\delta x} \rightarrow = \frac{x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{u(x, y)} = \frac{x \cdot e^{\int \frac{f(x)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(y)}{y} dy} \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot C}{e^{\int \frac{f(x)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(y)}{y} dy} \cdot C} = f(x).$$

Тобто перше твердження теореми 2 доведено.

Візьмемо дивідіру 2-го роду по  $y$ , отримаємо:

$$\frac{\delta u(x, y)}{\delta y} \rightarrow = \frac{y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{u(x, y)} = \frac{y \cdot e^{\int \frac{f(x)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(y)}{y} dy} \cdot \frac{g(y)}{y} \cdot C}{e^{\int \frac{f(x)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(y)}{y} dy} \cdot C} = g(y).$$

Тобто доведено і друге твердження теореми 2.

Таким чином, теорема 2 доведена.

**Теорема 3.** Якщо виробнича функція  $u(x, y)$  має коефіцієнти еластичності:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta x} \right\rangle = f(x, y) + x \cdot \left( \int \frac{g(x, y)}{y} dy \right)'_x, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta y} \right\rangle = g(x, y) + y \cdot \left( \int \frac{f(x, y)}{x} dx \right)'_y, \end{cases} \quad (7)$$

вона може бути представлена у вигляді:

$$u(x, y) = e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} \cdot C, \quad (8)$$

де  $C$  – довільна стала.

**Доведення.** Система (7) еквівалентна такій системі нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = f(x, y) + x \cdot \left( \int \frac{g(x, y)}{y} dy \right)'_x, \\ y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = g(x, y) + y \cdot \left( \int \frac{f(x, y)}{x} dx \right)'_y. \end{cases} \quad (9)$$

Візьмемо дивідіру 2-го роду по  $x$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta x} \right\rangle &= \frac{x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{u(x, y)} = \\ &= \frac{x \left[ \frac{f(x, y)}{x} e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} + e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} \cdot \left( \int \frac{g(x, y)}{y} dy \right)'_x \right] C}{e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} \cdot C} = \\ &= f(x, y) + x \cdot \left( \int \frac{g(x, y)}{y} dy \right)'_x. \end{aligned}$$

Тобто перше твердження теореми 3 доведено.

Візьмемо дивідіру 2-го роду по  $y$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta y} \right\rangle &= \frac{y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{u(x, y)} = \\ &= \frac{y \left[ \frac{g(x, y)}{y} e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} + e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} \cdot \left( \int \frac{f(x, y)}{x} dx \right)'_y \right] C}{e^{\int \frac{f(x, y)}{x} dx} \cdot e^{\int \frac{g(x, y)}{y} dy} \cdot C} = \\ &= g(x, y) + y \cdot \left( \int \frac{f(x, y)}{x} dx \right)'_y. \end{aligned}$$

Тобто друге твердження теореми 3 доведено.

Таким чином, теорема 3 доведена.

**Теорема 4.** Якщо виробнича функція  $u(x, y)$  має частинні коефіцієнти еластичності, які залежать від обох змінних наступного вигляду:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta x} \right\rangle = f(x) + x \cdot \ln x \cdot f'_x(x) + \ln y, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta y} \right\rangle = g(y) + y \cdot \ln y \cdot g'_y(y) + \ln x, \end{cases} \quad (10)$$

тоді вона має бути представлена у вигляді:

$$u(x, y) = x^{f(x)} \cdot y^{g(y)} \cdot x^{\ln y} \cdot C, \quad (11)$$

де  $C$  – довільна стала.

**Доведення.** Система (10) еквівалентна такій системі нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = f(x) + x \cdot \ln x \cdot f'_x(x) + \ln y, \\ y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = g(y) + y \cdot \ln y \cdot g'_y(y) + \ln x. \end{cases} \quad (12)$$

Візьмемо дивіденду 2-го роду по  $x$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta x} \right\rangle &= \frac{x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{u(x, y)} = \frac{x \left\{ \left( x^{f(x)} \right)'_x y^{g(y)} x^{\ln y} + y^{g(y)} x^{f(x)} \left( x^{\ln y} \right)'_x \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = \\ &= \frac{x \left\{ \left[ f(x) x^{f(x)-1} x'_x + x^{f(x)} \ln x \cdot f'_x(x) \right] y^{g(y)} x^{\ln y} + y^{g(y)} x^{f(x)} \left[ \ln y \cdot x^{\ln y-1} \cdot x'_x \right] \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = \\ &= \frac{x \left\{ f(x) x^{f(x)-1} \cdot y^{g(y)} x^{\ln y} + x^{f(x)} \ln x \cdot f'_x(x) \cdot y^{g(y)} x^{\ln y} + y^{g(y)} x^{f(x)} \ln y \cdot x^{\ln y-1} \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = \\ &= f(x) + x \cdot \ln x \cdot f'_x(x) + \ln y. \end{aligned}$$

Тобто перше твердження теореми 4 доведено.

Візьмемо дивіденду 2-го роду по  $y$ , отримаємо:

$$\left\langle \frac{\delta u(x, y)}{\delta y} \right\rangle = \frac{y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{u(x, y)} = \frac{y \left\{ \left( y^{g(y)} \right)'_y x^{f(x)} x^{\ln y} + y^{g(y)} \left( x^{f(x)} x^{\ln y} \right)'_y \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y \left\{ \left[ g(y) y^{g(y)-1} y'_y + y^{g(y)} \ln y \cdot g'_y(y) \right] x^{f(x)} x^{\ln y} + y^{g(y)} \left( x^{f(x)} x^{\ln y} \right)'_y \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = \\
&= \frac{y \left\{ \left[ g(y) y^{g(y)-1} y'_y + y^{g(y)} \ln y \cdot g'_y(y) \right] x^{f(x)} x^{\ln y} \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} + \frac{y \left\{ y^{g(y)} \left( x^{f(x)} x^{\ln y} \right)'_y \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = \\
&= \frac{y \left\{ g(y) y^{g(y)-1} y'_y \cdot x^{f(x)} x^{\ln y} + y^{g(y)} \ln y \cdot g'_y(y) \cdot x^{f(x)} x^{\ln y} \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} + \\
&\quad + \frac{y \left\{ y^{g(y)} \left[ \left( x^{f(x)} \right)'_y x^{\ln y} + x^{f(x)} \left( x^{\ln y} \right)'_y \right] \right\} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = \\
&= \frac{y \cdot g(y) y^{g(y)-1} \cdot 1 \cdot x^{f(x)} x^{\ln y} + y \cdot y^{g(y)} \ln y \cdot g'_y(y) \cdot x^{f(x)} x^{\ln y}}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} + \\
&\quad + \frac{y \cdot y^{g(y)} x^{f(x)} x^{\ln y} \ln x \cdot \frac{1}{y} \cdot C}{x^{f(x)} y^{g(y)} x^{\ln y} \cdot C} = g(y) + y \cdot \ln y \cdot g'_y(y) + \ln x.
\end{aligned}$$

Тобто друге твердження теореми 4 доведено.

Таким чином, теорема 4 доведена.

**Перспективи подальших досліджень.** В подальшому планується побудувати відповідні виробничі функції для випадку, коли їх коефіцієнти еластичності будуються із врахуванням експериментальних даних.

**Висновки.** Таким чином, в роботі наведені, сформульовані і доведені теореми, які дозволяють побудувати виробничі функції у вигляді, який явно залежить від частинних коефіцієнтів еластичності цих функцій.

**Список літератури:** 1. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с. 2. *Литвин О.М.* Дивідіріальні та мультигральні числення. Монографія. – К.: Наук. думка, 2006. – 144 с. 3. *Муравин Э.А.* Агрохимия. – М.: КолосС, 2003. – 384 с. 4. *Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л.* Производственные функции в экономическом анализе. – Вильнюс: Минтис, 1984. – 308 с.

Надійшла до редколегії 15.12.2011

**I. С. БЕЛОВ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

## ПРАВИЙ ЗСУВ НЕВІД'ЄМНИХ КОСИНУС – МНОГОЧЛЕНІВ

Досліджена поведінка невід'ємних косинус – многочленів степеня два при правому зсуві коефіцієнтів. Встановлено, що у косинус-многочленів з невід'ємними коефіцієнтами при правому зсуві зростає мінімальний вільний член.

Исследовано поведение неотрицательных косинус – многочленов степени два при правом сдвиге коэффициентов. Установлено, что у косинус – многочленов с неотрицательными коэффициентами при правом сдвиге возрастает минимальный свободный член.

The behavior non-negative cosine – polynomials of degree two at right shift coefficients is investigated. It was established that for the cosine-polynomials with nonnegative coefficients of the right shift increases the minimum free term.

**Вступ.** Тригонометричний косинус – многочлен степеня  $n$

$$A(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$$

називається невід'ємним, якщо  $A(\theta) \geq 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ). Основні результати теорії невід'ємних тригонометричних многочленів наведені в [1]. В папері продовжено дослідження властивостей невід'ємних косинус – многочленів, розпочате в [2],[3]. Якщо  $a_0 = E(a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$  є найменше значення вільного члена  $a_0$ , при якому  $A(\theta)$  є невід'ємним, будемо казати, що відповідний косинус - многочлен має *нормальну форму*. Чисельний експеримент свідчить, що при *правому зсуві* коефіцієнтів

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

відповідне значення  $E(a_1, a_2, \dots, a_n)$  в багатьох випадках погіршується

**Постановка задачі.** Ми розглянемо випадок  $n = 2$ , та визначимо область коефіцієнтів, в якій  $E(a_1, a_2) \leq E(0, a_1, a_2)$ .

**Розв'язок задачі.**

Спочатку знайдемо вигляд одиничної кулі  $E(a_1, a_2) = 1$ . Косинус – многочлен  $A(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta$  приймає найменше у  $[0, \pi]$  значення  $\mu$  або у граничних точках  $0, \pi$ , або всередині проміжку  $[0, \pi]$ . В першому

випадку умова  $\mu \geq 0$  еквівалентна нерівності  $\xi = a_0 + a_2 - |a_1| \geq 0$ . У другому випадку за допомогою диференціювання знаходимо  $a_0 \geq \eta = a_2 + \frac{a_1^2}{8a_2}$ . Звідси

одичина куля  $E(a_1, a_2) = 1$  визначається нерівностями

$$\begin{cases} 1 \geq |a_1| - a_2 \\ 1 \geq a_2 + \frac{a_1^2}{8a_2} \end{cases}$$

та має вигляд еліпса

$$\frac{a_1^2}{2} + 4\left(a_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

що спирається на дотичні до нього в точках  $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , проведені з точки  $(-1, 0)$  (рис. 1).

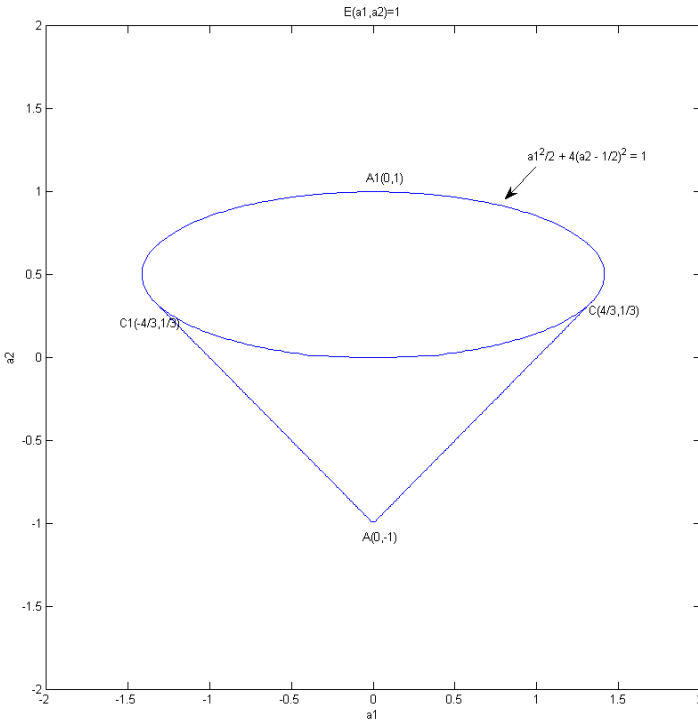


Рисунок 1 – Одичина куля в просторі невід’ємних косинус-многочленів степеня 2.



У той же спосіб знаходиться одинична куля  $E(0, a_1, a_2) = 1$ . Зрозуміло, що в цьому випадку  $a_0 \geq \xi = |a_2| - a_1$ . Більш складні обчислення дають вираз

$$\text{для } \eta \quad a_0 \geq \eta = \frac{1}{54a_2^2} \left( 27a_1a_2^2 - 2a_1^3 + 2(a_1^2 + 9a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Звідси одинична куля  $E(0, a_1, a_2) \leq 1$  визначається нерівностями

$$\begin{cases} 1 \geq |a_2| - a_1 \\ 1 \geq \frac{1}{54a_2^2} \left( 27a_1a_2^2 - 2a_1^3 + 2(a_1^2 + 9a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right) \end{cases}$$

а її границя має вигляд частини кривої шостого порядку

$$54a_2^2 = 27a_1a_2^2 - 2a_1^3 + 2(a_1^2 + 9a_2^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (2)$$

яка обмежена зліва січними  $a_2 - a_1 - 1 = 0, a_2 + a_1 + 1 = 0$ , проведеними з точки  $(-1, 0)$  (рис. 2).

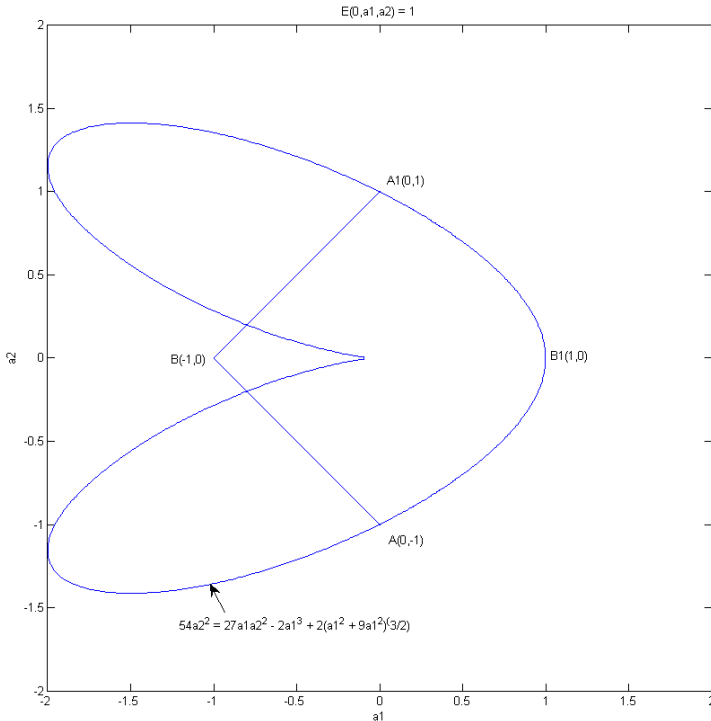


Рисунок 2 – Одинична куля в просторі невід’ємних косинус-многочленів степеня 3 зі зсувом.

Об'єднуючи рис.1 і рис.2 маємо спільний рис.3

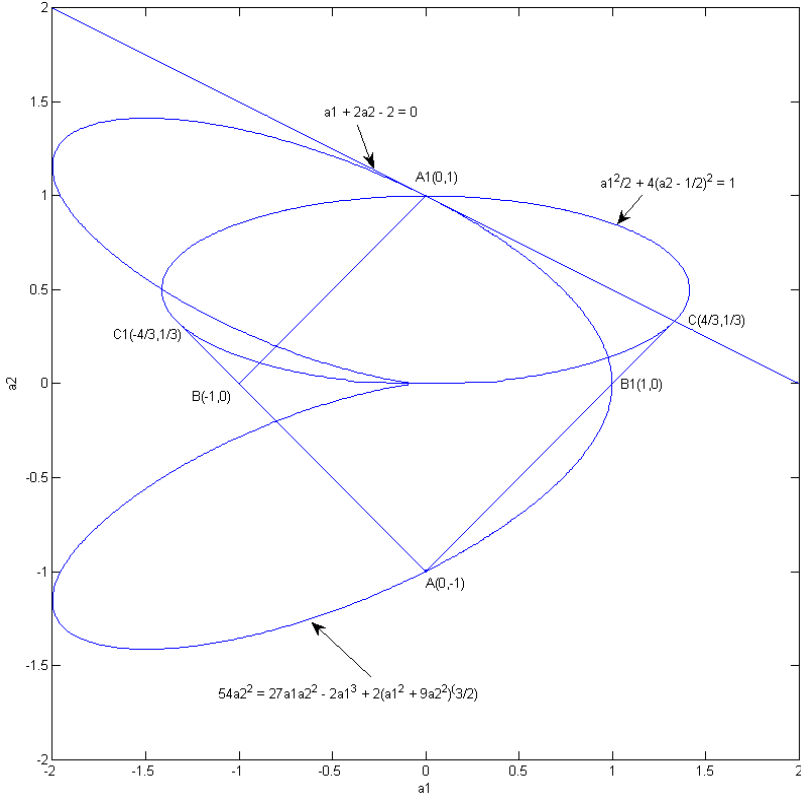


Рисунок 3 – Порівняння одиничних куль.

З нього усвідомлюємо, що для *невід'ємних*  $a_1, a_2 \geq 0$  частина кулі  $E(a_1, a_2) = 1$  містить в собі відповідну частину кулі  $E(0, a_1, a_2) = 1$ . Для цього достатньо перевірити, що ламана  $B_1CA_1$  не належить кулі  $E(0, a_1, a_2) = 1$ . Дійсно, точки відрізка  $B_1C$  мають координату  $a_1 > 1$ , а за нерівністю Фейєра-Егерварі-Саса [ФЕС] для точок кулі  $|a_1| \leq 1$ . Справді, ФЕС стверджує [1], що для коефіцієнтів невід'ємного косинус – многочлена степеня  $n$

$$B(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n b_k \cos k\theta \geq 0$$

є справедливими оцінки

$$|b_k| \leq 2 \cos \frac{\pi}{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 2}.$$

Щодо відрізка  $CA_1$  легко пересвідчитись в його належності до *дотичної* до опуклої частини кривої (2) в точці  $A_1$ . Оскільки  $CA_1$  є хордою еліпса (1), остаточно маємо

$$\{(a_1, a_2) | E(0, a_1, a_2) \leq 1, a_1, a_2 \geq 0\} \subset \{(a_1, a_2) | E(a_1, a_2) \leq 1, a_1, a_2 \geq 0\}.$$

Отже, доведена

**Теорема.** Для невід'ємних  $a_1, a_2 \geq 0$

$$E(a_1, a_2) \leq E(0, a_1, a_2).$$

**Висновки.** Припущення про погіршення  $E(a_1, a_2, \dots, a_n)$  при правому зсуві коефіцієнтів перевірено при  $n = 2$  для додатних  $a_1, a_2 > 0$ . Випадок  $n > 2$  потребує додаткових досліджень.

**Список літератури:** 1. *B.Dumitrescu* Posiyive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications.-Springer.-2007.-245p. 2. *І.С.Белов* Про одну теорему У.Х.Янга.- ВІСНИК НТУ «ХПІ».- вип.13.-2011.- с.9-14. 3. *І.С.Белов* Про LMI- характеристики невід'ємних косинус-многочленів.- ВІСНИК НТУ «ХПІ».- вип.42.-2011.- с.15-21.4. *С.Б.Гашков* Неравенство Фейера-Егервари-Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов.- Математическое просвещение, сер.3, вып.90.-2005.-с.68-75.

*Надійшла до редколегії 25.11.2011*

УДК 681.518.3

**А.М. БОРИСЕНКО**, д-р техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»;  
**О.Ф. ЄНИКЄЄВ**, канд. техн. наук, доцент, УкрДАЗТ, Харків;  
**І.С. ЗИКОВ**, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

## **АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ДВОРІВНЕВОЇ СИСТЕМИ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛМАЗНОГО ШЛІФУВАННЯ**

Стаття присвячена моделюванню комп'ютерної системи підвищення ефективності технологічного процесу алмазного шліфування, архітектура якої розроблена з використанням ієрархічного принципу, методів безпосереднього цифрового та управління за відхиленням, непрямого контролю якості обробленої поверхні деталі та сигналу зворотного зв'язку про стан шорсткості у вигляді девіацій швидкості обертання шліфувального круга.

Статья посвящена моделированию компьютерной системы повышения эффективности технологического процесса алмазного шлифования, архитектура которой разработана с использованием иерархического принципа, методов непосредственного цифрового и управления по отклонению, косвенного контроля качества обработанной поверхности детали и сигнала обратной связи о состоянии шероховатости в виде девиаций скорости вращения шлифовального круга.

The article is dedicated to modeling of the computer system of the efficiency increasing of the technological process diamond polishing, which architecture is designed with using of the hierarchical principle.

ple, methods directly digital and management on deflection, indirect checking quality processed surfaces of the detail and signal to feedback about condition of the roughness the manner of deviations of the velocities of the rotation of the polishing circle.

**Вступ.** Побудова замкнених систем зі зворотнім зв'язком по стану мікронерівностей поверхні деталі, що оброблюється шліфувальним верстатом, неможлива у зв'язку з відсутністю первинних перетворювачів. Автори пропонують використання девіації швидкості обертання шліфувального круга в якості вхідного сигналу для оцінювання мікронерівностей [1]. Отримання заданої якості обробленої поверхні деталі, яка встановлюється виробничим завданням у вигляді відповідного квалітету чистоти, виключає брак й дає підприємству економію електричної енергії.

**Концепція підвищення ефективності алмазного шліфування.** Канал зворотного зв'язку системи отримує вхідну інформацію шляхом вимірювань миттєвої швидкості обертання шліфувального круга з подальшим виділенням із її часової реалізації сигналу девіацій. Еталонні рівні девіацій визначено на основі квалітетів чистоти та внесено до банку даних каналу у вигляді нормативів. Девіації є джерелом непрямої інформації про фактичні мікронерівності та сигналом зворотного зв'язку, який містить в собі інформацію про відхилення прогнозованого квалітету чистоти від встановленого програмою обробки партії деталей. У якості впливів на виконуючі механізми верстату система застосовує поперечну та повздовжню подачі, а також кутову швидкість обертання шліфувального круга.

При розробці архітектури системи (рис. 1) знайшли застосування ієрархічний принцип, непрямий контроль мікронерівностей, методи управління зі зворотнім зв'язком по стану, покоординатного та безпосереднього цифрового управління з використанням мікроконтролерів.

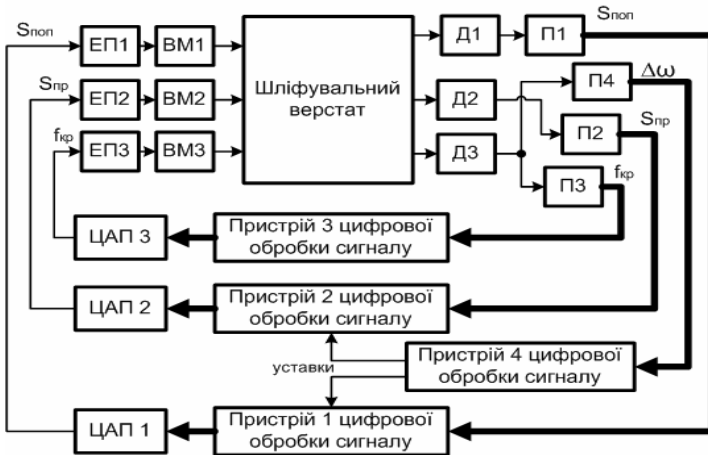


Рисунок 1 – Архітектура дворівневої комп'ютерної системи для підвищення ефективності алмазного шліфування на основі непрямого контролю мікронерівностей поверхні деталі, що оброблюється верстатом.

Перший рівень утворюють канали для завдання поперечної та повздовжньої подачі, а також середньої швидкості обертання шліфувального круга. Вони реалізують принцип управління за відхиленням поточних значень вказаних параметрів від встановлених банком даних для заданого квалітету частоти. Впливи на виконуючі механізми верстату формуються ними під час прямої та зворотної ходи алмазного інструменту. Технічну реалізацію каналів проведено на основі вимог по швидкодії перетворення, а також з урахуванням технологічних особливостей шліфувальних верстатів:

- підтримка постійної середньої швидкості обертання шліфувального круга; встановлено, що у цьому випадку сигнал девіацій є результатом дії сили різання матеріалу заготівлі і може бути застосованим комп'ютерною системою для непрямого оцінювання поточної шорсткості;
- впливи на виконуючі механізми шліфувального верстату формуються пристроями (1 і 2) цифрової обробки сигналів з урахуванням корегуючих уставок каналу зворотного зв'язку.

Другий рівень системи на основі непрямого контролю мікронерівностей реалізує принцип управління зі зворотнім зв'язком за станом. Пристрій 4 шляхом вимірювань миттєвої швидкості обертання шліфувального круга та за допомогою інформаційної технології обробки цього сигналу визначає прогнозований квалітет чистоти. Технологія обробки складається з таких обчислювальних процедур: виділення сигналу девіацій та подання його обмеженим рядом Фур'є; визначення діючого значення та його порівняння з еталонним рівнем, котрий встановлюється програмою обробки партії деталей. Якщо сигнал девіацій перевищує цей рівень, то пристрій 4 цифрової обробки сигналу миттєвої швидкості корегує величини подачі. Впливи на пристрої 1 та 2 цифрової обробки сигналів у вигляді корегуючих уставок подаються під час пауз між прямим та зворотнім ходом алмазного інструменту.

**Моделювання каналів завдання подачі.** В динамічному відношенні первинний перетворювач поперечної подачі шліфувального круга подаємо аперіодичним ланцюгом з запізненням та деякою смугою нечутливості ( $\Delta_1$ ) навколо номінальної характеристики перетворення

$$W_1(p) = \frac{\Delta_1 k_{П1} e^{-p\tau_{П1}}}{T_{П1} p + 1}, \quad (1)$$

де  $k_{П1}$ ,  $\tau_{П1}$ ,  $T_{П1}$  – відповідно коефіцієнт передачі, запізнення та постійна часу блоку П1.

Похибка дискретизації аналогового сигналу цим блоком знаходить своє кількісне відображення у коливаннях його вихідного коду. На основі статис-

тичної обробки експериментальних даних з використанням інформаційного підходу визначено закон розподілу [2]

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} \text{ при } x \in (-0.12, 0.12), \text{ та похибку } \Delta_1 = \sigma e^{\frac{\mu_1}{\sigma}} = 0.05.$$

Передатну функцію екстраполятора нульового порядку подаємо у такому вигляді [3]:

$$W_2(p) = (1 - e^{-p\tau_r}) / p. \quad (2)$$

Передатна функція пристрою 1 цифрової обробки сигналу поперечної подачі як деякого довільного цифрового фільтру подається у вигляді [3]

$$W_3(p) = \frac{1}{\tau_r} (1 - e^{-p\tau_r}). \quad (3)$$

Передатні функції блоків ЕП1 та ВМ1 отримані у такому вигляді [2]:

$$W_4(p) = \frac{k_M T_{k1}^2}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (4)$$

де

$$a_4 = \tau_{m\epsilon} T_{m\epsilon} T_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{O}m} T_M,$$

$$a_3 = T_M [(\tau_{m\epsilon} + T_{m\epsilon}) T_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{O}m} + \tau_{m\epsilon} T_{m\epsilon} (T_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{O}m})] + \tau_{m\epsilon} T_{m\epsilon} T_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{O}m};$$

$$a_2 = T_M [T_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{O}m} + \tau_{m\epsilon} T_{m\epsilon} + (\tau_{m\epsilon} + T_{m\epsilon})(T_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{O}m})] + (\tau_{m\epsilon} + T_{m\epsilon}) T_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{O}m} + \tau_{m\epsilon} T_{m\epsilon} (T_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{O}m});$$

$$a_1 = T_M (T_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{O}m} + \tau_{m\epsilon} + T_{m\epsilon}) + T_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{O}m} + \tau_{m\epsilon} T_{m\epsilon} + (\tau_{m\epsilon} + T_{m\epsilon})(T_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{O}m}),$$

$$a_0 = \tau_{m\epsilon} + T_{m\epsilon} + T_{\mathcal{E}} + T_{\mathcal{O}m}.$$

У результаті аналізу структурної схеми та перетворювань маємо таку передатну функцію каналу:

$$W_5(p) = \frac{k_M}{p^2 (a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)}. \quad (5)$$

На основі аналізу полюсів виразу (5) встановлено, що канал для завдання поперечної подачі шліфувального круга без суттєвих втрат точності подається такою передатною функцією

$$W_5(p) = \frac{b_1 p}{(\zeta T_{33} p + 1) \left( \frac{T_{33}}{\zeta} p + 1 \right) (T_{34} p + 1)}. \quad (6)$$

Блоки П1, Р1 та ЕП1 вносять запізнення, яке складає  $2T_0$ . З урахуванням цього *z-перетворення* виразів для передатних функцій каналу за управляючим та збудувальним впливами мають такий вигляд:

$$W_6(z^{-1}) = z^{-2} \frac{b_0^\circ + b_1^\circ z^{-1} + b_2^\circ z^{-2} + b_3^\circ z^{-3}}{1 + a_1^\circ z^{-1} + a_2^\circ z^{-2} + a_3^\circ z^{-3}}, \quad W_7(z^{-1}) = \frac{k_M T_M (1 - l_4) z^{-1}}{1 - (1 + l_4) z^{-1} + l_4 z^{-2}}, \quad (7)$$

де  $b_0^\circ = A_1 + A_2 + A_3$ ,  $b_1^\circ = -[A_1 + A_2 + A_3 + A_1(l_2 + l_3) + A_2(l_1 + l_3) + A_3(l_1 + l_2)]$ ;

$$b_2^\circ = A_1(l_2 + l_3) + A_2(l_1 + l_3) + A_3(l_1 + l_2) + A_1 l_2 l_3 + A_2 l_1 l_3 + A_3 l_1 l_2;$$

$$b_3^\circ = -(A_1 l_2 l_3 + A_2 l_1 l_3 + A_3 l_1 l_2), \quad a_1^\circ = -(A_1 l_2 l_3 + A_2 l_1 l_3 + A_3 l_1 l_2),$$

$$a_2^\circ = l_2 l_3 + l_1 l_3 + l_1 l_2;$$

$$a_3^\circ = -l_1 l_2 l_3, \quad l_1 = e^{-\frac{T_0}{\zeta T_{33}}}, \quad l_2 = e^{-\frac{\zeta T_0}{T_{33}}}, \quad l_3 = e^{-\frac{T_0}{T_{34}}};$$

$$A_1 = \frac{b_1 T_{34}}{T_{33} T_{34} (\zeta^2 + 1) - \zeta (T_{33}^2 - T_{34}^2)} + \frac{b_1 \zeta}{(\zeta T_{34} - T_{33}) (1 - \zeta^2)},$$

$$A_2 = \frac{b_1 \zeta}{(\zeta T_{34} - T_{33}) (\zeta^2 - 1)}; \quad A_3 = \frac{b_1 T_{34}}{\zeta (T_{33}^2 - T_{34}^2) - T_{33} T_{34} (\zeta^2 + 1)}.$$

В основу розробки пристрою 1 цифрової обробки сигналу поперечної подачі покладено метод його синтезу з використанням еталонної моделі каналу та квадратичного критерію якості. Закон завдання каналом поперечної подачі шліфувального круга сформульовано у такому вигляді:

$$D(z^{-1}) u_t = R_1(z^{-1}) y_{m,t+d+1} - F(z^{-1}) y_t, \quad (8)$$

де  $y_{m,t+d+1}$  – прогнозоване значення вихідного сигналу.

Ступеневі поліноми мають вигляд

$$R_1(z^{-1}) = \frac{\Delta_1 k_M T_M (1 - l_4)}{\varepsilon_{\text{доп}}} z^{-1}, \quad D(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2},$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}.$$

Їхні коефіцієнти визначаються за допомогою наступних виразів:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{a_1^\circ + 1}{a_1^\circ}, \quad f_2 = \frac{a_1^\circ a_2^\circ + a_1^\circ + a_2^\circ}{a_1^\circ a_2^\circ}, \quad g_0 = \frac{b_0^\circ}{a_0^\circ}, \quad g_1 = \frac{b_1^\circ - \frac{b_0^\circ a_1^\circ}{a_0^\circ} + \frac{b_0^\circ (a_1^\circ + 1)}{a_1^\circ}}{a_0^\circ},$$

$$g_2 = \frac{b_2^\circ + \frac{b_1^\circ (a_1^\circ + 1)}{a_1^\circ} + \frac{b_2^\circ (a_1^\circ a_2^\circ + a_1^\circ + a_2^\circ)}{a_1^\circ a_2^\circ} - \frac{b_0^\circ a_2^\circ}{a_0^\circ} - a_1^\circ \left[ b_1^\circ - \frac{b_0^\circ a_1^\circ}{a_0^\circ} + \frac{b_0^\circ (a_1^\circ + 1)}{a_1^\circ} \right]}{a_0^\circ}.$$

На основі виразу (6) отримана передатна функція пристрою 1 цифрової обробки сигналу поперечної подачі шліфувального круга у вигляді [2]

$$W_{П1}(z^{-1}) = \frac{H(z^{-1})B(z^{-1})}{b_0^{\circ}A(z^{-1}) + D(z^{-1})B(z^{-1})}. \quad (9)$$

Коефіцієнти ступеневого поліному  $H(z^{-1})$  мають вигляд:

$$h_0 = \frac{\Delta_1 k_M T_M (1 - l_4)}{\varepsilon_{\text{дон}}} b_0^{\circ}, \quad h_1 = \frac{\Delta_1 k_M T_M (1 - l_4) b_1^{\circ}}{\varepsilon_{\text{дон}} a_1^{\circ}}, \quad h_2 = \frac{\Delta_1 k_M T_M (1 - l_4) b_2^{\circ}}{\varepsilon_{\text{дон}} a_2^{\circ}},$$

$$h_3 = \frac{\Delta_1 k_M T_M (1 - l_4) b_3^{\circ}}{\varepsilon_{\text{дон}} a_3^{\circ}}.$$

Після підстановки коефіцієнтів та математичних перетворень виразу (9) маємо таке:

$$W_{П1}(z^{-1}) = 767.113 \frac{2.3 - 3.453z^{-1} + 1.33z^{-2}}{0.262 + 0.008z^{-1} + 0.2182z^{-2}}. \quad (10)$$

На основі виразів (7) та (10) побудована імітаційна модель каналу для завдання поперечної подачі круга (рис. 2). Поданням вхідного впливу у вигляді функції Хевісайда та імітаційним моделюванням отримано вихідний сигнал (рис. 3).

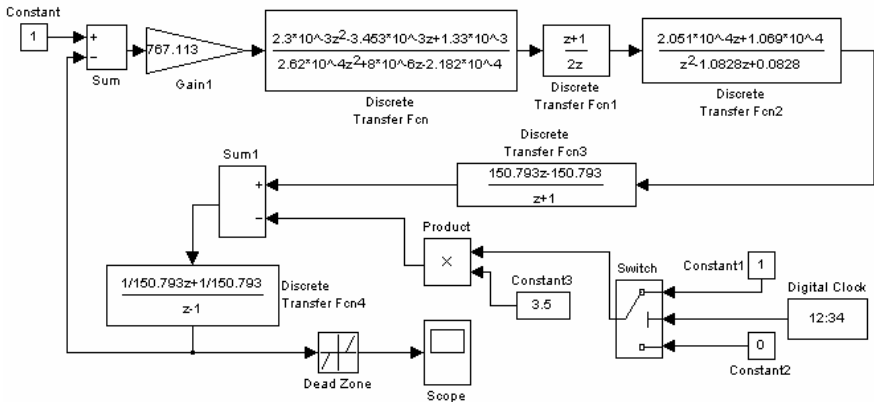


Рисунок 2 – Імітаційна модель каналу для завдання поперечної подачі.

У результаті аналізу структурної схеми каналу для завдання поперечної подачі алмазного інструменту із застосуванням імітаційного моделювання та математичного апарату z-перетворень отримано наступні вирази для передатних функцій за управляючим та збурувальним впливами:



$$W_8(z^{-1}) = z^{-2} \frac{b_0^\circ + b_1^\circ z^{-1} + b_2^\circ z^{-2} + b_3^\circ z^{-3}}{1 + a_1^\circ z^{-1} + a_2^\circ z^{-2} + a_3^\circ z^{-3}}, W_9(z^{-1}) = \frac{k_M z^{-1} [1 - T_M + (T_M - l_4) z^{-1}]}{1 - (1 + l_4) z^{-1} + l_4 z^{-2}}. \quad (11)$$

У виразах враховано запізнювання, яке вносять блоки ПІ, екстраполятор та ЕПІ.

В основу розробки пристрою 2 цифрової обробки сигналу поздовжньої подачі шліфувального круга в умовах дії випадкових завад покладено метод його синтезу з використанням еталонної моделі каналу. Мінімізацією квадратичного критерію якості отримана передатна функція пристрою 2 :

$$W_{ПІ2}(z^{-1}) = (0.04752 + 0.862z^{-1} - 0.823z^{-2}) / (0.374 - 0.374z^{-1}). \quad (12)$$

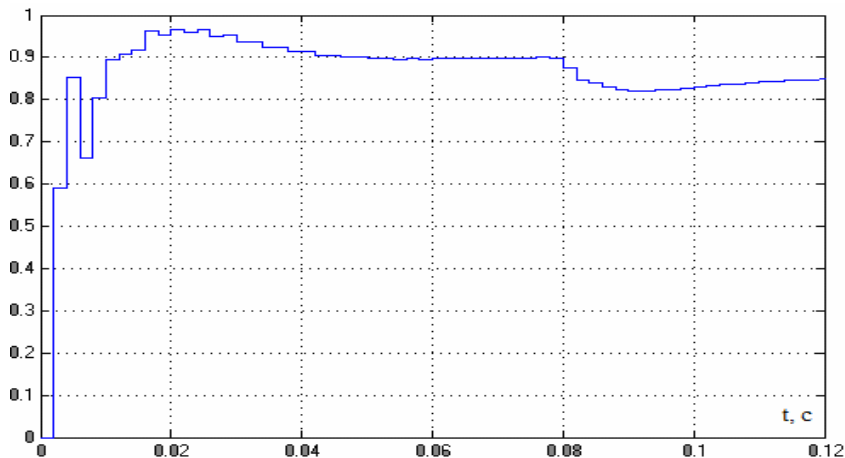


Рисунок 3 – Вихідний сигнал імітаційної моделі.

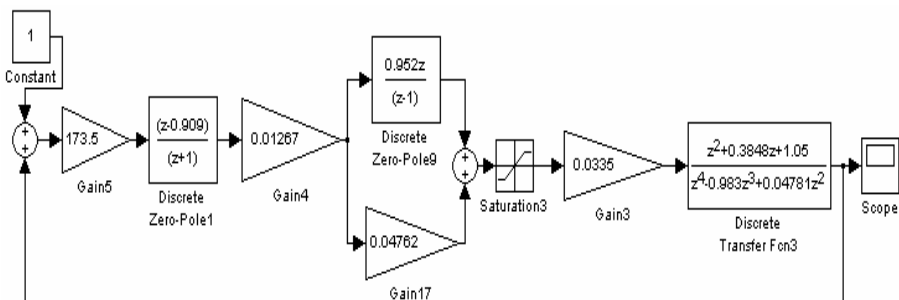


Рисунок 4 – Імітаційна модель каналу завдання поздовжньої подачі.

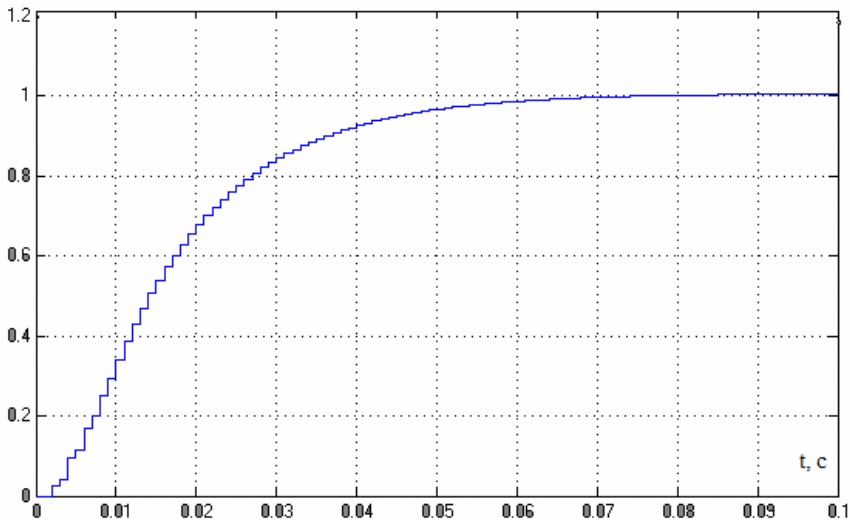


Рисунок 5 – Вихідний сигнал імітаційної моделі.

На основі виразів (11) та (12) побудована імітаційна модель каналу для завдання поздовжньої подачі шліфувального круга (рис. 4). Поданням вхідного впливу у вигляді функції Хевісайда та імітаційним моделюванням отримано вихідний сигнал (рис. 5).

**Моделювання каналу зворотного зв'язку.** У результаті аналізу структурної схеми каналу зворотного зв'язку із застосуванням імітаційного моделювання та апарата z-перетворень отримано вираз для передатної функції:

$$H_{K3}(z^{-1}) = z^{-1} \frac{b_1^* z^{-1}}{1 + a_1^* z^{-1} + a_2^* z^{-2}}. \quad (13)$$

У цьому виразі враховано запізнення каналу та похибка вимірювань девіацій.

В основу розробки пристрою 4 цифрової обробки сигналу миттєвої швидкості в умовах дії випадкових завод покладено метод синтезу з використанням еталонної моделі каналу зворотного зв'язку. Мінімізацією квадратичного критерію якості отримана передатна функція пристрою 4 :

$$W_{П4}(z^{-1}) = (1.54 - 2.096z^{-1} + 0.616z^{-2}) / (2.574 + 0.083z^{-1} - 2.156z^{-2}). \quad (14)$$

На основі виразів (13) і (14) складна імітаційна модель каналу зворотного зв'язку (рис. 6). Поданням вхідного впливу у вигляді функції Хевісайда та імітаційним моделюванням отримано вихідний сигнал (рис. 7).

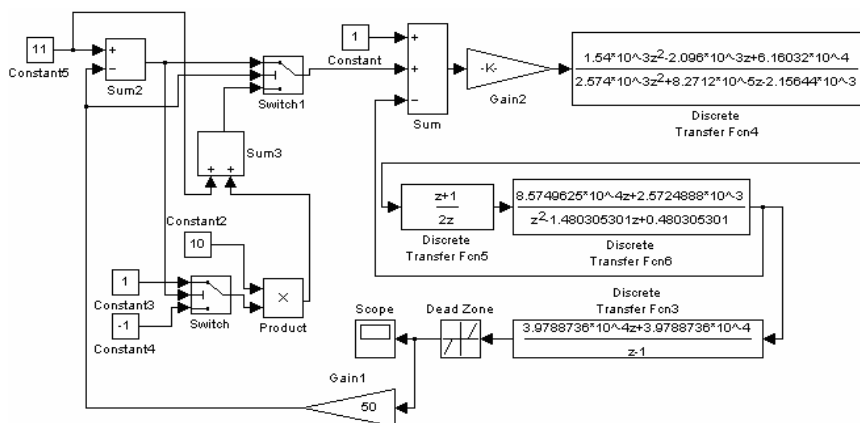


Рисунок 6 – Імітаційна модель каналу зворотного зв'язку.

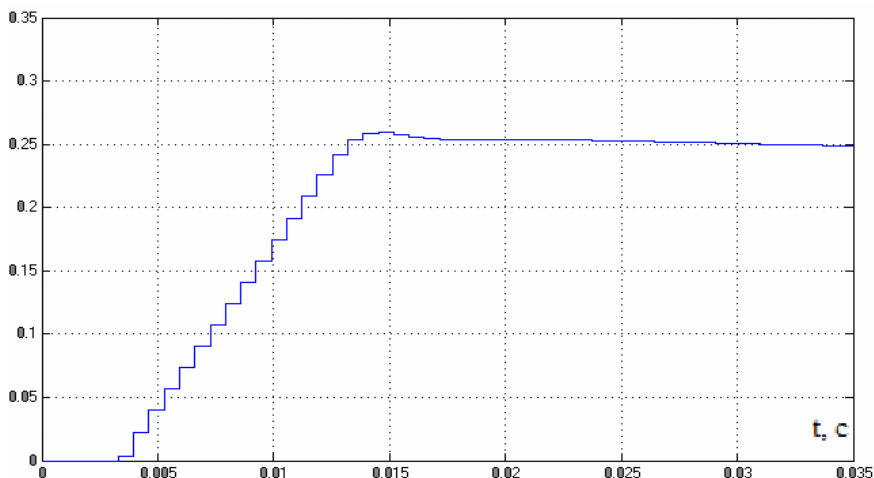


Рисунок 7 – Вихідний сигнал імітаційної моделі.

Інформаційні технології поділу внесків поперечної та поздовжньої подач до вимірювальної часової реалізації девіацій розроблено на основі частотного подання вказаних сигналів. Передатні функції внесків отримано з аналізу детермінованої математичної моделі процесу алмазного шліфування у вигляді [1]

$$W_{\text{поп}}(p) = \frac{K_n T_7 b_1 p^2}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_8 p + 1)(T_9 p + 1)},$$

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{K_n T_7 b_0 p}{(a_1 p + a_0)(T_8 p + 1)(T_9 p + 1)}.$$

Імітаційним моделюванням отримано графіки внесків подач до сигналу

девіацій у межах одного оберту шліфувального круга (рис. 8). Відношення діючих значень сигналів внесків до аналогічного значення сигналу девіацій дало такі значення вагових коефіцієнтів їхнього поділу

$$\gamma_{\text{поп}} = \frac{\Delta\omega_{\text{поп}}}{\Delta\omega} = 0.81 \quad \text{та} \quad \gamma_{\text{пр}} = \frac{\Delta\omega_{\text{пр}}}{\Delta\omega} = 0.586.$$

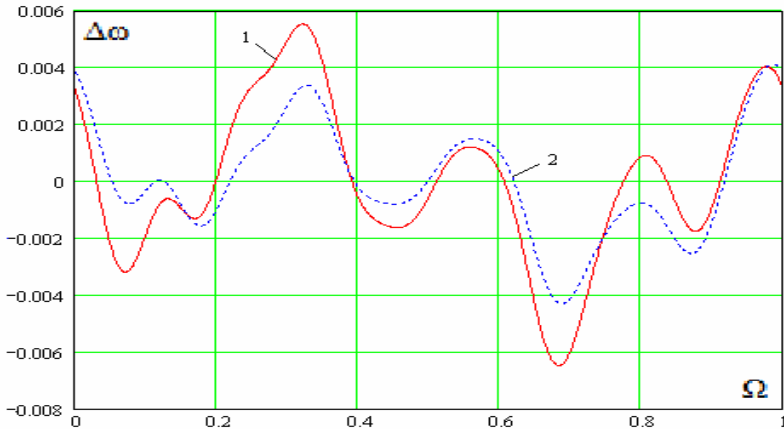


Рисунок 8 – Графіки внесків подач до сигналу девіацій:  
1 – поперечної, 2 – поздовжньої.

На основі вагових коефіцієнтів поділу внесків розроблено наступний алгоритм формування каналом зворотного зв'язку уставок для відповідних пристроїв цифрової обробки сигналів:

- часову реалізацію сигналу девіацій після нормалізації його параметрів подаємо обмеженим рядом Фур'є та визначаємо діюче значення;
- нормовані значення подач одержуємо шляхом множення діючого значення сигналу девіацій на відповідний ваговий коефіцієнт;
- аналізуємо банк даних про еталонні рівні амплітуд девіацій й, якщо буде на те потреба, виконуємо коректування величин подач.

**Висновки.** На основі аналізу вихідних сигналів імітаційних моделей встановлено, що канали задовольняють вимогам комп'ютерної системи по швидкодії перетворення та якості відпрацювання вхідних впливів.

**Список літератури:** 1. Енікеев А.Ф. Оптимальное управление технологическим процессом алмазного шлифования. – Краматорск: ДГМА, 2001. – 160 с. 2. Єнікеев О.Ф., Зиков І.С. Синтез цифрового регулятора поперечної передачі шліфувального круга // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: №57, 2008. – С. 87–93. 3. Єнікеев О.Ф., Суботін О.В. Основи синтезу і проектування слідуючих систем верстатів та промислових роботів: Навчальний посібник – Краматорськ: ДДМА, 2008. – 268 с.

Надійшла до редколегії 25.12.2011

**В.М. БУРЛАЄНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»,  
**О.К. МОРАЧКОВСЬКИЙ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХП»

## **СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТІЛА З ТРИЩИНОЮ, БЕРЕГИ ЯКОЇ КОНТАКТУЮТЬ**

В роботі розглянутий теоретичний підхід щодо скінченноелементного моделювання нелінійної динаміки тіла з тріщиною. Континуальна модель описує коливання тіла у лінійній постановці, та нелінійну поведінку берегів тріщини у контакті. Такий підхід дає можливість досліджувати локалізовані ефекти близько до кінця тріщини. Принцип Гамільтона та тривимірна теорія пружності використовуються у рамках континуальної механіки деформованого тіла щодо конструювання моделі. Модель передбачає малі деформації та матеріальну лінійність. Задача пружнодинаміки сформульована на базі метода скінчених елементів на явній схемі інтегрування за часом. Метод штрафу застосовано у моделюванні контактної взаємодії берегів тріщини.

В работе рассмотрен теоретический подход для конечноэлементного моделирования нелинейной динамики тела с трещиной. Континуальная модель описывает линейные колебания тела и нелинейное поведение границ трещины при контакте. Такой подход даёт возможность исследовать локальные эффекты в области конца трещины. Принцип Гамильтона и трёхмерная теория упругости используется в рамках континуальной механики деформированного тела для построения модели. Модель предусматривает малые деформации и материальную линейность. Задача упругодинамики сформулирована на базе метода конечных элементов с использованием явной схемы интегрирования по времени. Метод штрафа использован для моделирования контактного взаимодействия границ трещины.

A theoretical approach for finite element modeling of nonlinear dynamics of a body with a crack is considered. The model includes coupling between linear vibrations and nonlinear contact phenomenon that allow examining the localized effects in the vicinity of the crack tip. The derivation of the model is carried out within Continuum Mechanics' principles. Hamilton's variation principle and three-dimensional elasticity theory are exploited. The governing equations involve assumptions of small deformations and a material linear elasticity. The electrodynamics problem is formulated based on the finite element method with the explicit time integration scheme for the solution in time. Using the penalty approach is used to impose normal contact constraints onto contactable surfaces.

**Вступ.** Як показано у роботі [1] задача нелінійного динамічного аналізу є важливою сучасною науковою проблемою. Ця задача не відноситься до нової, її ранні дослідження датуються ХІХ століттям. Проте на даний час науковий інтерес до неї оновлений у зв'язку з необхідністю вирішення нових завдань, що враховують зв'язок між процесом коливання та, наприклад, контактом, тертям або руйнуванням. Подібні постановки задач обумовлені появою нових матеріалів, таких як композиційні. Ці матеріали, поряд з їх передовими властивостями по відношенню до звичайних металевих, мають нові типи пошкоджень, аналіз яких вимагає впровадження нових підходів.

У загальному випадку інженерного аналізу будь-яку механічну поведінку конструкції намагаються звести до її лінійної моделі. Так для лінійних коливань на сьогоднішній день розроблені численні та добре відомі методи і техніки структурного аналізу, які є стандартними процедурами більшості скінченноелементних пакетів прикладних програм, як вільно поширюваних,

так і комерційних [2]. Проте в задачах, де нелінійні ефекти є найбільш важливою частиною поведінки конструкції, значні труднощі в їх моделюванні ще існують на сучасний момент. Таким чином, розробка методів розв'язання задач динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують між собою, є одною з важливих цілей механіки суцільного середовища. Прямим інженерним застосуванням цієї задачі є динамічний аналіз панелі з багатошарового композиційного матеріалу, що має дефект при інтерфейсі між окремими шарами матеріалу [3].

Метою поточної статті є побудова загальної скінченноелементної моделі довільного тривимірного тіла з тріщиною, границі якої можуть взаємодіяти між собою за умов динамічної поведінки тіла. Передбачається, що побудована модель може бути легко адаптована в рамках відомих скінченноелементних комплексів, наприклад, таких як *ABAQUS*, *ANSYS*, *MSC. Nastran* та інші для конкретно вибраного об'єкту дослідження.

**Початково-крайова задача.** Коротко розглянемо загальні математичні аспекти задачі пружнодинаміки тіла з тріщиною. Тут і далі в статті ми використовуватимемо позначення, звичайні для літератури по континуальній механіці суцільних середовищ [4].

Розглянемо початкову конфігурацію тіла, як деякої області  $\Omega_0 \in \mathcal{R}^3$  і його межу, як деяку поверхню  $\Gamma^0 \in \mathcal{R}^2$ , рис. а. Враховуємо, що  $\Gamma_t^0 \cup \Gamma_u^0 = \Gamma^0$  та  $\Gamma_t^0 \cap \Gamma_u^0 = \emptyset$ , де  $\Gamma_t^0$  і  $\Gamma_u^0$  – це частини межи тіла із заданими зовнішнім поверхневим навантаженням і переміщеннями, відповідно.

Хай тіло містить зону внутрішнього розриву або тріщину, яка описується поверхнею  $\Gamma_c^0$ . Хай  $\tilde{\Omega}_0$  – це відкрита множина така, що виключає всі розриви, тобто  $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 \setminus \Gamma_c^0$ . У поточній конфігурації, початкові представлення області  $\Omega_0$  і  $\tilde{\Omega}_0$  замінюватимемо на  $\Omega$  і  $\tilde{\Omega}$ , відповідно. Аналогічно поступаем щодо інших позначень, пов'язаних з поточною конфігурацією області. Рух тіла описуватимемо функцією  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ , де  $t \in [0, T]$  – це час,

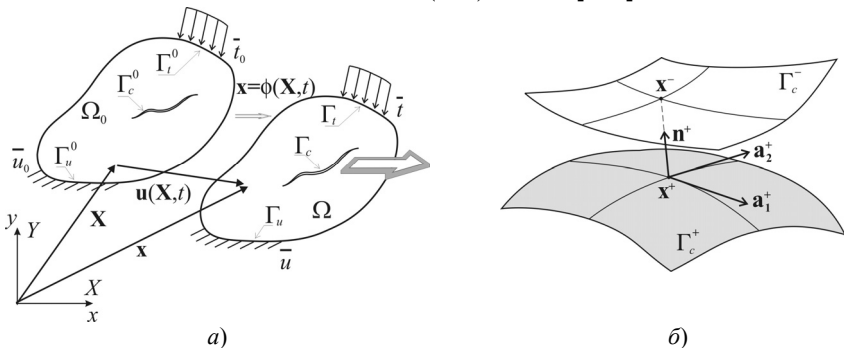


Рисунок – Тіло з тріщиною і його вид у початковій і поточній конфігураціях (а); береги тріщини, які контактують (б).

а  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{x}$  – матеріальна і просторова координати тіла, відповідно. При русі тіла переміщення його довільної матеріальної точки  $\mathbf{X}$  позначатимемо як  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ .

Передбачаємо, що деформації і повороти тіла малі, а також поведінка матеріалу тіла відповідає його деформуванню, що описується узагальненим *законом Гуку*. Тоді, загальна система рівнянь задачі у лагранжевому описі, яка включає рівняння руху, стану, геометричні співвідношення і задані крайові і початкові умови, має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \text{ для } \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ для } \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ для } \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad (3)$$

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{t}_i \text{ на } \Gamma_t \times [0, T], \quad (4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0 \text{ и } \mathbf{v}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_0 \text{ для } \Omega, \quad (6)$$

де  $\rho$  – щільність тіла;  $\mathbf{b}$  – масові сили;  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – тензори напруження і деформацій, відповідно.

Рівняння стану, що визначають взаємодію берегів тріщини, є функцією їх переміщень і контактних сил на них, тобто повинні мати вигляд

$$\mathfrak{N}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{t}_c^+, \mathbf{t}_c^-) = 0 \text{ на } \Gamma_c \times [0, T]. \quad (7)$$

Тут треба розрізнявати  $\Gamma_c^+$  і  $\Gamma_c^-$ , які передбачаються гладкими поверхнями та такими, що  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$ . На поверхнях визначимо: зовнішні нормалі  $\mathbf{n}^+$  і  $\mathbf{n}^-$ , переміщення  $\mathbf{u}^+(\mathbf{X}, t)$  і  $\mathbf{u}^-(\mathbf{X}, t)$  та контактний тиск  $\mathbf{t}_c^+(\mathbf{X}, t) = -\mathbf{t}_c^-(\mathbf{X}, t) = \mathbf{t}_c$ . У разі контакту, маємо поверхню  $\Gamma_c = \Gamma_c^+ = \Gamma_c^-$ , на якій умови безперервності напружень повинні виконуватися, тобто

$$\sigma_{ji}^+ n_j^+ = \sigma_{ji}^- n_j^- = t_i^c \text{ для } \Gamma_c \times [0, T]. \quad (8)$$

Отже, рівняння (1-8) визначають строге формулювання початково-крайової задачі (ПКЗ) пружнодинаміки тіла з тріщиною. Конкретний вигляд закону (7), що визначає умови контакту берегів тріщини, залежить від припущення щодо їх нормальної і тангенціальної взаємодії.

**Контактна модель.** Нормальну взаємодію визначає умова непроникності берегів один в одного. Визначимо функцію проникнення  $g_N$  як у [5],

$$g_N \equiv (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = g_0 + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+, \quad (9)$$

де  $g_0 = (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{n}^+$  – початкове значення функції; точка  $\mathbf{x}^+$  є найближчою

до точки  $\mathbf{x}^-$ , відстань між ними знаходиться з рішення задачі на мінімум,  $\mathbf{n}^+$  - одинична зовнішня нормаль до  $\Gamma_c^+$ , яка є відновлена з  $\mathbf{x}^+$ .

Для того, щоб описати взаємодію поверхонь у горизонтальному напрямі введемо вектор-функцію  $\mathbf{g}_T$ , що визначає проекцію вектора  $(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-)$  на одиничні вектори  $\mathbf{a}_\alpha^+$ ,  $\alpha = 1, 2$  які тангенціальні до поверхні  $\Gamma_c^+$  (рис. б) і такі, що визначають напрямок нормалі:

$$\mathbf{n}^+ = \mathbf{a}_1^+ \times \mathbf{a}_2^+ / |\mathbf{a}_1^+ \times \mathbf{a}_2^+|.$$

Тоді тангенціальна функція  $\mathbf{g}_T$  буде визначена співвідношенням [5],

$$\mathbf{g}_T \equiv [(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+] \mathbf{a}_\alpha^+ = [(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+ + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+] \mathbf{a}_\alpha^+. \quad (10)$$

Тут і далі по тексту, якщо не обумовлене інше, потрібно розуміти підсумовування по індексу що повторюється.

У динамічному аналізі визначаються швидкості введених функцій:

$$\dot{g}_N = (\dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot \mathbf{n}^+, \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_v \mathbf{g}_T = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot (\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha), \quad (12)$$

де  $\mathbf{L}_v$  позначає похідну  $\mathbf{L}_i$  вектора-функції по напрямку вектора швидкості тангенціального руху.

Контактні сили  $\mathbf{t}_c$  на поверхні  $\Gamma_c$  можуть бути розкладені на нормальну  $t_N \mathbf{n}$ , де скаляр  $t_N$  визначає значення контактного тиску, а  $\mathbf{n}$  – це одинична нормаль в точці контакту, і тангенціальну  $\mathbf{t}_T$  складові такі, що

$$t_N = -\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{t}_T = -(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_c. \quad (13)$$

Використовуючи позначення, що введені раніше, умови непроникності можуть бути записані у формі критерію Куна-Такера з теорії оптимізації:

$$t_N \geq 0, \quad g_N \leq 0 \quad \text{та} \quad t_N g_N = 0. \quad (14)$$

У загальному випадку контактні пари на поверхні контакту мають два статуси – *злипання* і *ковзання*. Функція  $\mathbf{g}_T$  ненульова лише в ситуації ковзання, яке асоціюється з явищем тертя. Використовуючи закон Кулона у формі аналогічній з теорії пластичності [6], умови злипання і ковзання берегів тріщини набувають вигляду умов Куна-Такера:

$$\Phi(\mathbf{t}_T, t_N) = |\mathbf{t}_T| - \mu t_N \leq 0, \quad \mathbf{L}_v \mathbf{g}_T = \dot{\gamma} \mathbf{t}_T / |\mathbf{t}_T|, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0. \quad (15)$$

Отже, стан інтерфейсу (7) визначається нерівностями (14) і (15).

**Варіаційне формулювання.** Для розв'язання скінченноелементним методом (СЕМ) задачі, яка сформульована вище, необхідна її варіаційне формулювання. Спочатку визначимо клас просторів невідомих, які є кінематично допустимі функцій, що зазвичай використовуються у СЕМ [7]:



$$u_i(\mathbf{X}, t) \in U, U = \left\{ u_i \mid u_i \in C^0(\Omega), u_i = \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u \right\}. \quad (16)$$

Тоді простір варіацій цих функцій буде наступним:

$$\delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0, U_0 = \left\{ \delta u_i \mid \delta u_i \in C^0(\Omega), \delta u_i = 0 \text{ на } \Gamma_u \right\}. \quad (17)$$

Використовуючи *принцип Гамільтона* запишемо варіаційний функціонал, який в рамках даної задачі міститиме дві частини. Перша – це сума кінетичної і потенційної енергій тіла, а друга – відповідає вкладу контактної взаємодії берегів тріщини. Тоді, ПКЗ динаміки тіла з тріщиною еквівалентна наступній варіаційній задачі.

*Знайти такі функції  $u_i(\mathbf{X}, t) \in U \times [0, T]$ , що у будь-який момент часу  $t \in [0, T]$  приводять до стаціонарності функціонал*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_c} (t_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Відмітимо, якщо умови контакту (14) і (15), що накладаються на поверхню контакту  $\Gamma_c$ , виконуються точно, то контактний доданок в (18) не вносить вклад до загальної енергії. Проте, це можливо лише для точного рішення і не є обов'язковим для варіацій невідомих функцій. З іншого боку, оскільки умова непроникності приводить до нерівності  $t_N \delta g_N \geq 0$ , звідси варіаційна рівність (18) набуває форми варіаційної нерівності [8]:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega \geq \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma, \quad \forall \delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0. \quad (19)$$

Ця нерівність означає, що в задачі, де контактна взаємодія існує, одночасно заздалегідь невідоме ні поле переміщень, ні контактні сили, ні навіть контактні пари на взаємодіючих поверхнях. Вирішення варіаційних нерівностей типу (19) вимагає спеціальних методів, розвинених у варіаційному численні [7]. У літературі з контактної механіки найбільш використовувані є *метод штрафу, метод коефіцієнтів Лагранжа і модифікований метод Лагранжа* [5, 6], які в припущенні про те, що поверхня контакту в даний момент цілком відома, зводять варіаційну нерівність (19) до рівності (18). Остання може бути переписана у вигляді суми відповідних віртуальних робіт, що визначають фізичний сенс доданків в (18):

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{inert} - \delta P^{cont}(t_N, \mathbf{t}_T) = 0, \quad \forall \delta u_i(\mathbf{X}) \in U_0, \quad (20)$$

де визначено віртуальну роботу внутрішніх сил, а також масових сил, зовнішніх поверхневих сил, інерційних сил і контактних сил.

**Скінченноелементна модель.** Скінченновимірна модель варіаційної

задачі (19) має бути сформульована для її вирішення методом СЕМ. Розбиваємо поточну область  $\Omega$  на відповідні елементи  $\Omega_e$  так, що  $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$ . Позначитимемо вузлові координати в поточній конфігурації через  $x_{iI}$ , де  $I = 1 \dots n_N$ . Тоді апроксимація невідомих переміщень функціями із скінченновимірному простору  $U^h \subset U$  виражається як

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_I(t) N_I(\mathbf{X}), \quad (21)$$

де  $N$  – загальне число вузлів в дискретній області;  $\mathbf{u}_I(t)$  – переміщення вузла  $I$  та  $N_I(\mathbf{X})$  – функції форми у вузлі  $I$ . Швидкості і прискорення підраховуються через *матеріальні похідні* від поля переміщень так, що:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}_I(t) N_I(\mathbf{X}), \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{u}}_I(t) N_I(\mathbf{X}). \quad (22)$$

Оскільки варіації невідомих функцій не залежать від часу, то їх апроксимація у скінченновимірному простору  $U_0^h \subset U_0$  може бути наступною:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \delta \mathbf{u}_I N_I(\mathbf{X}), \quad (23)$$

де  $\delta \mathbf{u}_I$  – вузлові віртуальні переміщення.

Підставляючи вирази для переміщень, швидкостей і прискорень невідомих функцій у варіаційну рівність (18), отримаємо його скінченновимірну форму. Оскільки ця рівність повинна виконуватися для будь-яких довільних  $\delta \mathbf{u}_I$  скрізь, окрім як на  $\Gamma_u$ , то у відповідність з рівністю (20) приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\mathbf{M}_{IJ} \ddot{\mathbf{u}}_J = \mathbf{f}_I^{ext} - \mathbf{f}_I^{int} - \mathbf{f}_I^{cont}(t_N, \mathbf{t}_T), \quad \forall I \notin \Gamma_u. \quad (24)$$

У випадку лінійної поведінки системи вектор вузлових внутрішніх сил знаходиться через *матрицю жорсткості*:

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} N_{I,j} \sigma_{ji} d\Omega = \int_{\Omega_0} N_{I,j} c_{ijkl} N_{J,l} J^0 d\Omega_0 u_{kJ} = K_{ikIJ} u_{kJ}. \quad (25a)$$

Вузлові зовнішні сили знаходяться як

$$f_{iI}^{ext} = \int_{\Omega} N_I \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_I \bar{t}_i d\Gamma. \quad (25b)$$

Інерційні вузлові сили обчислюються через *матрицю мас*

$$M_{ijIJ} \ddot{u}_J = f_{iI}^{inert} = \int_{\Omega} \rho N_I \ddot{u}_i d\Omega = \delta_{ij} \int_{\Omega_0} \rho_0 N_I N_J d\Omega_0 \ddot{u}_J. \quad (25c)$$

Виразення для обчислення вектора вузлових контактних сил залежить від методу використовуваного для накладення умови контакту для забезпечення існування варіаційної рівності (19). Наприклад, у разі методу штрафа і для контакту без врахування тертя, контактні сили знаходяться як у [5],

$$f_{iI}^{cont} = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N g_N(\mathbf{u}) \frac{\partial g_N}{\partial u_i} H(g_N) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_N \Phi_I \Phi_J H(g_N) d\Gamma u_{iJ} = K_{IJ}^{cont} u_{iJ}, \quad (25d)$$

де  $\Phi_I = \{ N_I \mathbf{n}^+ \text{ якщо } I \in \Gamma_c^+ \text{ або } N_I \mathbf{n}^- \text{ якщо } I \in \Gamma_c^- \}$ ;  $H(g_H)$  – функція Хевісайда і  $\varepsilon_N$  – параметр штрафу.

Далі, слідуючи за звичайною в СЕМ процедурою, де вузлові сили, матриці мас і жорсткості елементів об'єднуються у відповідні глобальні структури. Передбачаючи, що коливання системи здійснюються з пропорційним демпфіруванням, скінченноелементна система рівнянь задачі динаміки тіла з тріщиною набирає вигляду:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{cont}(\mathbf{U}, t_N, t_T), \quad (26)$$

де  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , і  $\mathbf{K}$  – глобальні матриці мас, демпфірування та жорсткості,  $\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$ , і  $\mathbf{U}$  – глобальні вектори невідомих прискорень, швидкостей і переміщень,  $\mathbf{F}^{ext}$  і  $\mathbf{F}^{cont}$  – глобальні вектори зовнішніх і контактних сил.

Матричне рівняння (26) є системою нелінійних диференціальних рівнянь, яка, в загальному випадку, для знаходження невідомих переміщень вимагає використання *інкрементально-ітераційних процедур* рішення [8].

Інтегрування рівняння (26) за часом може бути виконане з використанням явних або явних схем. Відзначимо, що явні схеми, які використовують скінченнорізницевий оператор, не вимагають розв'язання системи (26) на кожному інкрементальному кроці. Ця їх особливість робить використання явних схем переважачим в задачах динаміки. Тоді вектор прискорення в (26) на початку кожного інкремента ( $i$ ) обчислюється за формулою:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{ext}^{(i)} - \mathbf{I}^{(i)}). \quad (27)$$

Ця операція є чисельно ефективною у випадку діагональної матриці мас  $\tilde{\mathbf{M}}$ , яка може бути легко отримана зі звичайної матриці  $\mathbf{M}$  відомими методами [8].  $\mathbf{I}$  – загальний вектор вузлових сил, що включає внутрішні, зовнішні, контактні і пов'язані з демпфіруванням сили. Значення вектора відоме на поточному кроку інкремента. Знаючи прискорення вузлів, їх швидкості і переміщення знаходяться по *центрально-різницевицх формулах*:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{U}}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(i)} \text{ і } \mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})}, \quad (28)$$

де індекси  $(i-1/2)$  і  $(i+1/2)$  позначають серединні значення інкремента.

**Висновки.** Представлено скінченноелементну модель для вирішення задачі нелінійної динаміки тіла з тріщиною. Континуальна механіка суцільного середовища і контактна механіка використовуються для формулювання зв'язаної задачі про лінійні коливання тіла і математично нелінійної контактної взаємодії між берегами тріщини. Загальну систему скінченноелементних рівнянь отримано з використанням варіаційного підходу, у рамках якого використовувався принцип Гамільтону, а для знаходження контактних сил – методи що аналогічні у теорії оптимізації. Показано, що така система нелінійних диференціальних рівнянь обчислювально ефективно інтегрується за допомогою явної центрально-різницевої схеми.

**Список літератури:** 1. *Nayfeh A.H., Balachandran B.* Applied Nonlinear Dynamics. – Wiley, New York, USA, 1995. – 473 p. 2. *ABAQUS.* User Manual, Dassault Systèmes Simulia Corp. – Providence, RI, USA, 2010. 3. *Burlayenko V.N., Sadowski T.* Influence of skin/core debonding on free vibration behavior of foam and honeycomb cored sandwich plates// Int. J. Non-Linear Mech, 45(10) 2010, p. 959-968. 4. *Mase G.F., Mase G.T.* Continuum Mechanics for Engineers, – CRC Press, Florida, 1992. – 380 p. 5. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. – John Wiley & Sons Ltd, England, 2002. – 441 p. 6. *Laurssen T.A.* Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis. – Springer, Berlin, 2002. – 454 p. 7. *Kikuchi K., Oden J.T.* Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods.– Society for Industry and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988. – 495 p. 8. *Behytschko T., Liu W.K., Morgan B.* Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. – John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2000. – 667 p.

Надійшла до редколегії 05.12.2011

УДК 539.1

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспірант, НТУ «ХПИ»

## КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СОВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Проаналізовано відомі моделі фізичного простору, що реалізують різні теорії пасивного або активного механічного середовища. Дано теоретичне обґрунтування та вказані загальні технічні принципи зниження інерційності хвилі переносу в середовищі Максвелла.

Проанализированы известные модели физического пространства, реализующие различные теории пассивной и активной механической среды. Дано теоретическое обоснование и указаны общие технические принципы снижения инерционности волны переноса в среде Максвелла.

Analyzed by well-known models of the physical space that implement different theory of passive and active mechanical environment. The theoretical rationale and general technical principles are to reduce the inertia of the wave transport in the environment of Maxwell.

**Введение и постановка задачи.** Если внимательно проанализировать поля напряжений и деформаций твёрдого тела, как это сделано, например, в [1–3], то там можно найти обоснование для эффектов электромагнетизма. На эту аналогию впервые обратил внимание *Джеймс Максвелл* [4], который представлял электромагнитное поле полем напряжений механического эфира. Физики, работавшие после Максвелла, объясняли аналогию по-своему: это, мол, неудивительно, поскольку механика твёрдого поликристаллического тела базируется на уравнениях электромагнитного поля, полученных всё тем же Максвеллом. В этом они правы, но у Максвелла (и у *Анри Пуанкаре* в монографии [5]) речь шла совсем о другом твёрдом теле, первичном в отно-

шении нашего электромагнетизма и более «тонком» по сравнению с нашими твёрдыми телами. Механика этого тонкого тела (смотри [2]) также базируется на уравнениях Максвелла, но они справедливы для другого электромагнитного поля, более «тонкого», чем наше. Образно говоря, мы попробовали спуститься в мироздании на один этаж, но на этом история не заканчивается.

Проблему лучше других понял *Давид Гильберт* [6], который сформулировал тезис о двойной бесконечности. У материи, по Гильберту, имеется иерархическая последовательность вложенных структур  $\mathbb{k}_j$ , неограниченная в обе стороны:

$$\dots \subset \mathbb{k}_{-n} \subset \dots \subset \mathbb{k}_{-2} \subset \mathbb{k}_{-1} \subset \mathbb{k}_0 \subset \mathbb{k}_1 \subset \mathbb{k}_2 \subset \dots \subset \mathbb{k}_n \subset \dots$$

Предположим, что нашему уровню материи соответствует структура  $\mathbb{k}_0$ . Сверхзадача фундаментальной физики – понять, как устроена структура  $\mathbb{k}_{-1}$ , несущая наш мир «на своих плечах», и увидеть структуру  $\mathbb{k}_1$ , существование которой поддерживается нашим миром. Первая задача решается в микрофизике, вторая – в космологии. Продолжающийся кризис физики состоит в том, что наука уже доросла до такого понимания вещей, но ещё не в состоянии решить поставленную Гильбертом задачу.

Свой вариант решения этой проблемы мы изложили в статьях [1–3], в работе [7] была предпринята попытка обобщения этого подхода для создания теории глобального материально-информационного поля. Проанализируем результаты этих статей на уровне максимальной физической абстракции.

Предположим, что мы уже имеем сплошную упругую однородную и изотропную среду (например, кристаллическое ядро планеты или остывшую железную звезду), в которой, как показано в [1], может существовать поле поперечных механических колебаний, описываемых уравнениями Максвелла. Но тогда в этом поле возникают условия, которые могут привести к созданию своей кристаллической решётки и нового упругого поликристаллического однородного и изотропного тела, описываемого своими уравнениями Максвелла. Ясно, что данную цепочку рассуждений можно продолжить.

Представляется ещё более интересным применить эту же итерационную процедуру в обратном направлении, получая всё более тонкие и тонкие материальные структуры. И на каждом таком шаге скорость света будет возрастать в очень большой пропорции, примерно на пять порядков.

Если это рассуждение является верным, то становится ясным, куда стремится мир, в котором мы живём – он должен создать новую кристаллическую структуру галактического масштаба. Возможно, это уже произошло, причём очень давно, но нам пока что не было дано это увидеть. Современные

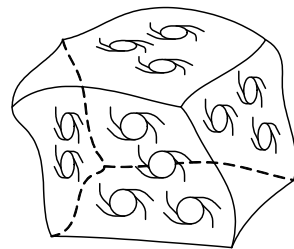


Рисунок 1 – Стенки из галактик.

астрономы утверждают, что галактики во Вселенной распределены неравномерно и их скопления образуют относительно тонкие оболочки (так называемые *галактические стенки*), окружающие *межгалактические пузыри* (рис. 1). При колебаниях стенок могут возникать синфазные поля, например, электрическое поле. Показательно, что внутри пузырей светящейся материи нет.

Ясно, что до тех пор, пока не проведены необходимые эксперименты, эти и другие теории такого же рода остаются чисто умозрительными. Но тут встаёт важный вопрос, о каких именно альтернативных теориях идёт речь и чему, собственно говоря, они являются альтернативой? Официальная физическая наука до сих пор довольствуется тем наследием, которое оставил *Альберт Эйнштейн*, и не жалуется подобные темы своим вниманием; о них не найдёшь упоминаний и в современных учебниках. Поэтому мы решили ликвидировать указанный пробел и в этой публикации дать краткую информацию о некоторых современных «не эйнштейновских» (точнее, «после эйнштейновских») математических моделях физического пространства.

**Теории «увлечения эфира».** Физиками было создано несколько теорий такого рода, смысл которых сводился к одному: массивные тела, например Земля, вносят в уравнения электродинамики и уравнения гравитационного поля дополнительные нелинейные слагаемые, которые «исчезают», когда лабораторная система координат оказывается относительно этого массивного тела неподвижной.

Наиболее последовательной и логически безупречной реализацией этой идеи следует признать общую теорию относительности Эйнштейна, в которой плотность потока электродинамической и гравитационной энергии приводит к пропорциональному изменению кривизны пространства и, в том числе, «нагружает» волновые уравнения для электродинамических потенциалов дополнительными слагаемыми. Но мы покажем в этом пункте более простую версию «нагружения» волновых уравнений, хорошо известную, например, специалистам по гидромеханике.

Напомним (смотри [8]), что свободные колебания *сплошной упругой среды* описываются уравнением:

$$\lambda \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{u}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – плотность среды;  $K, G$  – модули объёмного сжатия и сдвига;  $\vec{u}(M, t)$  – перемещения в момент времени  $t$  точки  $M$  среды из её положения равновесия.

Уравнение (1) не учитывает нелинейные эффекты, связанные с существованием так называемых *конвективных членов*. Правая часть уравнения описывает действие силы упругости, а левая – силы инерции, но *выражение для силы инерции упрощено*. В действительности, как это следует из *второго закона Ньютона*, в левой части (1) должна использоваться полная производ-

ная по времени, а не частная,

$$d\vec{v}/dt = \partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \partial\vec{v}/\partial t + 0.5 \text{ grad}(\vec{v}, \vec{v}) + [\text{rot } \vec{v}, \vec{v}],$$

причём она должна вычисляться от скорости перемещения, а не от скорости смещения среды:

$$\vec{v} = d(\vec{u})/dt + \vec{v}_0 = \partial(\vec{u})/\partial t + 0.5 \text{ grad}(\vec{u}, \vec{u}) + [\text{rot } \vec{u}, \vec{u}] + \vec{v}_0,$$

где  $\vec{v}_0$  – скорость перемещения положения равновесия; кроме того, здесь было использовано тождество

$$(\vec{a}, \nabla)\vec{a} = 0.5 \text{ grad}(\vec{a}, \vec{a}) + [\text{rot } \vec{a}, \vec{a}],$$

которое является следствием правил дифференцирования произведений.

Примем, как это обычно делают в теории колебаний, что смещение и скорость смещения малы, поэтому квадратами этих величин можно пренебречь. Кроме того, будем считать, что переносная скорость  $\vec{v}_0$  не изменяется во времени. Тогда

$$\vec{v} = \partial\vec{u}/\partial t + \vec{v}_0$$

и

$$d\vec{v}/dt = \partial^2\vec{u}/\partial t^2 + \Upsilon(\vec{a}) = 0.5 \cdot \text{grad}(\vec{v}_0, \vec{v}_0) + [\text{rot } \vec{v}_0, \vec{v}_0] + \text{grad}(\vec{v}_0, \partial\vec{u}/\partial t) + \\ + ([\text{rot } \vec{v}_0, \partial\vec{u}/\partial t] - [\vec{v}_0, \text{rot } \partial\vec{u}/\partial t]) = \Upsilon(\vec{v}_0) + \partial/\partial t \{ \text{grad}(\vec{v}_0, \vec{u}) + \langle \vec{v}_0, \vec{u} \rangle \},$$

где  $\Upsilon(\vec{a}) = 0.5 \cdot \text{grad}(\vec{a}, \vec{a}) + [\text{rot } \vec{a}, \vec{a}]$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = [\text{rot } \vec{a}, \vec{c}] - [\vec{a}, \text{rot } \vec{c}]$ .

В результате уравнение (1) принимает вид:

$$\lambda \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \text{ grad div } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{u} - \lambda (\partial / \partial t) \{ \text{grad}(\vec{v}_0, \vec{u}) + \langle \vec{v}_0, \vec{u} \rangle \} - \lambda \Upsilon(\vec{v}_0).$$

Если мы выбрали такую *инерционную систему координат*, которая перемещается и вращается вместе с перемещением и вращением положения равновесия упругой среды (будем, далее, изменение положения равновесия называть *движением эфира*), то дополнительные слагаемые пропадают, и это уравнение совпадает с уравнением (1). Тогда, как показано в [2], поперечные колебания среды описываются уравнениями Максвелла, и *в инерционной системе координат результат опыта Майкельсона – Морли закономерен*.

Если эта теория верна, то из результата опытов Майкельсона – Морли (анализ дан в [9]) следует, что *на поверхности Земли, в пределах точности эксперимента, движение эфира совпадает с движением этой поверхности*.

С другой стороны, если бы мы выбрали для своих наблюдений систему координат, в которой положение упругого равновесия среды не является неподвижным (например, разместили бы интерферометр на очень лёгком и быстро летящем над поверхностью Земли самолёте), то результат опыта мог быть другим. Рассуждая теоретически, чтобы исключить возможное влияние массы самолёта, желательнее перемещать интерферометр с большой скоростью внутри подземной шахты или штрека, но такой опыт трудно осуществить, поскольку этот прибор чрезвычайно чувствителен к вибрациям.

«**Эфирный ветер**» в опытах Миллера. В 1920 годы американский физик Д.К.Миллер усовершенствовал схему интерферометра Майкельсона; в частности, за счёт многократного отражения лучей от зеркал, он увеличил их путь с 22 до 64 метров, что в три раза увеличило чувствительность прибора. После этого он повторил *эксперименты Майкельсона – Морли* в горной местности (обсерватория *Маунт Вилсон*, высота 1830 метров над уровнем моря) и обнаружил долгожданное смещение интерференционной картины. В 1929 году к этим исследованиям присоединился Майкельсон и получил те же результаты, что и Миллер (смотри [10,11]).

Скорость эфирного ветра (то есть, скорость интерферометра относительно эфира) на указанной высоте изменялась в диапазоне 6...10 км/с и колебалась с периодом, равным периоду суточного обращения Земли. По результатам экспериментов *направление ветра было идентифицировано как галактическое, а не орбитальное* (это направление оказалось практически перпендикулярным плоскости, в которой располагаются все планеты Солнечной системы, рис. 2). Учёные утверждали, что для объяснения наблюдающегося эффекта скорость эфира на большом удалении от Земли близка к 200 км/с. То есть *скорость эфира превышает скорость движения Солнца относительно плоскости галактического диска* [12].

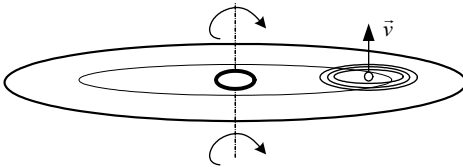


Рисунок 2 – Ориентация орбит.

Следует заметить, что в экспериментах Миллера и Майкельсона результаты измерений сильно зависели от материалов, используемых в конструкции самого интерферометра, а также при строительстве помещений, в которых они устанавливались. В частности, был выявлен *сильный*

*экранирующий эффект металлов*, что, возможно, и послужило ещё одной причиной неудачи первых опытов Майкельсона, где путь светового потока проходил внутри металлических труб. Игнорирование этих условий в опытах других учёных привело к повторению неудач, и исследования эфирного ветра были на длительное время прекращены.

**Теории газо-подобного эфира и опыты Галаева.** Экспериментальное обнаружение эфирного ветра не противоречит теориям увлечения эфира, в том числе общей теории относительности Эйнштейна. Но появление дополнительной информации о свойствах эфира позволяет конкретизировать его физические и математические модели.

В классической физике конца XIX столетия существовало твёрдое убеждение, что в жидкости или газе волны поперечных колебаний не распространяются; поэтому эфир должен быть твёрдым телом – поликристаллическим.



ским или аморфным. Этот научный факт имел на то время многочисленные экспериментальные подтверждения и уже в XX столетии помог раскрыть тайну внутреннего строения Земли, когда по результатам эхолокации было обнаружено металлическое земное ядро и установлено, что его внешняя часть является жидкой.

Дальнейшее развитие науки, в частности, успехи физической химии и гидромеханики, поколебали это давнее убеждение. Было открыто дипольное взаимодействие молекул жидкости или газа, особенно сильно проявляющееся у воды, имеющей полярные молекулы. У других веществ нидерландским физиком *Ван-дер-Ваальсом* было обнаружено *индукционное* (другое название – *дисперсионное*) взаимодействие молекул, вызванное флуктуациями расположения электрического заряда; такое взаимодействие также служило проводником поперечных колебаний, а соответствующее состояние вещества сейчас называют *газом Ван-дер-Ваальса* [13]. Кроме того, в механике жидкости и газа были получены знаменитые *уравнения Навье – Стокса* [14]

$$\lambda \partial \bar{v} / \partial t + \lambda (v \cdot \nabla) \bar{v} = \bar{F} - \text{grad } p + \mu \text{ rot rot } \bar{v}, \quad \text{div } \bar{v} = 0,$$

описывающие изменение скорости  $\bar{v}$  течения вязкой несжимаемой жидкости, имеющей плотность  $\lambda$  и кинематическую вязкость  $\mu$ ; в числе решений этого уравнения были и поперечные волны.

В 1980 годы российским физиком *В.А. Ацюковским* была создана физическая и математическая модель эфира (смотри монографию [15]), в которой он наделялся свойствами реального газа, обладающего давлением, температурой, сжимаемостью и вязкостью. В рамках этой теории, в частности, фотоны интерпретировались как создаваемые пульсирующим атомом *вихревые дорожки*, известные в механике жидкости и газов как *дорожки Кармана*.

На основе своей теории учёный оценил кинематическую вязкость эфира величиной  $\mu_{\text{э}} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ; для сравнения, при атмосферных условиях вязкость воздуха составляет  $\mu_{\text{в}} \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , гелия –  $\mu_{\text{г}} \approx 11 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

После длительного перерыва, эксперименты по измерению скорости и направления эфирного ветра были в конце XX века продолжены украинским физиком Ю.М.Галаевым (ИРЭ НАНУ, Харьков). Опираясь на теорию газоподобного эфира, он разработал принципиально новую конструкцию интерферометра, в которой использовался оптический лазер, и реализовывались известные для гидродинамики эффекты изменения скорости при неустановившемся течении вязкой жидкости по цилиндрической трубе (подробности опубликованы в [16]). Чувствительность нового интерферометра, по сравнению с прибором Майкельсона, была увеличена в тысячи раз, и это позволило (для равнинных условий города Харькова) зарегистрировать слабый «эфирный ветер» со следующими средними скоростями:

для высоты 1.6 м – 205 м/с; для высоты 4.8 м – 435 м/с.

Работая с интерферометром другой конструкции, использующим час-

тотный диапазон радиоволн, Галаев зарегистрировал для высоты 42 м скорость эфирного ветра 1412 м/с. Направление ветра и его изменение с высотой соответствовали тем, которые (для больших высот) ранее были получены Миллером. Кроме того, удалось получить экспериментальное значение кинематической вязкости эфира  $\mu_e \approx 6.24 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , которое практически совпало с её предсказанным значением в теории Ацюковского.

Завершая тему, следует особо подчеркнуть, что в современной науке результаты опытов Майкельсона уже давно не воспринимаются как парадоксальные, но приводимые объяснения, как правило, страдают излишним формализмом. Что касается задачи определения скорости Земли относительно эфира, то она по-прежнему актуальна, но, как показывает опыт последних лет, должна решаться другими методами.

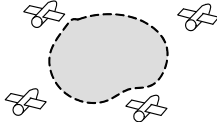


Рисунок 3 – Схема эксперимента.

3). Тогда в этой области, по всей видимости, произойдёт изменение вязкости эфира, а вместе с ней – одной или нескольких фундаментальных физических констант: скорости света, постоянной Планка, постоянной тонкой структуры и, возможно, других. Перед проведением эксперимента по периметру области расставляются группировка спутников, которые фиксируют изменения констант и, тем самым, определяют направление и скорость своего движения относительно эфира.

Ясно, что к проведению таких экспериментов Человечество пока не готово, но технический прогресс сейчас происходит очень быстро, а эта игра «стоит свеч»: изменяя свойства эфира можно приблизиться к пониманию принципов, которые используют неинерционные летательные аппараты (смотри далее).

Читателям статьи мы дарим идею, успешная реализация которой, без всякого сомнения, будет когда-нибудь отмечена Нобелевской премией по физике. Предположим, что за счёт высокочастотных колебаний плазмы удастся повысить температуру эфира в некоторой ограниченной области пространства, отдалённой на безопасное расстояние от Земли (рис.

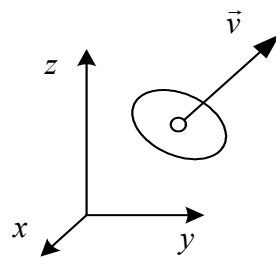


Рисунок 4 – Движущаяся частица.

**Теория «вытеснения пространства».** Теории с такими названиями базируются на представлении эфира в виде жидкости или газа, через который движутся частицы материи. Чтобы получить простейшую из этих теорий, будем предполагать, что эфир (то есть, вакуум) лишён вязкости. Рассмотрим

некоторую материальную частицу, которая движется в эфире со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 4). По ходу движения частицы пространство сменяется материей, а за её «кормой» – материю сменяет пространство. Если относительная скорость  $v/c \ll 1$ , где  $c$  – это скорость света, то сжимаемостью пространства можно пренебречь, и далее трактовать эфир как несжимаемую и невязкую среду. Эта среда «вытесняется» перед частицей и «засасывается» в освобождающийся за ней объём. Следовательно, и с такой концепцией согласны многие физики, *движущаяся материальная частица подобна движущемуся диполю.*

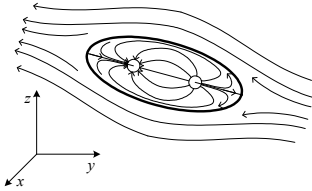


Рисунок 5 – Поле скоростей обтекания.

Напомним (смотри в учебнике [14] объяснение *парадокса Даламбера*, а также рис. 5), что при движении диполя векторные линии поля скоростей создают кокон эллипсоидальной (а при малых скоростях – практически сферической) формы, непроницаемый для внешнего потока, причём размеры эллипсоида зависят от момента диполя. В рассматриваемом случае момент диполя равен произведению скорости частицы

на объём, занимаемый её материей (то есть на объём, *движущийся как твёрдое тело*).

Величина этого объёма для каждого типа частиц является предметом дискуссии. В старых теориях микромира, уходящих своими корнями к учению *Демокрита*, материя заполняла весь объём атома. Затем стали считать, что у протона объём, занимаемый его материей, несколько больше объёма ядра, а у электрона он примерно в 2000 раз меньший, чем у протона. Для атомов объём материи зависит от массы ядра и числа электронов во внешней оболочке, поэтому среди радиоактивных элементов он максимальный у железа и никеля, а минимальный – у водорода. При сжатии вещества этот объём для каждого отдельного атома не изменяется, но в относительных величинах он увеличивается пропорционально плотности.

Применяя такую концепцию к каждому атому Земного шара, получаем, что весь этот шар подобен движущемуся диполю (рис. 6), и момент  $m$  этого диполя равен сумме диполей его частиц:

$$m = v \cdot V_{\text{м.з}},$$

где  $V_{\text{м.з}}$  – объём материи внутри этого шара. В результате движения этого диполя возникает гигантский непроницаемый кокон, радиус  $R_{\kappa}$  которого определяется формулой

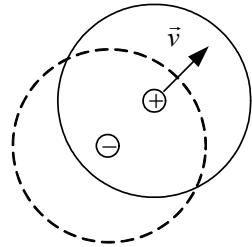


Рисунок 6 – Движущийся диполь.

$$R_{\kappa} = \sqrt[3]{m/(2 \cdot \pi \cdot v)} = \sqrt[3]{V_{\text{м.з}}/(2 \cdot \pi)}, \quad (2)$$

причём, если согласовывать теорию с результатами опытов Миллера и Га-лаева, размеры кокона должны быть близки к размерам поверхности Земли.

В рассматриваемой задаче поле скоростей для системы координат, связанной с центром Земли, имеет осевую симметрию и потенциал, который на-ходят как сумму потенциалов набегающего потока и диполя; этот дифферен-циал мы представим в сферических координатах:

$$\Phi(\rho, \theta) = v \cdot \rho \cdot \cos \theta + 0.5(R_{\kappa}^2 / \rho^2) \cos \theta.$$

Дифференцируя потенциал, находим составляющие относительной ско-рости

$$\vec{u}_{\text{от}}(\rho, \theta) = v \cdot (1 - (R_{\kappa} / \rho)^3) \cos \theta \cdot \vec{i}_{\rho} - v \cdot (1 + 0.5(R_{\kappa} / \rho)^3) \sin \theta \cdot \vec{i}_{\theta}, \quad (3)$$

а также абсолютную скорость увлечения эфира:

$$\vec{u}_{\text{абс}}(\rho, \theta) = v \cdot (R_{\kappa} / \rho)^3 (\cos \theta \cdot \vec{i}_{\rho} + 0.5 \sin \theta \cdot \vec{i}_{\theta}).$$

Зависимость (3) можно использовать для расстояний  $\rho \geq R$ , то есть за пределами Земного шара. Если  $\rho < R$ , то нужно заново определить величину диполя, отвечающую этой части Земного шара, после чего по формуле (2) найти новое значение радиуса кокона  $R_{\kappa}(\rho)$ , и *только лишь для данного значения  $\rho$*  использовать его в формуле (3).

Анализ решения модельной задачи показывает, что если  $R_{\kappa} \approx R$ , то при удалении от поверхности Земли скорость увлечения эфира очень быстро за-тухает, но всё же не по той закономерности, которую выявили в эксперимен-тах по обнаружению эфирного ветра; по-видимому, вблизи поверхности Зем-ли сказывается влияние вязкости эфира. Ситуацию можно исправить, если для решения задачи вооружиться не уравнениями Лапласа, как в этом приме-ре, а одной из современных нелинейных теорий, моделирующей турбулент-ные и ламинарные течения вязкой сжимаемой жидкости.

Обращаем внимание на то, что, поскольку с глубиной изменяется хими-ческий состав, а плотность земного вещества возрастает (так, у железно-никелевого ядра Земли она близка к  $11 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а у кремниевой земной ко-ры – в три раза меньше), то *течение эфира существует и внутри Земного шара*. Скорости внутреннего течения эфира вычисляются по алгоритму, опи-санному выше. Заметим, что даже если описываемый эффект вытеснения пространства является очень слабым и радиус внешнего кокона  $R_{\kappa} \ll R$ , то и в этом случае, с учётом особенностей внутреннего строения Земли, модель предсказывает существование конвективных течений в жидком металличе-ском ядре, которые, как считали А. Ферсман и его последователи, ответст-венны за создание земного магнетизма. Если эта простейшая модель переда-ёт главные закономерности исследуемых процессов, то *первопричиной зем-*

ного магнетизма является движение Солнечной системы относительно плоскости галактического диска. И это, в частности, означает, что в ближайшие несколько миллионов лет, пока скорость этого движения близка к своему максимуму, ослабление магнитного поля и переполюсовка Земли человечеству не угрожают.

**И всё-таки она ... пульсирует.** Просматривая материал предыдущего пункта, читатель может прийти к мысли, что авторы статьи окончательно забыли об идее синфазных пульсирующих полей в упругом теле [1–3] и начали представлять эфир в виде газа или жидкости (подобной *племуму Декарта*, смотри [1]). Известный парадокс Даламбера долго служил теоретическим обоснованием для наблюдающегося незатухающего движения небесных тел, но учёт других известных фактов требовал пересмотра традиционных представлений об эфире как о пассивной механической среде.

Далее мы приведём и другие доводы в своё оправдание, но прежде заметим, что наука, как и всё в этом мире, развивается по восходящей спирали, и поэтому старые хорошие идеи всегда проходят через новые циклы «реинкарнации», но, при внешней схожести теорий, они, как правило, получают другую основу и новое содержание. Представьте, как трудно было Галилею отстаивать свою правоту: все видели, что Солнце движется по небу, и только он один знал, что смена дня и ночи объясняется вращением Земли. Не менее трудно приходится сейчас тем физикам, кто вместо реального движения заряженных или нейтральных тел, вместо ламинарных или турбулентных потоков эфирного ветра, а также прочих привычных вещей видит другое: волновые поля синфазных колебаний, происходящих в упругопластической среде.

Мы рассчитываем получить среди читателей новых сторонников этой идеи, и поэтому будем сложные вещи объяснять предельно просто. Если плотность упругой среды переменная, то уравнение (1) линейных колебаний упругой среды имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda \cdot \partial \bar{u} / \partial t) = \text{grad}(K \cdot \text{div} \bar{u}) - \text{rot}(G \cdot \text{rot} \bar{u}), \quad (4)$$

где левая часть при отсутствии скорости переноса определяет изменение импульса, а правая – упругую силу, являющуюся причиной этого изменения.

Будем считать, что плотность  $\lambda$ , а также модули  $K, G$  изменяются по синфазному гармоническому закону, то есть

$$\lambda = \lambda_0 + \delta \lambda \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t, \quad K = K_0 + \delta K \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t, \quad G = G_0 + \delta G \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t,$$

а коэффициенты, используемые в правых частях равенств, по сравнению с круговой частотой  $\omega_{\text{пр}}$  медленно изменяются во времени или являются константами. Теперь естественно и решение уравнения (4) искать в аналогичном виде:

$$\bar{u} = \overline{\delta u} \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t,$$

причём, поскольку амплитуды  $\delta \lambda$  и  $\delta p$  изменения плотности и давления пропорциональны величине  $\text{div} \overline{\delta u}$ , то эта дивергенция не зависит от координат и времени, и это означает, что мы моделируем в этом пункте только лишь поперечные колебания среды.

Подставим это решение в левую часть уравнения (4); в результате усреднения (смотри [1]), мы снова получили уравнение вида (4)

$$\delta \lambda \cdot \partial^2 (\overline{\delta u}) / \partial t^2 = -\delta G \cdot \text{rot rot} \overline{\delta u}, \quad (5)$$

но не для поперечных смещений упругой среды, а для амплитудной функции соответствующих синфазных колебаний.

Кстати говоря, становится ясно, что скорость света  $c$  определяется равенством

$$c^2 = \delta G / \delta K, \quad \text{а не} \quad c^2 = G / K,$$

и, при упругопластической деформации материала на отдельных участках гистерезисной кривой (смотри рис. 7), мы получаем совсем другой результат, чем даёт линейная теория Гука.

Если от уравнения (5) перейти к уравнениям Максвелла, то мы получим

$$\begin{cases} \text{rot} (\overline{\delta E}) = -c^{-1} \partial (\overline{\delta H}) / \partial t; & \text{div} (\overline{\delta E}) = 4\pi \cdot \delta q; \\ \text{rot} (\overline{\delta H}) = c^{-1} \partial (\overline{\delta E}) / \partial t + (4\pi / c) \cdot \overline{\delta J}; & \text{div} (\overline{\delta H}) = 0, \end{cases}$$

где величины  $\overline{\delta E}$ ,  $\overline{\delta H}$ ,  $\overline{\delta J}$ ,  $\delta q$  определяют амплитуды пульсаций для напряжений  $\vec{E}$ , угловой скорости вращения среды  $\vec{H}$ , а также плотностей токов  $\vec{J}$  и зарядов  $Q$ .

При усреднении силы Лоренца

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{H} \quad \text{учтём равенства}$$

$$\vec{E} = \overline{\delta E} \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t; \quad \vec{H} = \overline{\delta H} \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t,$$

и примем, что заряд имеет постоянную массу  $m_0$ , а его объём изменяется по формуле

$$Q = Q_0 + \delta Q \cdot \sin \omega_{\text{пр}} t.$$

В результате получим формулу

$$\overline{\delta F} = \delta q \cdot \overline{\delta E} + \delta q \cdot \vec{v} \times \overline{\delta H}.$$

При записи уравнений электродинамики знак  $\delta$  перед величинами отбрасывается, но это обстоятельство не изменяет их физического смысла.

Заметим, что, в отличие от других величин, скорости  $\vec{v}$  здесь не пульсируют с синфазной частотой  $\omega_0$ , то есть они являются в этой теории не ам-

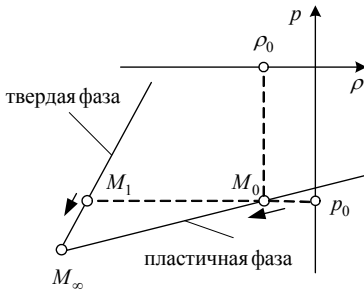


Рисунок 7 – Фрагмент гистерезисной кривой.

плитудными функциями, а реальными скоростями переноса. Поэтому при моделировании физического пространства наряду с методами теории колебаний с успехом используются методы газовой динамики или гидродинамики.

И всё-таки, что такое эфир – газ, жидкость или твёрдое тело? А может быть, это что-то среднее, например, жидкий кристалл? Современной науке это неизвестно. Но нам ещё рано завершать обсуждение данной темы, и в следующих пунктах будут изложены дополнительные аргументы в пользу одной из версий.

**Синфазное поле спинов и среда Коссера.** Напомним (смотри [3]), что уравнение Клейна – Гордона для продольных колебаний гетерогенной среды допускало факторизацию:

$$\begin{cases} \lambda \partial \bar{v} / \partial t = -\text{grad } p, & d^2 y_R / dt^2 = S \cdot p / M_{\text{ч}}, \\ K^{-1} \partial p / \partial t = -\text{div } \bar{v} - (\varepsilon \cdot S / W) \cdot dy_R(t) / dt, \end{cases}$$

имеющую соответствующий физический смысл. Предположим, что, в силу высокой жёсткости материала примеси, и поле касательных напряжений внутри частицы можно считать равномерным. Тогда, выполняя аналогичное исследование, приходим к аналогичным уравнениям и для поперечных колебаний среды:

$$\begin{cases} \lambda \partial \bar{v} / \partial t = -\text{rot } \bar{\tau}_k, & d \bar{\omega}_R / dt = (\pi / 2) R \cdot S \cdot \bar{\tau}_k / J_{\text{ч}}, \\ G^{-1} \partial \bar{\tau}_k / \partial t = \text{rot } \bar{v} - \varepsilon \cdot ((\pi / 2) R \cdot S / W) \cdot \bar{\omega}_R, \end{cases} \quad (6)$$

где  $G$  – модуль сдвига упругой среды;  $\bar{\tau}_k, \bar{v}$  – касательное напряжение кручения и скорость среды;  $\bar{\omega}_R, J_{\text{ч}}$  – угловая скорость вращения и момент инерции частицы;  $J_{\text{ч}} = 0.5 \cdot M_{\text{ч}} \cdot R^2$ ;  $R$  – радиус частицы (рис. 8);  $S, W, \delta$  – площадь, объём и относительная толщина её оболочки;  $M_{\text{ч}}$  – масса частицы;  $\varepsilon$  – объёмная доля примеси.

Исключим из системы (6) угловую скорость  $\bar{\omega}_R$  и получим:

$$a_{\text{поп}}^{-2} \partial^2 \bar{\tau}_k / \partial t^2 = \Delta \bar{\tau}_k - (\omega_{\text{поп}} / a_{\text{поп}})^2 \bar{\tau}_k, \quad (7)$$

где частота

$$\omega_{\text{поп}} = \sqrt{3 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot \lambda / \lambda_{\text{ч}} \cdot (\pi / \sqrt{2}) \cdot a_{\text{поп}} / R}, \quad a_{\text{поп}} = \sqrt{G / \lambda}.$$

Уравнение Клейна – Гордона (7) также имеет очевидное решение:

$$\bar{\tau}_k = \bar{\delta \tau} \cdot (\sin \omega_{\text{поп}} t), \quad \text{где } \Delta \bar{\delta \tau} = 0 \text{ или, например, } \bar{\delta \tau} = \text{const}.$$

Но эта ситуация кардинально отличается от предыдущего случая:

- колебания касательного напряжения не приводят к изменению плотно-

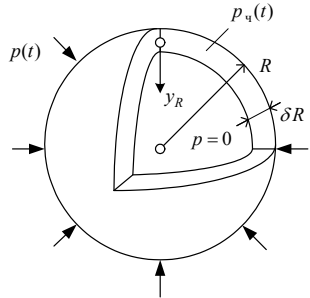


Рисунок 8 – Частица примеси.

сти и модулей материала, а, значит, не могут служить основой для возникновения нестационарного поля, подобного электромагнитному;

- частота  $\omega_{\text{поп}}$  столь же велика, как и частота  $\omega_{\text{пр}}$ , поэтому дополнительное слагаемое заметно искажает исходное волновое уравнение

$$a_{\text{поп}}^{-2} \partial^2 \bar{\tau}_k / \partial t^2 = \Delta \bar{\tau}_k,$$

описывающее поперечные колебания среды, и это *вступает в противоречие с опытными данными*.

В нашем физическом пространстве (эфире), по-видимому, глобального синфазного поля касательных напряжений, описываемого уравнением (7), нет. В то же время, описанное в [3] синфазное поле колебаний давления, по-видимому, существует. Чтобы разрешить возникшее противоречие, заметим, что *при упруго-пластических деформациях материала частица может быть твёрдой только лишь относительно сжатия*, при этом модуль сдвига  $G_{\text{ч}}$  для основного объёма частицы мало отличается от модуля  $G$  упругой среды. В результате, частота  $\omega_{\text{поп}}$  снижается до такой степени, что при расчёте электромагнитного поля ею можно пренебречь, и использовать вместо (7) волновое уравнение.

Но полностью игнорировать полученный результат было бы неверно. Известно, что нестационарные решения уравнения Клейна – Гордона при удалении от источника быстро затухают по экспоненциальному закону. Если источник индуцирует колебания касательного напряжения, то эти колебания распространяются на некоторую окрестность источника и, как считают, являются возможной причиной так называемого *слабого взаимодействия* элементарных частиц; в частности, они изменяют ориентацию их спинов.

В последние годы активно развивается так называемая *несимметричная*, или *моментная теория упругости*, которая учитывает зернистость структуры сплошной среды и описывает её тензорным уравнением *Леви - Чивита* [17] либо системой векторных дифференциальных уравнений *Коссера* [18]:

$$\begin{cases} \rho \cdot \partial^2 \bar{u} / \partial t^2 = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \bar{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \bar{u} + 2\alpha \text{rot } \bar{\phi} + \bar{f}, \\ j \cdot \partial^2 \bar{\phi} / \partial t^2 = (2\gamma + \beta) \text{grad div } \bar{\phi} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \bar{\phi} + 2\alpha \text{rot } \bar{u} - 4\alpha \bar{\phi} + \bar{g}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mu, \lambda$  – модули упругости, подобные известным модулям Ламе, которые используются в классической (симметричной) теории;  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – дополнительные модули упругости;  $\bar{\phi}$  – угол поворота зерна, который в новой теории может отличаться от угла  $\bar{\psi} = 0.5 \text{rot } \bar{u}$  поворота среды;  $j, \bar{g}$  – плотность моментов инерции и массовых сил.

У однородной синфазной волны в *среде Коссера* все пространственные производные равняются 0, и система (8) сводится к уравнению



$$j \cdot \partial^2 \vec{\phi} / \partial t^2 + 4\alpha \cdot \vec{\phi} = 0,$$

которому отвечает однородное поле синфазных гармонических колебаний зерна с круговой частотой  $\omega_c = 2\sqrt{\alpha/j}$ .

Указанные колебания могут, например, пояснить причину существования спина у фотона и других элементарных частиц, а также материально-информационные обмены в трёхмерном пространстве (смотри [7]), но для создания электромагнитного поля они не пригодны. Электромагнитное поле является полем поперечных колебаний, поэтому как носитель (и, одновременно, донорское поле) тут могут выступать лишь продольные колебания (то есть колебания давления и плотности). В среде Коссера получить однородное поле колебаний невозможно, поэтому, не смотря на «гибкость» несимметричной модели, имеющей большое число модулей упругости и дополнительный инерционный фактор, *среда Максвелла* не является её частным случаем.

**Волны инерционного давления.** Альберт Эйнштейн рассматривал гравитацию как релятивистский эффект, вызванный расширением пространства, но его простое объяснение механизмов функционирования этой связи базировалось на тензорных уравнениях, описывающих изменение кривизны пространства, и было чисто формальным. Далее мы покажем, что, приняв на вооружение модель упругопластического деформирования сплошной среды, можно найти простое объяснение этого эффекта.

На рис. 7 был показан фрагмент гистерезисной кривой, актуальный для нашего и будущего времени. Давление в среде медленно уменьшается, и она расширяется, но, по причине разных коэффициентов сжимаемости, объём пластической фазы возрастает почти в 2000 раз быстрее, чем объём твёрдой фазы (точное значение равняется 1836).

Это означает, что объём протона (твёрдая фаза) возрастает медленно и столь же медленно возрастает объём, занимаемый электроном; напомним, что электрон относится к жидкой фазе, но его объём пропорционален объёму протона и изменяется вместе с ним. Такое же правило относится и к другим парам разноименно заряженных элементарных частиц, а также к фотонам. Следовательно, можно считать, что *объём каждой отдельной частицы вещества увеличивается в 2000 раз медленнее, чем объём всего пространства.*

Объём всего вещества составляет ничтожно малую долю от объёма пространства, поэтому уместно использовать следующий релятивистский приём. Будем для начала рассуждений считать, что вся материя расширяется с тем же темпом, что и её пластичная фаза; соответствующую скорость расширения обозначим  $\vec{v}_0$ , эта скорость удовлетворяет очевидному соотношению

$$\operatorname{div} \vec{v}_0(M, t) \equiv \wp(t).$$

Скорость расширения  $\vec{v}_0$  очень мала, поэтому соответствующие нели-

нейные слагаемые в уравнении упругости можно не учитывать. Тогда истинная скорость расширения представляется в виде  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{от}$ , причём относительная скорость  $\vec{v}_{от}$  удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{v}_{от}(M, t) = -\zeta \cdot \lambda_B(M, t), \quad (9)$$

где  $\lambda_B(M, t)$  – плотность вещества;  $\zeta = \wp \cdot (1 - m_e / m_p) \approx \wp$ ;  $m_e, m_p$  – массы электрона и протона, а относительное смещение  $\vec{u}_{от}$  удовлетворяет неоднородному линейному уравнению упругости

$$\lambda \cdot \partial^2 \vec{u}_{от} / \partial t^2 = K \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_{от} - G \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}_{от} + \vec{F}. \quad (10)$$

Обращаем внимание на то, что у уравнений (9), (10), в отличие от рассмотренного выше случая, коэффициенты не пульсируют, но коэффициент  $\zeta$  может медленно изменяться с течением времени.

Второе отличие состоит в том, что в силу условия (9), теперь нас интересуют не поперечные, а продольные колебания материала. Его смещения при указанных колебаниях имеют потенциал  $\Phi$ , который, при отсутствии внешних сил  $\vec{F}$ , описывается волновым уравнением

$$(\lambda / K) \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = \Delta \Phi.$$

Продифференцируем это уравнение, и равенство  $\vec{u}_{от} = \operatorname{grad} \Phi$  по времени, в результате чего получим

$$\vec{v}_{от} = \operatorname{grad} \psi$$

и, с учётом условия (9), неоднородное волновое уравнение для потенциала скорости:

$$(\lambda / K) \cdot \partial^2 \psi / \partial t^2 = \Delta \psi - 4\pi \cdot \zeta \cdot \lambda_B(M, t). \quad (11)$$

Уравнение (11) является линейным, поэтому к его решениям можно применять метод линейной суперпозиции. Пусть центр системы координат совпадает с центром уединённой сосредоточенной массы  $m$ ; тогда соответствующими этой массе решениями уравнения (11) являются сферические расширяющиеся волны потенциала скорости

$$\psi(\vec{\rho}, t) = f_\psi(t - \rho / a_{пр}) / \rho$$

и самой скорости

$$\vec{v}_{от}(\vec{\rho}, t) = \operatorname{grad} \psi = - \left[ f'_\psi(t - \rho / a_{пр}) / (a_{пр} \cdot \rho) + f_\psi(t - \rho / a_{пр}) / \rho^2 \right] \cdot \vec{i}_\rho,$$

где  $f'_\psi(t) = -\zeta(t) \cdot m$ ,  $a_{пр} = \sqrt{K / \lambda}$ .

Покажем, что аналогичная волна описывает изменение давления в упругой среде. Учтём, что формула

$$p = -K \cdot \operatorname{div} \vec{u}_{от}$$

определяет так называемое гидростатическое давление  $p$ , возникающее при

сжатии или растяжении среды. Уравнение

$$\lambda \cdot \partial^2 \bar{u}_{от} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div } \bar{u}_{от}$$

запишем в следующем виде:

$$\lambda \cdot \partial \bar{v}_{от} / \partial t = -\text{grad } p ,$$

то есть,

$$\lambda \cdot \partial \text{grad } \psi / \partial t = -\text{grad } p \quad \text{и} \quad p = -\lambda \cdot \partial \psi / \partial t .$$

Следовательно,

$$p(\bar{\rho}, t) = -\lambda \cdot f'_\psi(t - \rho / a_{пр}) / \rho = \lambda \cdot \zeta'(t - \rho / a_{пр}) \cdot m / \rho .$$

Таким образом, давление  $p$  будет волной расширения среды, если  $\zeta'(t) < 0$ , и волной сжатия, если  $\zeta'(t) > 0$ .

Сферическая волна этого давления расширяется со скоростью  $a_{пр}$ , которая для эфира оказывается несколько большей скорости света, скорее всего, в 1.4...1.7 раз. Известно, что

$$\delta K / \delta G = 2.5 \dots 3.5 , \quad \text{но} \quad \delta K / \delta \lambda \neq K / \lambda$$

по причине нелинейности характеристик деформирования материала, поэтому точнее пока что сказать нельзя.

Таким образом, если эта теория верна и имеет прямое отношение к гравитации тел, то в заочном споре двух научных титанов (Лапласа и Эйнштейна, смотри [1]) о скорости распространения гравитационной волны победила Истина, которая, как известно, всегда лежит где-то посередине.

**Реальное поле ускорений и виртуальное поле сил инерции.** Если считать величину  $\zeta''(t)$  очень малой, то давление  $p(\bar{\rho}, t)$  создаст центральное поле ускорений среды  $\vec{G}(\bar{\rho}, t) = -\lambda^{-1} \cdot \text{grad } p(\bar{\rho}, t)$ , пропорциональное массе  $m$  и изменяющееся по закону обратных квадратов:

$$\vec{G}(\bar{\rho}, t) = (\gamma \cdot m / \rho^3) \cdot \bar{\rho} ,$$

где  $\gamma = \lambda^{-1} \cdot \zeta'(t)$ .

Характер взаимодействия этого поля с частицей зависит от соотношения акустических коэффициентов  $f_c$  пластичной среды и  $f_b$  твёрдого вещества,

$$f_c = 1 / (\lambda_c \cdot a_{пр.с}), \quad f_b = 1 / (\lambda_b \cdot a_{пр.в}),$$

где  $\lambda_c, \lambda_b$  – их плотности;  $a_{пр.с}, a_{пр.в}$  – скорости распространения волны сжатия.

Чтобы не усложнять изложения, обратимся за подсказкой к одномерному нелинейному волновому уравнению, а точнее – к его факторизации в виде системы

$$\begin{cases} \lambda \partial v / \partial t = -\partial p / \partial x; \\ \partial p / \partial t = -a^2 \cdot \lambda \cdot \partial v / \partial x \end{cases} \quad (12)$$

которая описывает изменение скорости  $v(x,t)$  и давления  $p(x,t)$  в трубопроводе. Предполагается, что плотность  $\lambda$  и скорость звука  $a$  зависят от величины давления. Тогда, как показано в курсе гидродинамики (смотри, например, [15]), система уравнений (12) имеет решения в форме бегущей и отражённой волны следующего вида:

$$I_{1,2} = u(x \mp at) + p(x \mp at)/(a \cdot \lambda) = \text{const} . \quad (13)$$

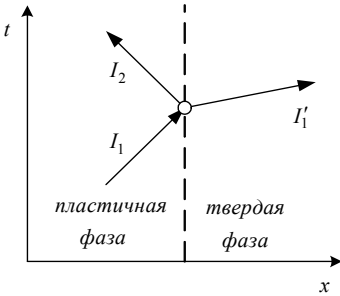


Рисунок 9 – Инварианты и поверхность разрыва.

Решения (13) называются *инвариантами волнового уравнения*; заметим, что при образовании инвариантов используется акустический коэффициент среды, а скорость этих волн переноса, как и скорость звука, является переменной.

Используя инварианты волнового уравнения (рис. 9), а также условия непрерывности давления и скорости на фронтах разрыва, приходим к выводу, что, если локальная плоская волна ускорения движется перпендикулярно поверхности частицы, то, после прохождения поверхности раздела

она изменяет свою величину в  $k$  раз, где

$$k = 2 \cdot f'_b / (f'_b + f'_c) . \quad (14)$$

Когда коэффициент  $k$  мал, то, при падении волны под углом к поверхности раздела, её ослабление оказывается ещё большим. В рассматриваемом случае  $k < 1/40$ , и это означает, что *величиной абсолютного ускорения твёрдой частицы по сравнению с её ускорением относительно среды можно пренебречь*.

В результате, масса  $m$  индуцирует поле относительных ускорений твёрдых частиц, изменяющееся по закону обратных квадратов:

$$\vec{G}_g(\vec{\rho}, t) = -(\gamma \cdot m / \rho^3) \cdot \vec{\rho} .$$

Заметим, что *это поле является виртуальным*, и только когда в нём появляется твёрдая частица с некоторой массой  $m'$ , то частица ускоряется к центру поля, и создаётся иллюзия действия силы гравитационного притяжения

$$\vec{F} = -(\gamma \cdot m \cdot m' / \rho^3) \cdot \vec{\rho} . \quad (15)$$

Учтём, что в рассматриваемой модели  $\zeta(t) \approx \wp(t)$ , и придём к следующему выводу: *наличие силы притяжения между твёрдыми частицами означает, что в данное время расширение среды замедляется*.

Осталось заметить, что этот вывод соответствует выбранному фрагменту гистерезисной кривой (рис. 7).

**Гравитация вещества и кристаллизация эфира.** Поле сил инерции из предыдущего пункта по своим свойствам напоминает гравитационное. Проверим, способна ли описанная модель обеспечить тот же уровень сил между небесными телами, что и действующее сейчас гравитационное поле.

Для этого отметим, что в рамках данной модели коэффициенты  $\zeta(t), \wp(t)$  имеют физическую размерность частоты, а коэффициент  $\zeta'(t)$  – размерность  $[1/c^2]$ . Кроме того, поле ускорений свободного падения, созданное уединённой массой, фактически определяется формулой

$$\vec{G}_B(\vec{\rho}, t) = -(\zeta(t) \cdot V_B / \rho^3) \cdot \vec{\rho}, \quad (16)$$

где величина  $V_B$  обозначает объём, занимаемый веществом этой массы.

Формула (16) позволяет найти оценку для коэффициента  $\zeta'(t)$ . Учтём, что на поверхности Земли  $G_B \approx 9.806 \text{ м/с}^2$ ,  $\rho \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$ . Кроме того, что очевидно, объём  $V_B$  не превосходит объёма Земного шара, то есть  $V_B \leq (4\pi/3) \cdot \rho^3$ . Следовательно,

$$|\zeta'(t)| \geq G_B / [(4\pi/3) \cdot \rho] = 3.66 \cdot 10^{-7} [\text{с}^{-2}].$$

Поскольку в модели использовано условие  $\zeta(t) \approx \wp(t)$ , то скорость расширения среды оказывается слишком большой. Действительно, если принять, что расширение происходит по гармоническому закону

$$\text{div } \vec{u} = \delta u \cdot \sin \omega t,$$

где из условий прочности любого упругого материала следует неравенство  $\delta u < 0.1$ , то

$$\wp(t) = \delta u \cdot \omega \cdot \cos \omega t \quad \text{и} \quad |\zeta'(t)| \approx |\wp'(t)| = \Delta u \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

откуда  $\omega^2 > 3.66 \cdot 10^{-6}$  и  $\omega > 1.9 \cdot 10^{-3} [1/\text{с}]$ .

В то же время, характерный период этих колебаний составляет 10 млрд. лет, и выполняется условие  $\omega \approx 2 \cdot 10^{-13} [1/\text{с}]$ . Оказалось, что вычисленная сила притяжения будет в миллиарды раз меньше той, что наблюдается в действительности.

Ну что же, наука не всегда сразу же приходит к правильному ответу. Мы учли факторы, которые лежали на поверхности, но их оказалось мало. Следовательно, модель нужно уточнять, и пути уточнения достаточно очевидны.

- Прежде всего, заметим, что коэффициент  $\zeta'(t)$  принимает большие значения (порядка  $4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-2}$ ) только там, где располагается вещество, общий относительный объём таких областей ничтожно мал.
- Причём это вещество не стоит неподвижно в одной точке эфира, а движется, поэтому, несмотря на высокий уровень ускорений, значительных

деформаций, разрушающих часть пространства, не происходит.

- Кроме того, *по мере расширения пространства общий объём вещества возрастает, и этот процесс в настоящее время ускоряется.*

Последний фактор является решающим, поэтому объясним подробнее. В настоящее время вещества ещё мало, и пространство фактически пустое. Но, в точке  $M_\infty$ , показанной на рис. 7, практически всё пространство уже станет твёрдым. Следовательно, за время, оставшееся до «конца света», всё пространство успеет кристаллизироваться, но этот процесс будет происходить неравномерно. Расширение пространства создаёт благоприятные условия для его кристаллизации, а катализатором кристаллизации пластической фазы выступает само вещество.

Посмотрите ещё раз на рис. 7. Чтобы материал перешёл из точки  $M_0$  в точку  $M_1$ , его сначала нужно расширить до точки  $M_\infty$ , а для этого нужна энергия. Такой энергией обладает масса, которая, по Эйнштейну, является синонимом энергии. Следовательно, масса является катализатором процесса перехода, а его «выход» пропорционален объёму катализатора. Поэтому можно сохранить описанную выше модель, но увеличить значение коэффициента  $\zeta'(t)$  до уровня, определённого экспериментально.

Остаётся объяснить, почему экспериментальное значение коэффициента оказалось таким большим. При переходе  $M_0 \rightarrow M_1$  очередная малая порция материала уменьшает свою плотность скачком, и это увеличивает не только производную  $\zeta'(t)$ , но и сам коэффициент  $\zeta(t)$ , который в этой модели во много раз больше, чем коэффициент равномерного расширения  $\varphi(t)$ .

Таким образом, *в упругопластической среде главной причиной притяжения твёрдых частиц является её нелинейное расширение, которое приводит к ускоренному переходу пластической фазы вещества в твёрдую фазу.*

Заметим, что представленная в этом пункте теория гравитации имеет недостаток: для масс, движущихся с большими скоростями, формула (15) является приближённой. Этот недостаток преодолевается в работе [1], где вместе с гравитационной силой возникает гравитационная индукция. Кроме того, в качестве причины инерционности (и гравитации) вместо кристаллизации эфира там выступает частичное разрушение оболочек у частиц примеси, что создаёт поток среды в сторону ядра частицы, где сосредоточена масса.

**Будущее высоких технологий.** Будем считать, что результат, полученный в предыдущем пункте, является верным не для какой-то там отвлечённой сплошной среды Максвелла, а для нашего эфира; тогда он открывает перспективы для любопытных технических приложений.

Известно, что плотность любого материала, а также скорость звука и коэффициент сжимаемости, зависят от давления и температуры; это же правило применимо к эфиру. В данный момент времени давление в эфире уменьшает-

ся, то есть  $p'_{эф}(t) < 0$ , но скорость этого процесса замедляется,  $p''_{эф}(t) > 0$ . Предположим, что для некоторой ограниченной области  $A$  пространства мы научились повышать температуру эфира  $T_{эф}$  и, за счёт этого, в течение определённого промежутка времени  $\Delta t$  замедлили темп кристаллизации пространства и уменьшили коэффициент  $|\zeta'(t)|$  на порядок.

Это будет означать, что для указанного промежутка времени и указанной области мы фактически уменьшили силы гравитации и инерции в 10 раз.

Заметим, что в этом случае в 10 раз уменьшаются не все силы инерции, действующие в упругой среде, а лишь те, которые связаны с так называемой гравитационной массой. Эти силы вызваны ускорениями вещества относительно системы отсчёта, в которой силы гравитации отсутствуют. Кроме гравитационной массы вещество имеет так называемую электромагнитную массу, пропорциональную энергии его электромагнитного поля (смотри [17]), и эта масса при нагреве эфира изменяется не столь значительно.

Действительно, при установившемся движении тела со скоростью  $\vec{v}_T$  эфиру в нём возникает два поля скоростей, перемещающихся вместе с телом:

- поле  $\vec{v}_{эм}(M, t) \cdot \sin \omega_{пр} t$  создаётся электрическими зарядами тела и пульсирует с круговой частотой  $\omega_{пр}$  (смотри [1]);
- поле  $\vec{v}_{ин}(M, t)$  создаётся массой тела, имеет стоки в его элементарных частицах и не пульсирует, такое поле скоростей описано ранее в этой статье или, при других исходных положениях, в статье [1].

Тогда вычисление кинетической энергии  $E_{кин}$  суммарного поля в некоторой области  $A \subseteq R_3$  приводит к интегралу:

$$E_{кин} = \frac{\lambda}{2} \iiint_A (\vec{v}_{эм}(M, t) \cdot \sin \omega_{пр} t + \vec{v}_{ин}(M, t))^2 dv,$$

или, после раскрытия скобок и усреднения по периоду колебаний, к сумме интегралов

$$\frac{\lambda}{4} \iiint_A (\vec{v}_{эм}(M, t))^2 dv + \frac{\lambda}{2} \iiint_A (\vec{v}_{ин}(M, t))^2 dv.$$

Здесь первое слагаемое по зависимостям вида  $E_{кин} = 0.5 \cdot m \cdot v_T^2$  определяет электромагнитную, а второе – инерционную (или гравитационную) массу тела, расположенную внутри области  $A$ .

Амплитуда пульсаций в центре заряда определяется параметрами гистерезисной кривой (рис. 7) и остаётся неизменной, но потери энергии, вызванные этой пульсацией, можно уменьшить и, тем самым, существенно снизить силы инерции *электрически нейтрального тела*. В тоже время, масса электрона, как указывается в [17], на три четверти имеет электромагнитное про-

исхождение, и только лишь на одну четверть – инерционно-гравитационное. Поэтому можно считать, что электромагнитные и другие силы, обеспечивающие стабильность атомов и молекул, здесь изменяются не значительно, а модифицированное указанным способом вещество становится способно выдерживать ускорения, превышающие обычные значения на порядок.

В результате впервые (для научной литературы) возникает возможность дать объяснение тем физическим принципам, которые используют на объекте, показанном на рис. 10. И вращение, как выясняется, здесь не является главным (смотри также *теорему об оценке гравитационной индукции*, доказанную в [1]); возможно, что этим, для комфорта экипажа, создаётся искусственная гравитация.

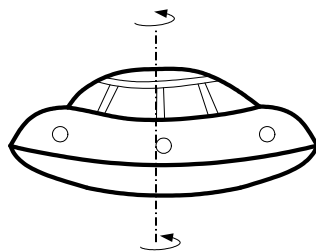


Рисунок 10 – Схематическое изображение объекта (реконструкция).

По многочисленным свидетельствам очевидцев, вращение присуще большинству крупных объектов такого рода, но на мелких объектах, которые быстро маневрируют, его, нет. Напрашивается аналогия с аэробусом и военным самолётом, пилоты которого привыкли к перегрузкам и состоянию искусственной невесомости.

Лётчики, если верить материалам, попавшим в прессу, имели многочисленные встречи с такими объектами, видели окружающий его плазменный кокон и ощущали парализующее воздействие поля колебаний, природа и частота которых пока неизвестна. Тем не менее, не вызывает сомнения, что когда-нибудь человек преодолеет упомянутые и другие трудности и овладеет технологией, которая позволит самым радикальным образом решить проблему полётов в космос. Ясно, что это дело будущего, но уже сейчас можно утверждать, что *возможность создания малоинерционных летательных аппаратов (известных как НЛО) не противоречит принципам современной науки.*

Но самым большим достижением Человечества будет прямое использование для нужд своей экономики энергии синфазного поля. Надо понимать, что использование топлива или альтернативных источников энергии – это, если воспользоваться известным металлургическим термином, второй или третий *энергетический передел*. Самые большие потери и приобретения энергии в известном нам мире происходят на уровне элементарных частиц, и в качестве универсального источника энергии здесь выступает синфазное пульсирующее поле.

Пути к этому источнику ещё предстоит открыть, и ничего определённого по этому поводу мы сказать вам не сможем. Единственное, имеет смысл



повторить известный лозунг: «Учитесь у Природы!». Если она смогла подключить к этому полю каждую элементарную частицу, то, наверное, найдутся и другие «коды доступа».

Но Природа явно не спешит открывать человеку эту тайну, и тому есть причина. Дело в том, что эта технология, когда она будет создана, в чьих-то неумелых или недобрых руках может оказаться стократ страшнее водородной бомбы, потому что несёт потенциальную опасность полного уничтожения для всего мира. Остаётся надеяться, что в этот раз учёные поступят мудрее, и Человечество не получит этой технологии раньше того срока, когда окончательно созреет для этого.

**Заключение.** Любая современная синергетическая теория физического пространства обязана давать ответ на следующие вопросы:

- почему в нашем мире существуют разноимённые электрические заряды, но не наблюдается разделения на положительную и отрицательную массу?
- почему в электричестве одинаковые заряды отталкиваются, а в гравитации одинаковые массы притягиваются?
- почему в электричестве одинаковые заряды отталкиваются с той же силой, с которой притягиваются разноименные?
- если другую (назовём её отрицательной) массу всё-таки обнаружат, как она будет взаимодействовать с нашей (положительной) массой?

Когда родится учёный, который сможет дать **обоснованный** ответ на весь комплекс поставленных вопросов, то его научная слава затмит славу Ньютона и Эйнштейна. Наш вариант ответов опубликован в [1–3], где была разработана концепция упруго-пластичной активной механической среды, названной *средой Максвелла*, но в науке получили известность и другие, столь же **не обоснованные**, версии ответов.

Ньютому, в этом отношении, было куда проще – он описывал процессы, знакомые каждому из опыта простого созерцания, и достаточно было преодолеть сложившиеся догмы. И при всём этом человечество шло к классической механике долгие тысячелетия, приобретая по крупицам бесценный опыт научного познания мира.

Здание классической механики, созданное *Исааком Ньютоном* и его последователями, разрушено, но тому честолюбцу, кто стремится занять освободившийся пьедестал, не позавидуешь. Новая синергетическая теория не сможет стать такой же простой и, главное, наглядной, как ньютоновская механика, и поэтому рассчитывать на её безоговорочное признание не приходится. Да и сам Ньютон, как известно, научного признания так и не дождался; *комета Галлея* вернулась только через 30 лет после его смерти.

Современное поколение учёных не согласно ждать так долго, но мы можем подсказать выход. Новая теория будет признана, если она сможет наглядно продемонстрировать свою пользу. Например, объяснить физические принципы, благодаря которым летают НЛЮ, и поднять летающую тарелку «на крыло» (или на то, что у неё заменяет крылья).

### **Выводы.**

1. Проанализированы теории физического пространства, основанные на концепции пассивной механической среды: теория увлечения эфира, теория вытеснения пространства, теория газо-подобного эфира и некоторые другие; для первых двух теорий разработаны простейшие математические модели.

2. Представлена и проанализирована простейшая модель активной упруго-пластичной механической среды, основанная на разработанной ранее теории взаимодействия однородного поля колебания давления и синфазного поля поперечных колебаний.

3. Разработана математическая модель взаимодействия твёрдых частиц, являющихся центрами кристаллизации упруго-пластичной среды. Показано, что в условиях расширяющейся среды силы взаимодействия частиц описываются законом всемирного тяготения Ньютона.

4. Сформулированы (на уровне научной гипотезы) теоретические предпосылки и общие технические принципы создания малоинерционных летательных аппаратов, известных как НЛЮ.

**Список литературы:** 1. Ванин В.А., Григорьев А.А. *Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 2. Ванин В.А., Григорьев А.А. *Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. *Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 4. Максвелл Дж. *Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х томах.* – М.: Наука, 1989. 5. Пуанкаре А. *О науке.* – М.: Наука, 1983. 6. Рид К. Гильберт. – М.: Наука, 1977. 7. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. *Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.55-68. 8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1966. 9. Ванин В.А., Григорьев А.А. *Квантовая релятивистская механика уединённых экспоненциальных волн переноса деформации кручения по цилиндрическому стержню* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 10. Miller D.C. *Significance of the ether-drift experiments of 1925 at Mount Wilson* // *Science.* – 1926. – Vol.68, No.1635. – P.433-443. 11. Michelson A.A., Pease F.G., Pearson F. *Repetition of the Michelson – Morley experiment* // *Journal of the optical Society of America and Review of Scientific Instruments.* – 1929. – Vol.18, No.3- P181-182. 12. Дагаев М.М., и др. *Астрономия.* – М.: Просвещение, 1983. 13. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981. 14. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газов.* – М.: Наука, 1978. 15. Ацюковский В.А. *Общая эфиродинамика.* – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 280 с. 16. Галаев Ю.М. *Измерение скорости эфирного ветра и кинематической вязкости эфира оптическим интерферометром.* – Харьков: ООО «Инфобанк», 2007. 17. Паули В. *Теория относительности.* – М.: Наука, 1983. 18. Поручиков В.Б. *Методы динамической теории упругости.* – М.: Наука, 1986.

*Поступила в редколлегию 30.11.11*

**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

**Ю.Л. ГЕВОРКЯН**, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## ЛИНЕЙНЫЕ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ КЛАПАННЫХ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Наведені матричні моделі для опису динаміки гідромеханічних систем з зосередженими параметрами. Виконаний якісний аналіз методів інтегрування цих рівнянь при застосуванні відомих різницевих схем.

Представлены матричные модели для описания динамики гидромеханических систем с сосредоточенными параметрами. Выполнен качественный анализ методов интегрирования этих уравнений при использовании известных разностных схем.

Represented by the matrix model to describe the dynamics of hydro-mechanical systems with concentrated parameters. Performed a qualitative analysis of the methods of integrating these equations using the known difference schemes.

**Введение и постановка задачи.** В этой статье будет приведено несколько примеров успешного использования матриц для динамического анализа так называемых *гидромеханических узлов*. В соответствии с терминологией, введенной в [1], под гидромеханическим узлом понимают относительно обособленную динамическую систему, состоящую из полостей, заполненных сжимаемой жидкостью и соединяемых короткими каналами, снабжёнными автоматическими клапанами. Гидродинамический узел описывают системой обыкновенных дифференциальных уравнений, но работу клапанных пружин, зачастую, моделируют уравнениями в частных производных или уравнениями с запаздывающей правой частью (подробности даны в [2,3]).

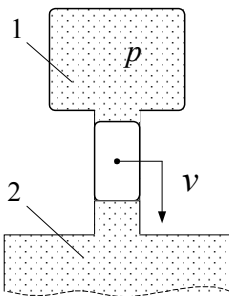


Рисунок 1 –  
Схема устройства.

Подбор примеров отвечает принципу движения материала от простого к сложному, а сами примеры были получены авторами статьи в ходе выполненных ранее научных исследований, а также при подготовке учебника [4]. Продолжением этой статьи является публикация [5] из этого же сборника, где рассматривается использование матричных моделей для анализа динамической устойчивости клапанов.

**Гидромеханический демпфер.** Будем исследовать *свободные колебания*, возникающие в простейшей гидромеханической системе, показанной на рис. 1.

Полости 1 и 2 заполнены жидкостью, имеющей в полости 1 избыточное давление  $p$ . Это давление воздействует на плунжер и, кроме того, является

причиной перетекания жидкости через прецизионный зазор между плунжером и втулкой. На плунжер кроме силы давления действует сила трения, пропорциональная его скорости  $v$ .

Изменение давления  $p$  и скорости  $v$  при свободных колебаниях описываются системой уравнений

$$\{ \alpha \cdot w \cdot \dot{p} = -k_{ym} \cdot p - f_n \cdot v; \quad m \cdot \dot{v} = f_n \cdot p - f_{mp} \cdot v,$$

которую можно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot w & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{ym} & -f_n \\ f_n & -f_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}.$$

В этих уравнениях кроме переменных величин  $p, v$  все остальные физические величины (коэффициент сжимаемости  $\alpha$ , объём полости  $w$ , коэффициенты утечек  $k_{ym}$  и трения  $f_{mp}$ , масса плунжера  $m$  и площадь его поперечного сечения  $f_n$ ) считаются постоянными коэффициентами.

Прежде, чем интегрировать это уравнение, перейдём к обобщённым координатам (в этом случае они называются *фазовыми переменными*)

$$x = (\alpha \cdot w)^{1/2} \cdot p; \quad y = (m)^{1/2} \cdot v.$$

Сумма квадратов фазовых переменных пропорциональна полной механической энергии системы:

$$x^2 + y^2 = \alpha \cdot w \cdot p^2 + m \cdot v^2 = 2 \cdot (\alpha \cdot w \cdot (p^2 / 2) + m \cdot (v^2 / 2)) = 2 \cdot (E_{ном} + E_{кин}).$$

В результате матрица коэффициентов сохранит свою симметрию, но все её элементы будут иметь одинаковую физическую размерность –  $[c^{-1}]$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -f \\ f & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $a = k_{ym} / (\alpha \cdot w)$ ;  $b = f_{mp} / m$ ;  $f = f_n / (\alpha \cdot w \cdot m)^{1/2}$ .

Пусть, для определённости,  $a = 1 \text{ c}^{-1}$ ,  $b = 3 \text{ c}^{-1}$ , а коэффициент  $f$  является варьируемым параметром, величина которого зависит, например, от выбора площади плунжера  $f_n$ . Воспользуемся *методом Эйлера*, и будем искать решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = \exp(\lambda \cdot t) \cdot x_0; \quad y(t) = \exp(\lambda \cdot t) \cdot y_0,$$

где  $x_0, y_0$  – некоторые числа, не равные одновременно нулю. Подстановка этих функций в уравнение (1) приводит к матричному равенству

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -f \\ f & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -f \\ f & -3 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Однородное матричное уравнение (2) будет иметь нетривиальное реше-

ние, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -f \\ f & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \det(S - \lambda \cdot I) = 0, \text{ где } S = \begin{pmatrix} -1 & -f \\ f & -3 \end{pmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель, получаем квадратное уравнение  $\lambda^2 + 4 \cdot \lambda + 3 - f^2 = 0$ , которое имеет два корня  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{1 - f^2}$ . Эти корни являются *собственными числами* матрицы  $S$ .

При  $f < 1$  собственные числа оказываются вещественными и различными. Подставляя их по очереди в уравнение (2), получаем

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 - f^2)^{1/2} & -f \\ f & -1 - (1 - f^2)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 + (1 - f^2)^{1/2} & -f \\ f & -1 + (1 - f^2)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранги матриц, составленных из коэффициентов при неизвестных, равны 1, следовательно, эти системы имеют однопараметрические множества нетривиальных решений. В частности, решениями этих систем будут векторы - столбцы

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} f \\ 1 - \sqrt{1 - f^2} \end{pmatrix}; \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1 - f^2} \\ f \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы являются *собственными векторами* матрицы  $S$ . Они имеют одинаковую длину и расположены симметрично относительно биссектрисы первого квадранта (рис. 2); такое их расположение не случайность, а является следствием симметрии уравнений (и законов природы). При возрастании  $f$  они «движутся» навстречу.

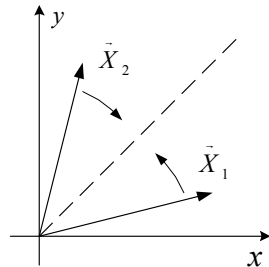


Рисунок 2 – Собственные векторы.

Теперь мы имеем возможность записать общее решение уравнения (1):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) \cdot \bar{X}_1 + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 t) \cdot \bar{X}_2, \quad (3)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные константы. Значения этих констант обычно определяются *начальными условиями*. Пусть в момент времени  $t = 0$  фазовые переменные принимают известные значения  $x(0), y(0)$ .

Составим из столбцов  $\bar{X}_{1,2}$  квадратную матрицу  $X = (\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2)$ .

Тогда равенство (3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 \cdot t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 \cdot t) \end{pmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Проанализируем полученный результат. Сначала с точки зрения математики. Решение матричного уравнения (1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ удалось представить в виде: } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(S \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В качестве побочного результата получена диагонализация матрицы  $S$ . Теперь вернёмся к физике. Кривые, показанные на рис. 3, называются

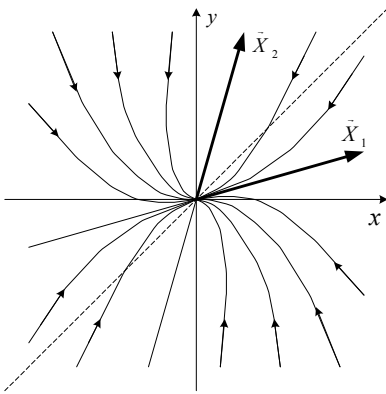


Рисунок 3 – Фазовые траектории.

*фазовыми траекториями*. В процессе движения система теряет энергию на трение, возникающее в прецизионном зазоре между слоями перетекающей жидкости и между поверхностями плунжера и втулки. Поэтому расстояние от точки фазовой траектории до начала координат с течением времени неуклонно уменьшается. При любых начальных условиях траектории приближаются к началу координат *монотонно*, то есть, оставаясь в пределах одного или максимум двух квадрантов. Такое колебание в физике называется *апериодическим* (рис. 4). Прямые траектории, идущие по

направлениям векторов  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ , отвечают *собственным апериодическим колебаниям* системы. Числа  $T_1 = -1/\lambda_1; T_2 = -1/\lambda_2$  имеют физическую размерность [с] и называются *постоянными времени* колебательных процессов.

Если начальная точка траектории не располагается на прямых, содержащих векторы  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ , то колебательный процесс является результатом наложения двух собственных колебаний; именно по этой причине фазовая траектория может пересекать нулевую линию. Обращаем внимание на характер «закручивания» траекторий. При движении они как бы стремятся приблизиться к направлению собственного вектора  $\vec{X}_1$ , отвечающего меньшему числу  $\lambda_1$ . По-

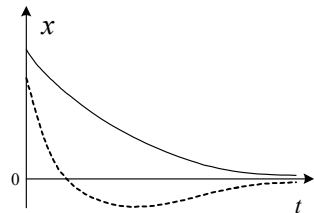


Рисунок 4 – Апериодическое колебание.

этому в разных областях «закрутка» линий различна.

Устройства, в которых все колебания являются аperiodическими, в механике называются *сильно демпфированными*. Данное устройство будет таковым, если  $|a - b| > 2 \cdot f$ .

**Идеальный амортизатор.** Если в этом гидромеханическом устройстве продолжать увеличивать площадь  $f_n$  поперечного сечения плунжера, то параметр  $f$  будет возрастать, а собственные вектора  $\vec{X}_{1,2}$  – сближаться. При значении  $f = 1 \text{ с}^{-1}$  они сольются, и решение (5) преобразуется в такое:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 \cdot t) & t \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) \\ 0 & \exp(\lambda_1 \cdot t) \end{pmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix},$$

где матрица  $X = (\vec{X}_1 \quad \vec{Z})$ ,  $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  – *циклический вектор*.

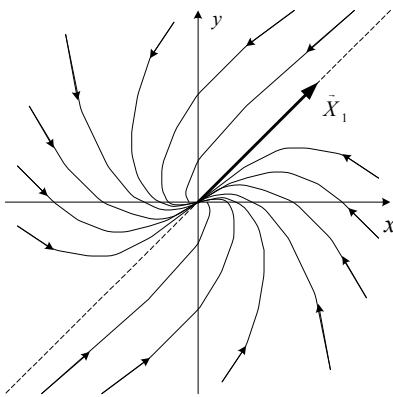


Рисунок 5 – Форма траекторий в предельном случае.

Таким образом, *центральная матрица* оказалась в этом случае не диагональной, а треугольной, и она является экспонентой от жордановой клетки. В анализируемом предельном случае матрица колебаний имеет вид:

$$S = X \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot X^{-1}.$$

Изменяется и характер фазовых траекторий – они все закручены в одну сторону (рис. 5). «Векторный вихрь» уже сформировался, но он пока ещё не «кружит» вокруг начала координат, и характер колебаний остаётся аperiodическим.

Если нужно получить гидромеханический демпфер с наилучшим успокоением (*идеальный амортизатор*), то выбор его параметров необходимо подчинить условию  $f = 1$ . При этом постоянная времени  $T_{1,2}$  достигнет своего предельно малого значения, и, что не менее важно, фазовые переменные будут пересекать нулевую линию только один раз (рис. 4, пунктир), а не многократно.

**Гидромеханический маятник.** Продолжим увеличивать площадь  $f_n$  поперечного сечения плунжера и выйдем в область, где  $f > 1$ . При этом соб-

ственные числа  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $S$  станут комплексно сопряженными:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -2 \pm i \cdot \sqrt{f^2 - 1},$$

а решение задачи приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X \cdot \Phi(t) \cdot X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix},$$

где

$$\Phi(t) = \exp(\alpha t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

или

$$\Phi(t) = \exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot t\right).$$

Матрица

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

называется *матричным комплексом*.

Происхождение названия связано с тем, что эту матрицу можно представить в следующем виде:

$$Z = \alpha \cdot I + \beta \cdot K, \text{ где } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а кососимметричная матрица } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет любопытному равенству  $K^2 = -I$ .

В скалярной арифметике аналогичному равенству удовлетворяет мнимая единица  $i$ , поэтому матрица  $Z$  является аналогом комплексного числа  $z = \alpha + i \cdot \beta$ . Все матричные комплексы, как и обычные числа, перестановочны между собой, поэтому указанная аналогия касается всех алгебраических операций, то есть является полной. Кто до сих пор испытывает трудности с пониманием природы комплексных чисел, но уже привык к матричной арифметике, может просто отождествлять эти числа с соответствующими матричными комплексами.

Матрица  $K$  используется в квантовой механике, где она называется *спиновой матрицей Паули*. «Спин» в переводе означает вращение. Известно (смотри, например, [6]), что умножение элемента вещественного векторного пространства на комплексное число не только изменяет его длину, но и поворачивает на некоторый угол. То есть, *комплексные множители для вещественного векторного пространства* (в том числе – и для фазового пространства из этого примера) – это не скаляры, а *недиагональные матри-*

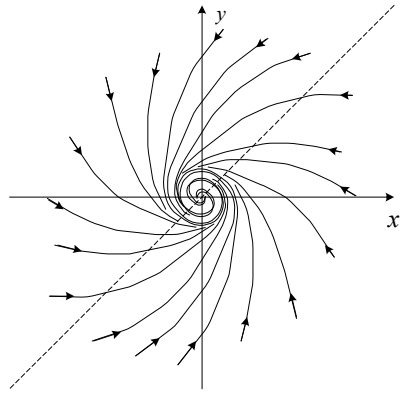


Рисунок 6 – Фазовые спирали.

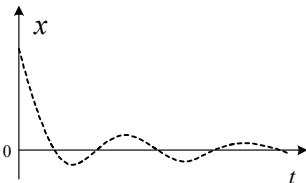


Рисунок 7 – Периодические затухающие колебания.

торного пространства на комплексное число не только изменяет его длину, но и поворачивает на некоторый угол. То есть, *комплексные множители для вещественного векторного пространства* (в том числе – и для фазового пространства из этого примера) – это не скаляры, а *недиагональные матри-*



цы особого вида – матричные комплексы.

Появление в решении задачи тригонометрических функций изменило форму фазовых траекторий (рис. 6). Вращение траектории вокруг начала координат приводит к тому, что число пересечений нулевой линии каждой фазовой переменной становится неограниченным, причём моменты пересечения повторяются с вполне определённым периодом (рис. 7). Такие колебания называются в механике *периодическими затухающими*. Период этих колебаний определяется формулой  $T = 2 \cdot \pi / \beta$ , а безразмерная величина  $d = -\alpha \cdot T$  называется *логарифмическим декрементом* колебаний. Мнимая часть  $\beta$  собственного числа матрицы  $S$  называется *круговой частотой* колебаний, имеет стандартное обозначение  $\omega$  и измеряется в [рад / с].

**Жёсткая динамическая система.** Напомним, что невырожденная матрица  $A$  называется *плохо обусловленной*, если

$$|\lambda_{\max}| \gg |\lambda_{\min}|,$$

где  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  – наименьшее и наибольшее (по модулю) собственные числа матрицы.

Если  $A$  является плохо обусловленной, то при численном решении уравнения вида

$$\dot{X} = A \cdot X$$

по методам Эйлера или Рунге – Кутта возникают проблемы, которые обсуждаются на материале этого пункта.

Методы Эйлера и Рунге – Кутта входят в стандартное математическое обеспечение любого компьютера и поэтому пользуются большой популярностью среди инженеров. Однако в различных областях техники, а особенно, в гидромеханике, приходится иметь дело с системами, в которых разностные схемы Эйлера или Рунге-Кутта оказываются в принципе не пригодными. Пример такого устройства показан на рис. 8. Оснащение плунжера дросселирующим каналом (жиклёром) привело к тому, что коэффициент  $a$  в матрице  $S$  существенно возрос, а при приближении перепада давления  $p$  к нулю (то есть вблизи точки равновесия) он стремится к бесконечности.

Причина такого поведения этого коэффициента связана с особенностью формулы, используемой для расчёта течения жидкости через жиклёр. Напомним некоторые сведения из курса элементарной физики.

Течение вязкой жидкости через прецизионный зазор считается *ламинарным* (слоистым), и здесь, в соответствии с законом ламинарного течения, расход  $q$  пропорционален перепаду давлений  $p$ :

$$q = k_{\text{ум}} \cdot p.$$

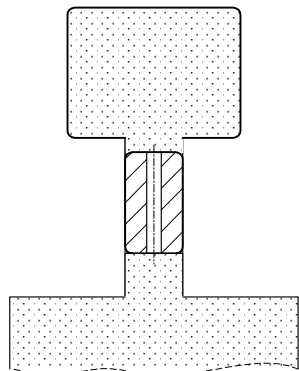


Рисунок 8 –  
Плунжер с жиклёром.

Перетекание жидкости через жиклёр является *турбулентным* (вихревым) и описывается так называемым *законом Бернулли*:

$$q = \mu f \cdot \sqrt{[(2/(\rho \cdot |p|))] \cdot p},$$

где  $\mu f$  – эффективная площадь потока;  $\rho$  – плотность жидкости.

Поэтому в новом устройстве коэффициент  $k_{ym}$  оказывается пропорциональным  $1/\sqrt{|p|}$ , и при  $p \rightarrow 0$  он стремится к бесконечности.

Вернёмся к задаче о колебаниях гидромеханического демпфера и, не меняя остальных элементов матрицы

$$S = \begin{pmatrix} -a & -f \\ f & -b \end{pmatrix},$$

изучим поведение собственных чисел  $\lambda$  этой матрицы при  $a \rightarrow +\infty$ .

Анализируя проведенное ранее решение, замечаем, что уравнение для этих чисел имеет вид

$$\det(S - \lambda \cdot I) = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 - (a+b) \cdot \lambda + (a \cdot b + f^2) = 0,$$

которое имеет два вещественных корня

$$\lambda_{1,2}(a) = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{\sqrt{[(a-b)^2 - f^2]}}{2}.$$

Если  $a \rightarrow +\infty$ , то, вычисляя соответствующие пределы, выясняем, что при любом значении  $f$  корень  $\lambda_1 \rightarrow -b$ , а корень  $\lambda_2 \rightarrow (-\infty)$ . При этом

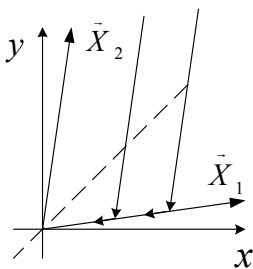


Рисунок 9 – Диаграммы для жёсткой системы.

собственные векторы  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$  приближаются к осям координат, а фазовые диаграммы становятся похожими на ломаную линию, состоящую из двух прямолинейных отрезков (рис. 9).

В соответствии с определением, принятым в механике, колебательный процесс, описываемый

уравнением  $\dot{X} = S \cdot X$  называется *жёстким*, если матрица  $S$  имеет ненулевые собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , модули которых различаются на несколько порядков. В исследуемом здесь процессе

при  $a \rightarrow +\infty$  выполняются условия

$$-\lambda_1 \geq b \quad \text{и} \quad \lambda_2 / \lambda_1 \approx a/b \rightarrow \infty,$$

поэтому при больших  $a$  он становится жёстким. Характер изменения фазовой переменной во время такого процесса показан на рис. 10 сплошной линией.

Поскольку  $\lambda_2 \rightarrow (-\infty)$ , то число  $\lambda_2 \cdot \Delta t$  при любом положительном шаге  $\Delta t$  выйдет за пределы круга (или овала) устойчивости (смотри [7]), и мы при использовании схем Эйлера или Рунге – Кутта получим в расчёте

растущую по амплитуде «пилу», показанную на том же рисунке пунктиром.

В результате, мы попали в сложное положение, из которого нужно искать выход. Таких выходов существует несколько. Укажем два варианта решения.

- Во-первых, можно изменить расчётную схему.

Например, если применить так называемую *неявную схему Адамса*, то формула для передаточной матрицы  $C$ , используемой на каждом шаге интегрирования в рекуррентном равенстве

$$X(t + \Delta t) = C \cdot X(t),$$

будет иметь следующий вид:

$$C = [I - (\Delta t / 2) \cdot S]^{-1} \cdot [I + (\Delta t / 2) \cdot S].$$

Замечательной особенностью этой формулы является то, что отвечающее ей условие устойчивости

$$\left| [I - (\Delta t / 2) \cdot \lambda_j]^{-1} \cdot [I + (\Delta t / 2) \cdot \lambda_j] \right| \leq 1$$

выполняется для всех чисел  $\lambda_j$  из левой комплексной полуплоскости. То есть, при использовании метода Адамса *физическая устойчивость моделируемой системы автоматически влечёт устойчивость её расчётной схемы*.

При расчёте жёсткого колебательного процесса метод Адамса полностью не убирает «пилу», но теперь она не растёт по амплитуде, а убывает (рис. 10, прерывистая линия).

- Во-вторых, можно пересмотреть используемую физическую (и математическую) модель.

Дело в том, что при малых перепадах давления скорость течения жидкости через дроссель уменьшается настолько, что основные потери энергии происходят не на входе и выходе из канала, а в самом канале, где режим течения становится ламинарным. Поэтому, если учесть указанное обстоятельство, то коэффициент  $k_{ym}$  станет ограниченным во всём диапазоне давлений, а значение шага  $\Delta t$  будет «отграниченным от нуля».

Имея этот теоретический результат, в остальном, казалось бы, можно положиться на высокое быстродействие современной вычислительной техники. Поэтому второй выход со всех точек зрения может показаться вам лучше первого. Но это иллюзия.

Если через жиклёр перетекает жидкость с малой вязкостью (например, бензин или дизельное топливо), то предпринимаемая компьютерной программой попытка «загнать» все собственные числа  $\lambda_j \cdot \Delta t$  в зону устойчивости может окончиться плачевно. Кривой, убывающей по экспоненциальному

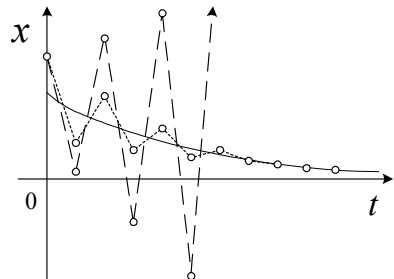


Рисунок 10 – Результаты расчёта жёсткой системы.

закону, мы всё равно не получим, но будем наблюдать хаотический разброс расчётных точек, а, если очень не повезёт, то и горизонтальную линию, показанную на рис. 11.

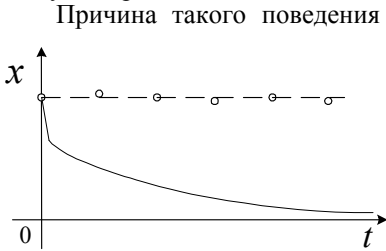


Рисунок 11 – Влияние погрешности округления.

Причина такого поведения решения связана с округлением чисел в ЭВМ. Например, если величина  $|\lambda_1 \cdot \Delta t|$  окажется меньше, чем  $10^{-12}$ , то экспонента от этого числа будет в точности равна единице. Но это означает, что в той новой задаче, которую «сочинил» и решает компьютер, «мягкая» составляющая колебательного процесса полностью отсутствует.

Чтобы избежать негативного влияния погрешности округления, достаточно добиться того, чтобы наименьшее по модулю собственное число  $\lambda_1$  матрицы  $S$ , ответственное за основную составляющую колебательного процесса, удовлетворяло неравенству

$$0.01 < |\lambda_1 \cdot \Delta t| < 0.1.$$

Если при таком выборе шага интегрирования  $\Delta t$  некоторое другое собственное число  $\lambda_j$  выйдет за пределы области устойчивости, то нужно менять расчётную схему.

**Статическая неустойчивость прямого клапана.** На практике иногда встречаются и такие ситуации, когда движение гидромеханической системы оказывается неустойчивым, и в ней наблюдаются колебания, быстро растущие по амплитуде. Правда, бесконечного возрастания амплитуды на самом деле не происходит, так как система выходит за те пределы, для которых составлена модель; например, при высокой амплитуде колебаний какие-то звенья механизма начинают контактировать с упорами, что в ней не учтено.

Поскольку «раскачка» колеблющейся части системы остаётся конечной, то на её реализацию будет затрачена конечная энергия. Эта энергия может быть позаимствована у другой части этой же системы, в которой она, например, была запасена заранее.

Так, в гидравлической системе, показанной на рис. 12, роль «резервуара» энергии играет сжатая жидкость. Если давление  $p_1$  выше, чем давление  $p_2$ , то эта жидкость будет перетекать через клапан

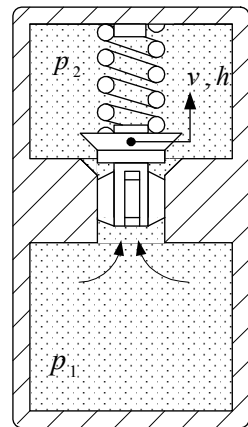


Рисунок 12 – Клапанный узел.

по направлению, указанному стрелками. При этом возникнет перепад давления на клапане, который будет стремиться поднять клапан выше. Но этому противодействует пружина.

При определённой высоте  $h$  подъёма клапана (обозначим её  $h_0$ ) между силой давления жидкости

$$F_{\text{зидр}} = f \cdot (p_1 - p_2)$$

и силой пружины

$$F_{\text{нр}} = z_{\text{нр}} \cdot (h_{\text{нр},0} + h)$$

возникает равновесие –

$$F_{\text{зидр}} = f \cdot \Delta p_0 = F_{\text{нр}} = z_{\text{нр}} \cdot (h_{\text{нр},0} + h_0),$$

и клапан, если давления в полостях не будут изменяться, теоретически может оставаться в этом положении неподвижным. Действительно, при любых отклонениях от положения  $h_0$  будет возникать *восстанавливающая сила*, и

положение  $h_0$  будет являться положением статического равновесия (рис. 13).

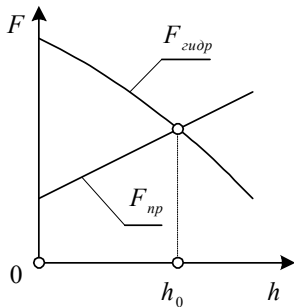


Рисунок 13 – Зависимости движущих сил от подъёма клапана.

Но объёмы полостей ограничены, поэтому по мере перетекания жидкости перепад давления  $p_1 - p_2$  будет уменьшаться, а, значит, точка статического равновесия начнёт смещаться вниз. Процессу выравнивания давлений будет противодействовать так называемый *насосный эффект клапана* (при своём опускании он будет для обеих полостей играть роль поршня), а также то, что уменьшение подъёма клапана снижает проходное сечение потока. В результате начнётся сложная игра различных динамических факторов, описываемая следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\alpha \cdot w_1(h) \cdot \dot{p}_1 = -f \cdot v - q(p_1 - p_2; h); \quad (7)$$

$$\alpha \cdot w_2(h) \cdot \dot{p}_2 = f \cdot v + q(p_1 - p_2; h); \quad (8)$$

$$m \cdot \dot{v} = f \cdot (p_1 - p_2) - z_{\text{нр}} \cdot (h_{\text{нр},0} + h); \quad (9)$$

$$z_{\text{нр}} \cdot \dot{h} = z_{\text{нр}} \cdot v, \quad (10)$$

где  $\alpha, \rho$  – коэффициент сжимаемости и плотность жидкости;  $w_1, w_2$  – объёмы жидкости в полостях;  $q(\Delta p; h)$  – объёмная скорость течения жидкости через клапан при перепаде давления  $\Delta p$  и перемещении клапана  $h$ ,

$$q(\Delta p; h) = \mu f(h) \cdot \sqrt{[(2/(\rho \cdot |\Delta p|))]} \cdot (\Delta p); \quad (11)$$

$\mu f(h)$  – площадь эффективного проходного сечения клапана, зависящая от величины его перемещения  $h$  (и, иногда, от направления течения);  $m, v, f$  – масса и скорость клапана, площадь его поперечного сечения;  $z_{np}, h_{np,0}$  – коэффициент жёсткости и предварительная деформация пружины клапана.

В этой системе уравнения (7) и (8) называются *уравнениями сжимаемости*, а зависимость (11) соответствует известному правилу гидравлики – *закону Бернулли* для расчёта объёмной скорости течения жидкости через малое отверстие. Уравнения (9) и (10) являются простейшими *уравнениями движения*, составленными для клапана.

Мы видим, что в уравнении (10) обе части можно сократить на коэффициент  $z_{np}$ , однако не спешим это делать. На то есть две причины.

- Во-первых, при таком сокращении, была бы потеряна симметрия уравнений, а такую потерю математик допустить не может.
- Во-вторых, этого не нужно делать и с физической точки зрения.

Если мы сейчас умножим каждое уравнение на «свою» переменную и просуммируем их, то в левой части получим производную от полной механической энергии системы

$$E_{\text{мех}} = \alpha \cdot w_1 \cdot p_1^2 / 2 + \alpha \cdot w_2 \cdot p_2^2 / 2 + m \cdot v^2 / 2 + z_{np} \cdot (h + h_{np,0})^2 / 2,$$

а в правой части – мощность  $N_{\text{ном}}$ , теряемую на клапане при массообмене:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -N_{\text{ном}} = -q(\Delta p; h) \cdot (\Delta p) = -\mu f(h) \cdot (2/\rho)^{1/2} \cdot |\Delta p|^{3/2} \leq 0.$$

Выражение для объёмной скорости  $q$  содержит нелинейные сомножители – корень из перепада давлений и зависимость  $\mu f(h)$ . Эту функцию вблизи положения равновесия можно линеаризовать:

$$q \approx a \cdot (\delta p_1 - \delta p_2) + b \cdot \delta h,$$

где

$a = q_0 / (2 \cdot \Delta p_0) \geq 0$ ;  $b = [\mu f'(h_0) / \mu f(h_0)] \cdot q_0$ ;  $q_0 = \sqrt{[(2/(\rho \cdot |\Delta p_0|))]} \cdot (\Delta p_0)$ ;  $\delta p_1, \delta p_2, \delta h$  – отклонения давлений  $p_1, p_2$  и перемещения клапана  $h$  от их значений, отвечающих точке статического равновесия.

После линеаризации запишем систему в матричной форме:

$$D \cdot \dot{Y} = A \cdot Y,$$

$$\text{где } D = \text{diag}(\alpha \cdot w_1, \alpha \cdot w_2, m, z_{np}); Y = \begin{pmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ v \\ \delta h \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -a & a & -f & -b \\ a & -a & f & b \\ f & -f & 0 & -z_{np} \\ 0 & 0 & z_{np} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку коэффициент  $b \neq 0$ , то матрица  $A$  не является блочной J-симметричной матрицей (так называемой *матрицей колебаний*, смотри [4]).

Поэтому мы не будем выполнять симметричное окаймление матрицы  $A$  матрицами  $D^{-1/2}$ , а, вместо этого, запишем характеристическое уравнение этой задачи в следующей эквивалентной форме:

$$\det(\lambda \cdot D - A) = 0.$$

Матрица  $A$  имеет пропорциональные строки, поэтому одно из её собственных чисел равно 0. Остальные собственные числа являются корнями кубического уравнения

$$\lambda^3 + \frac{a}{\alpha w} \lambda^2 + \frac{z_{np} \alpha w + f}{\alpha w m} \lambda + \frac{a z_{np} + f b}{\alpha w m} = 0,$$

где  $w$  – так называемый *эффективный гидравлический объём системы*,

$$1/w = 1/w_1 + 1/w_2.$$

Для исследования решений кубического уравнения применяем *критерий Рауса – Гурвица* [7] и получаем, что при условии

$$a \cdot f < \alpha \cdot w \cdot b \quad (12)$$

среди собственных чисел имеется вещественное положительное число  $\lambda_2 > 0$  (рис. 14), а при выполнении условия

$$b \cdot f < -a \cdot z_{np}, \quad (13)$$

имеется пара комплексно сопряжённых собственных чисел с положительной вещественной частью (рис. 15).

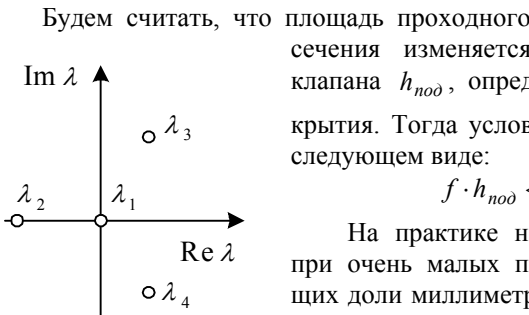


Рисунок 15 – Неустойчивость циклического типа.

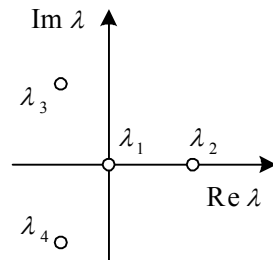


Рисунок 14 – Расположение собственных чисел при неустойчивости аperiодического типа.

сечения изменяется пропорционально подъёму клапана  $h_{nod}$ , определяемому с момента его открытия. Тогда условие (12) можно представить в следующем виде:

$$f \cdot h_{nod} < 2 \cdot \alpha \cdot w \cdot \Delta p_0. \quad (14)$$

На практике неравенство (14) выполняется при очень малых подъёмах клапана, составляющих доли миллиметра. Поэтому, если клапан имеет так называемый *цилиндрический разгружающий поясок* (показанный на рис. 12), то он буквально проскакивает эту зону, как бы «не замечая» её.

Если разгружающего пояска нет, а перепад

давлений  $\Delta p_0$  чуть превышает давление открытия клапана

$$p_0 = z_{np} \cdot h_{np,0} / f ,$$

то точка равновесия попадёт в зону неустойчивости. И если даже удастся оставить клапан в этом положении равновесия неподвижным, то на него неизбежно будут воздействовать случайные отклонения (*флуктуации*) сил, которые в этих условиях способны раскачать его. В результате клапан начнёт совершать колебания, сопровождающиеся ударами о седло.

Амплитуда этих колебаний будет не меньше, чем ширина зоны динамической неустойчивости (рис. 16), но, если эта зона узкая, то амплитуда останется малой. Однако, по сравнению с чрезвычайно малым начальным возмущением системы, которое можно считать близким к нулю (другими словами, *в масштабе флуктуации*), наблюдаемое изменение конечного положения клапана соизмеримо с бесконечностью.

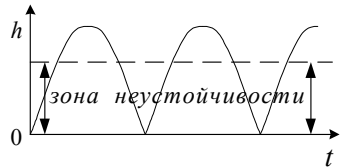


Рисунок 16 – Характер движения клапана при автоколебаниях.

Многочисленные удары клапана о седло создают определённый акустический эффект, который в некоторых случаях используется для диагностирования технического состояния клапанного узла.

**Выводы.** Даны примеры использования матриц для описания свободных колебаний гидромеханических узлов. Разъяснены преимущества применения разностной схемы Адамса для расчёта узлов, которые описываются жёсткой системой дифференциальных уравнений, имеющей плохо обусловленную матрицу коэффициентов при неизвестных. Составлена линеаризованная модель клапанного гидромеханического узла и получены условия его статической устойчивости.

**Список литературы:** 1. Григорьев А.Л. Универсальный метод динамического расчёта гидромеханического узла // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. - Харьков: ХГПУ, 2000. – Вып.104. – С.75-84. 2. Григорьев А.Л., Вештак И.А. Динамический анализ цилиндрической пружины при симметричных условиях закрепления её крайних витков // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып.42. – С.125-134. 3. Григорьев А.Л., Деряженко А.И., Король С.А. Динамический анализ цилиндрических пружин дизельной топливной аппаратуры // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 1. – С. 90-99. 4. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Учебник. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – 542 с. 5. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Абсолютная и относительная динамическая устойчивость гидромеханических узлов // см. статью в настоящем сборнике. – С. 88-106. 6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. 7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

Поступила в редколлегию 29.12.11



**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**Ю.Л. ГЕВОРКЯН**, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Надані визначення та розроблені елементи математичної теорії абсолютної та умовної стійкості гідромеханічних систем, що описуються рівняннями з зосередженими параметрами. Описані причини динамічної нестійкості диференціального та зворотного клапанів.

Даны определения и разработаны элементы математической теории абсолютной и условной устойчивости гидромеханических систем, описываемых уравнениями с сосредоточенными параметрами. Описаны причины динамической неустойчивости дифференциального и обратного клапанов.

Definitions and developed elements of the mathematical theory of absolute and conditional stability of hydromechanical systems described by equations with lumped parameters. Describes why the dynamic instability of the differential and check valves.

**Постановка задачи.** В данной публикации мы продолжим исследование, начатое в [1], и изучим условия, которые приводят к динамической неустойчивости клапанных гидромеханических узлов. Схемы узлов, применяемых в опытных образцах дизельной топливной аппаратуры, показаны на рис. 1 (смотри также [2 – 4]).

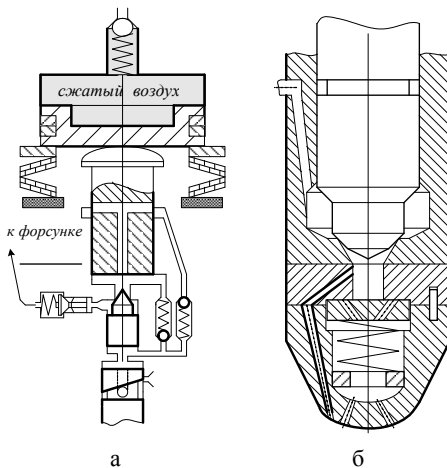


Рисунок 1 – Схемы гидромеханических узлов: а – насоса с аккумулялирующим плунжером и газовым поршнем; б – форсунки с изменяемым числом работающих сопловых отверстий.

Математическая модель узла. Рассматривается узел, состоящий из  $n$  полостей и  $m$  клапанов. Объём  $i$ -той полости обозначается  $w_i$ , давление жидкости в ней –  $p_i$ , скорость и перемещение  $s$ -го клапана –  $c_s$  и  $h_s$  соответственно. Площадь эффективного сечения канала, связывающего  $i$ -ю и  $j$ -ю полости, обозначаем  $\mu f_{ij}$ , площадь (или часть площади)  $s$ -того клапана, на которую действует перепад давлений между полостями  $i$  и  $j$  –  $f_{ij}^{(s)}$ . Некоторые полости узла соединены с трубопроводами; площади поперечного сечения трубопроводов,

связанных с  $i$ -той полостью обозначаем  $f_{ik}^{mp}$ , где  $k$  – номер трубопровода. Если объём этой полости изменяется не только при перемещениях клапанов, но и за счёт движения плунжеров, то соответствующую этому движению объёмную скорость обозначаем  $q_i$ .

С учётом принятых обозначений уравнение объёмного баланса для  $i$ -ой полости и уравнения движения  $s$ -го клапана примут следующий вид:

$$\alpha w_i \frac{dp_i}{dt} = -\sum_j [\mu f_{ij} s (p_i - p_j) + \sum_s f_{ij}^{(s)} c_s] + \sum_k (f_{ik}^{mp} / (a\rho))(p_i - F_{ik}) + q_i(t), \quad (1)$$

$$m_s \frac{dc_s}{dt} = \sum_{i,j} f_{ij}^{(s)} (p_i - p_j) - k_s [c_s(t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} c_s(t - lT_s)] - F_{np.o}^{(s)}; dh_s / dt = c_s(t), \quad (2)$$

где  $F_{ik}$  – величина отражённой волны давления, приходящей по  $k$ -тому трубопроводу в момент времени  $t$  (смотри [5]);  $m_s$  – масса клапана;  $k_s$  – коэффициент пропорциональности в формуле для определения силы пружины с учётом продольных колебаний витков (смотри [6]),  $k_s = 0.5 \cdot z_s \cdot T_s$ ;  $z_s, F_{np.o}^{(s)}$  – жёсткость и усилие предварительной затяжки пружины клапана;  $T_s$  – период свободных колебаний пружины;  $s(\Delta P) = \sqrt{(2/\rho) \cdot |\Delta P|} \cdot \text{sign}(\Delta P)$  – линейная скорость жидкости при перепаде давлений  $\Delta P$ .

Некоторые из давлений  $p_j$ , используемые в правой части уравнений (1) – (2), могут быть известными функциями времени либо константами и не относятся к динамическим параметрам узла.

Составим из динамических параметров  $p_i, c_i$  и  $h_i$  векторы-столбцы  $\vec{p}, \vec{c}, \vec{h}$  и перепишем систему уравнений (1) для  $i \in \overline{1, n}$  и (2) для  $s \in \overline{1, m}$  в матрично-векторной форме:

$$[W] \times d\vec{p} / dt = -\vec{Q}(\vec{h}, \vec{p}, t) - [FK] \times \vec{c} - [FT] \times \vec{p} + \vec{Q}_0(t), \quad (3)$$

$$[M] \times d\vec{c} / dt = [FK]^T \times \vec{p} - [Z] \times \vec{c} - \vec{F}_0(t); d\vec{h} / dt = \vec{c}(t), \quad (4)$$

где  $[W], [FT], [M], [Z]$  – диагональные матрицы порядков  $n$  и  $m$ ,

$$W_{ii} = \alpha(p_i) \cdot w_i; FT_{ii} = \sum_k f_{ik}^{mp} / (a\rho); M_{ss} = m_s; Z_{ss} = k_s \quad i = 1, \dots, n; s = 1, \dots, m;$$

$[FK]$  – прямоугольная матрица размера  $[n \times m]$ , составленная из площадей  $f_{ij}^{(s)}$  поперечного сечения клапанов; знак “ $T$ ” обозначает операцию транспонирования матрицы; компоненты вектора  $\vec{Q}$  имеют вид

$$Q_i = \sum_j \mu f_{ij}(\vec{h}, t) \cdot s(p_i - p_j). \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) составлены в полном соответствии с законами со-

хранения массы и импульса, то есть в отношении этих законов используемая модель является замкнутой (консервативной). Признаком замкнутости модели в отношении закона сохранения импульса является косая симметрия коэффициентов, используемых в правых частях этих уравнений. В то же время перетекание жидкости между полостями, описываемое *законом потеранных скоростей*, сопровождается переходом части механической энергии в тепло (что приводит к нагреванию жидкости и омываемых поверхностей). Аналогичные переходы происходят при ударе клапана о седло или ограничитель хода; все удары считаются полностью неупругими. Поэтому в отношении закона сохранения энергии данная модель остаётся открытой.

Линеаризуем зависимости (5), и однородную систему уравнений (3)-(5), отвечающую условиям  $\bar{Q}_0(t) = 0, \bar{F}_0(t) = 0$  запишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} [V] \\ [M] \\ [I] \end{pmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{c} \\ \bar{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B] & -[FK] & [D] \\ [FK]^T & [Z] & [\Theta] \\ [\Theta] & [I] & [\Theta] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{c} \\ \bar{h} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $B_{ij} = -\partial Q_i / \partial p_j - FT_{ij}$ ;  $D_{ij} = -\partial Q_i / \partial h_j$ ;  $[I], [\Theta]$  – единичная и нулевая матрицы.

Далее в этой статье мы рассмотрим несколько конкретных примеров таких матричных моделей и с их помощью проанализируем динамическую устойчивость соответствующих узлов. Но прежде сформулируем (напомним) необходимые определения и докажем ряд утверждений.

**Основные определения.** Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{X}} = F(\bar{X}, t), \quad (7)$$

описывает изменение во времени параметров некоторой гидромеханической системы, а вектор-функция  $\bar{X}(t)$  является решением этого уравнения, отвечающим начальному условию  $\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0$ ; она называется *невозмущённым движением* системы.

Изменим начальные условия *задачи Коши* и дадим вектору  $\bar{X}_0$  малое приращение  $\delta \bar{X}_0$ . При этом мы получим решение  $\bar{Y}$  уравнения (7), которое, по крайней мере, при  $t \approx t_0$  будет близким к  $\bar{X}(t)$ . Оно называется *возмущённым движением* системы.

Разность этих движений обозначим  $\delta \bar{X}(t)$ , то есть  $\bar{Y}(t) = \bar{X}(t) + \delta \bar{X}(t)$ . Вектор - функция  $\delta \bar{X}(t)$  удовлетворяет условию  $\delta \bar{X}(t_0) = \delta \bar{X}_0$  и называется *возмущением движения*.

Будем считать возмущение  $\delta \bar{X}(t)$  малым и линеаризуем правую часть

уравнения (7):

$$F(\bar{X} + \delta\bar{X}, t) = F(\bar{X}, t) + A(t) \cdot \delta\bar{X},$$

где  $A(t)$  – некоторая квадратная матрица, называемая *матрицей возмущения*.

Тогда 
$$\dot{\bar{X}} + \delta\dot{\bar{X}} = F(\bar{X}, t) + A(t) \cdot \delta\bar{X} \quad \text{и}$$

$$\delta\dot{\bar{X}} = A(t) \cdot \delta\bar{X}. \quad (8)$$

Таким образом, вектор возмущения является решением однородного дифференциального уравнения (8), общее решение которого имеет вид:

$$\delta\bar{X}(t) = \Pi(t, t_0) \cdot \delta\bar{X}(t_0),$$

где квадратная матрица  $\Pi(t, t_0)$  может быть представлена в виде *мультипликативного интеграла*

$$\Pi(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp(A(\tau) \cdot d\tau). \quad (9)$$

Невозмущённое движение называется *устойчивым (по А.М. Ляпунову)*, если при всех  $t > t_0$  нормы матриц  $\Pi(t, t_0)$  равномерно ограничены, то есть существует такая константа  $M < \infty$ , что

$$\|\Pi(t, t_0)\| \leq M;$$

в противном случае движение называется *неустойчивым*.

Невозмущённое движение называется *асимптотически устойчивым*, если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Pi(t, t_0)\| = 0.$$

Невозмущённое движение называется *динамически устойчивым в момент времени  $t$* , если все ненулевые собственные числа  $\lambda_j$  матрицы  $A(t)$  удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad (10)$$

в противном случае оно называется *динамически неустойчивым в момент  $t$* .

Из определений следует, что если движение является асимптотически устойчивым, то оно оказывается и устойчивым по Ляпунову. Заметим, что в практических задачах устойчивость по Ляпунову, как правило, оказывается асимптотической.

**Норма матрицы колебаний.** Получим удобную оценку для нормы блочной вещественной  $J$ - симметричной матрицы

$$S = \begin{pmatrix} B & -F \\ F^T & C \end{pmatrix}, \quad B \leq 0, C \leq 0, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} I & \Theta \\ \Theta & -I \end{pmatrix}.$$

Для этого составим матрицу  $A = S^T \cdot S$  и оценим её спектр:

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ -F^T & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & -F \\ F^T & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2 + F \cdot F^T & -B \cdot F + F \cdot C \\ -F^T \cdot B + C \cdot F^T & C^2 + F^T \cdot F \end{pmatrix}.$$

Для оценки будем использовать след этой матрицы. В результате получаем:

$$\|S\| \leq Sp(B^2 + F \cdot F^T) + Sp(C^2 + F^T \cdot F).$$

**Нормы ортогональных и  $J$  - ортогональных матриц.** Если матрица  $U$  является ортогональной, то её норма равняется 1.

Действительно, 
$$B = U^T \cdot U = I \Rightarrow \lambda_M = 1.$$

Если матрица  $U$  является не ортогональной, а  $J$  - ортогональной, то матрица  $B = U^T \cdot U$  оказывается симметричной, положительной и также  $J$  - ортогональной. Спектр такой матрицы разбивается на пары собственных чисел  $\lambda, 1/\lambda$ , причём все эти числа не могут равняться 1 (иначе матрица  $U$  будет ортогональной). Следовательно, норма  $J$  - ортогональной (но не ортогональной) матрицы обязательно больше 1.

**Норма обратной матрицы.** Предположим, что матрица  $A$  является невырожденной. Тогда:

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|^2 &= \max_{Z \neq \Theta} \frac{\langle A^{-1} \cdot Z, A^{-1} \cdot Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} = |Z = A \cdot X| = \max_{X \neq \Theta} \frac{\langle X, X \rangle}{\langle A \cdot X, A \cdot X \rangle} \geq \\ &\geq \min_{X \neq \Theta} \frac{\langle X, X \rangle}{\langle A \cdot X, A \cdot X \rangle} = \left( \max_{X \neq \Theta} \frac{\langle A \cdot X, A \cdot X \rangle}{\langle X, X \rangle} \right)^{-1} = \|A\|^{-2} \end{aligned}$$

Следовательно, нормы исходной и обратной матрицы связаны условием

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1. \tag{11}$$

**Абсолютная и асимптотическая устойчивость.** Докажем, что если все собственные числа  $\lambda_j$  матрицы  $A$  удовлетворяют условию (10)  $\text{Re } \lambda_j < 0$ , то матрица  $B(t) = \exp(A \cdot t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  является сжимающей.

При доказательстве будем считать, что матрица  $A$  имеет диагональное представление

$$A = X \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot X^{-1}.$$

Тогда

$$B(t) = X \cdot \text{diag}(\exp(\lambda_1 \cdot t), \exp(\lambda_2 \cdot t), \dots, \exp(\lambda_n \cdot t)) \cdot X^{-1} = X \cdot D(t) \cdot X^{-1}.$$

Диагональные элементы матрицы  $D(t)$  имеют вид:

$$\exp(\lambda_j \cdot t) = \exp(t \cdot \operatorname{Re} \lambda_j) \cdot [\cos(t \cdot \operatorname{Im} \lambda_j) + i \cdot \sin(t \cdot \operatorname{Im} \lambda_j)].$$

Если число  $t$  устремить к бесконечности, то в силу условия (10) все диагональные элементы этой матрицы будут стремиться к нулю, следовательно

$$D(T) \rightarrow \Theta \text{ и } \|D(t)\| \rightarrow 0.$$

Тогда  $\|B(t)\| = \|X \cdot D(t) \cdot X^{-1}\| \leq \|X\| \cdot \|X^{-1}\| \cdot \|D(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и это означает, что существует такое  $T < +\infty$ , что при всех  $t > T$  выполняется условие

$$\|B(t)\| < 1,$$

то есть матрица  $B(t)$  становится сжимающей.

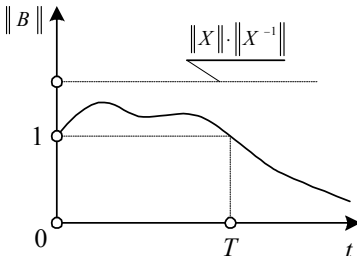


Рисунок 2 – Характер изменения нормы.

Если учесть, что в задачах из технических приложений величина  $t$  – это время, то полученный результат можно трактовать так: через определённый период времени  $T$  любой вектор  $X(t)$ , являющийся решением уравнения

$$\dot{X} = A \cdot X$$

при некотором начальном условии  $X(0) = X_0$ , будет иметь меньшую евклидову длину, чем вектор начальных условий  $X_0$ .

Характерное изменение нормы матрицы  $B(t)$  показано на рис. 2. То, что  $\|B(0)\| = 1$ , очевидно. Кроме того, должно быть понятно, что если

$$\left. \frac{d}{dt} \|B(t)\| \right|_{t=0} \leq 0, \text{ то } \|B(t)\| \leq 1$$

при всех  $t > 0$ , и тогда  $T = 0$ .

Но если производная положительна, то  $T > 0$ , а график нормы может иметь несколько максимумов и минимумов и выглядеть достаточно сложно.

**Время до начала сжатия: сколько нужно ждать?** Приведенное в предыдущем пункте исследование носит качественный характер и не даёт прямых количественных оценок для периода времени ожидания  $T$ . Произведение норм  $\|X\| \cdot \|X^{-1}\|$ , как показано в (11), всегда больше 1, поэтому если пользоваться приведенными выше неравенствами, то окажется, что величина  $T$  обязана быть положительной.

Однако эти неравенства являются слишком грубыми и не дают возмож-

ность понять, что в ряде случаев ждать вообще не придётся, то есть матрица  $B(t)$  является сжимающей при любом  $t > 0$ , а, значит, её норма монотонно убывает (рис. 3).

Очевидно, что так будет, например, в том случае, если матрица  $A$  окажется диагональной. Но этот случай встречается редко. Куда более важным является другой случай, когда эта матрица оказывается блочной J - симметричной *матрицей колебаний*

$$S = \begin{pmatrix} B & -F \\ F^T & C \end{pmatrix}.$$

Действительно, в этом случае произведение  $X^T(t) \cdot X(t)$  пропорционально полной механической энергии системы, и поэтому евклидова длина вектора  $X(t)$  с течением времени  $t$  монотонно убывает (или, по крайней мере, не возрастает), следовательно,

$$\| \exp(S \cdot t) \| \leq 1 \text{ при всех } t > 0.$$

Заметим, что доказать этот же факт *алгебраически*, не используя физический смысл решаемой задачи, трудно. В следующем пункте мы приведём свой вариант формального доказательства этого результата.

**Устойчивость мультипликативного матричного интеграла.** Покажем, что *если непрерывная матрица-функция  $C(t)$  в каждый момент времени  $t$  удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Re}(C(t)) < 0, \tag{12}$$

*то матрица  $\Pi = \int_0^t \exp(C(\tau) \cdot d\tau)$  является сжимающей.*

Для этого мы, прежде всего, для вычисления матрицы  $\exp[C(\xi) \cdot \Delta\tau]$  воспользуемся формулой

$$\exp[C(\xi) \cdot \Delta\tau] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( I + \frac{1}{k} \cdot C(\xi) \cdot \Delta\tau \right)^k$$

и докажем, что матрица  $A = I + C(\xi) \cdot (\Delta\tau/k)$  при больших  $k$  сжимающая.

Представим матрицу  $B = A^T \cdot A$  в виде суммы:  $B = I + G + H$ , где  $G = [C(\xi) + C^T(\xi)] \cdot (\Delta\tau/k) = 2 \cdot \operatorname{Re}(C(\xi)) \cdot (\Delta\tau/k)$ ;  $H = C^T(\xi) \cdot C(\xi) \cdot (\Delta\tau/k)^2$ .

Матрица  $G$  имеет вещественный и отрицательный спектр, все точки  $\lambda$  которого удовлетворяют условию

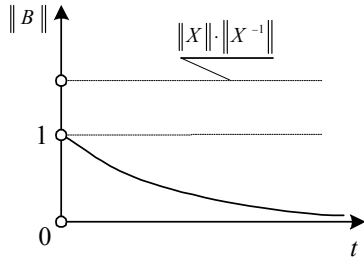


Рисунок 3 – Монотонный характер изменения нормы.

$$-a(\xi) \cdot (\Delta\tau/k) \leq \lambda \leq -b(\xi) \cdot (\Delta\tau/k),$$

где  $a(\xi)$ ,  $b(\xi)$  – некоторые положительные числа.

Поэтому при достаточно малом значении  $(\Delta\tau/k)$  все точки спектра матрицы  $I + G$  попадают внутрь отрезка  $]0; 1 - b(\xi) \cdot (\Delta\tau/k)[$ , и

$$\|I + G\| < 1 - b(\xi) \cdot (\Delta\tau/k).$$

Норма матрицы  $H$  оценивается так:

$$\|H\| \leq \|C^T(\xi)\| \cdot \|C(\xi)\| \cdot (\Delta\tau/k)^2 = c(\xi) \cdot (\Delta\tau/k)^2, \text{ где}$$

$$c(\xi) = \|C^T(\xi)\| \cdot \|C(\xi)\|.$$

Поэтому

$$\|B\| \leq \|I + G\| + \|H\| \leq 1 - b(\xi) \cdot (\Delta\tau/k) + c(\xi) \cdot (\Delta\tau/k)^2,$$

и

$$\|\exp[C(\xi) \cdot \Delta\tau]\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - b(\xi) \cdot (\Delta\tau/k) + c(\xi) \cdot (\Delta\tau/k)^2)^k =$$

$$= \exp(-b(\xi) \cdot \Delta\tau).$$

Следовательно,

$$\|\exp[C(\xi) \cdot \Delta\tau]\| \leq \exp(\lambda_{\max}(\xi) \cdot \Delta\tau),$$

где  $\lambda_{\max}(\xi) < 0$  – наибольшее собственное число матрицы  $\text{Re } C(\xi) < 0$ , и

$$\|P\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \exp(\lambda_{\max}(\xi_i) \cdot \Delta\tau_i) = \exp\left(\int_0^t \lambda_{\max}(\xi) \cdot d\xi\right) < 1, \quad (13)$$

то есть матрица  $P$  – сжимающая.

Полученный результат, в частности, означает, что если матрица  $C(t)$  в каждый момент времени  $t$  является блочной  $J$ -симметричной матрицей (матрицей колебаний  $S$ ), то уравнение вида  $\dot{X} = S \cdot X$  имеет не только устойчивое, но и *абсолютно устойчивое* решение (то есть *пакет решений, отвечающих различным начальным условиям, с течением времени монотонно сжимается*).

Покажем, что если не требовать от решения абсолютной устойчивости, а ограничиться обычной или асимптотической устойчивостью, то мы сможем использовать полученный результат для большего числа уравнений.

Прежде всего, рассмотрим уравнение вида  $\dot{X} = D^{-1} \cdot S(t) \cdot X$ , которое, например, получается из исходного уравнения  $D \cdot \dot{X} = S(t) \cdot X$  в результате простейшего («грубого») преобразования, нарушающего симметрию матрицы. Для сравнения напомним, как выглядит «тонкое» преобразование, сохра-



няющее симметрию:

$$D^{1/2} \cdot \dot{X} = D^{-1/2} \cdot S(t) \cdot D^{-1/2} \cdot D^{1/2} \cdot X, \text{ то есть } \dot{Y} = \hat{S}(t) \cdot Y,$$

где

$$Y = D^{1/2} \cdot X; \hat{S}(t) = D^{-1/2} \cdot S(t) \cdot D^{-1/2}.$$

Матрицы  $\hat{S}(t)$  и  $A(t) = D^{-1} \cdot S(t)$  имеют одинаковый спектр, но первая из них удовлетворяет условию (12), а вторая – нет.

Это, в частности, означает, что решения  $Y$  являются абсолютно устойчивыми, а решения  $X$  могут таковыми не быть. Но, в силу существования зависимости  $X = D^{-1/2} \cdot Y$ , решения  $X$  будут устойчивыми. Поэтому, при решении практических задач переход к обобщённым координатам (фазовым переменным) является желательным, но, всё же, он не обязателен.

Другое расширение круга уравнений касается уже не формы решения, а существа задачи. Пусть матрица - функция  $C(t)$  такова, что условие (12)  $[C(t) + C^T(t)] < 0$  выполняется не при всех  $t$ , но максимальное собственное число  $\lambda_{\max}(t)$  матрицы  $[C(t) + C^T(t)]$  удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} \lambda_{\max}(t) \cdot dt = -\infty.$$

Тогда, как это непосредственно следует из оценки (13), норма матрицы  $P(t)$  стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к нулю, а решения уравнения  $\dot{X} = C(t) \cdot X$  асимптотически устойчивы.

**Лучшее - враг хорошего.** Мы подтвердим эту истину, используя хрестоматийный пример из теории (и истории) регулирования. После знакомства с представленными выше (а также в [1]) результатами может сложиться впечатление, что движение любой механической системы является устойчивым. Чтобы развеять эту иллюзию, мы ниже проанализируем ещё один пример. Но прежде хотелось бы подчеркнуть, что в большинстве случаев движение механической системы действительно является устойчивым. И причина устойчивости лежит, как вы, наверное, это понимаете, не в той плоскости, которая изучается здесь при помощи матриц, а гораздо глубже.

Действительно, если хотя бы одно собственное число  $\lambda = \alpha + i \cdot \beta$  матрицы  $C$ , используемой в уравнении

$$\dot{X} = C \cdot X, \tag{14}$$

попадёт не в левую, а в правую полуплоскость, то в решении этого уравнения появятся слагаемые, амплитуда которых будет возрастать со скоростью  $\exp(\alpha \cdot t)$ . Поскольку этот экспоненциальный рост будет происходить неог-

раниченно, то и энергия колебательного движения также будет возрастать до бесконечности.

И тут возникают естественные вопросы – откуда система черпает эту энергию? Не ошиблись ли мы при составлении уравнения (14)? Возможно, мы не учли все влияющие факторы и связи?

Часто так и бывает, и после исправления уравнений устойчивость решения восстанавливается. Но бывают и другие ситуации, в которых для восстановления устойчивости приходится не исправлять уравнения, а изменять сам моделируемый объект. Для этого объект оснащается, например, дополнительным механическим (или гидромеханическим) узлом, называемым *регулятором*. В школьном курсе физики знакомят с устройством и принципом работы *регулятора Уатта* (рис. 4), используемого на первых паровых машинах. За прошедшие годы техника ушла далеко вперёд и ни сами эти двигатели, ни их регуляторы теперь не используются. Но им на смену пришли другие машины, и там, чтобы спроектировать надёжно работающий регулятор, понадобится знание спектра матрицы высокого порядка. А мы сейчас воспользуемся простейшей динамической моделью машинного агрегата и ограничимся классическим исследованием спектра получаемой при этом матрицы третьего порядка.

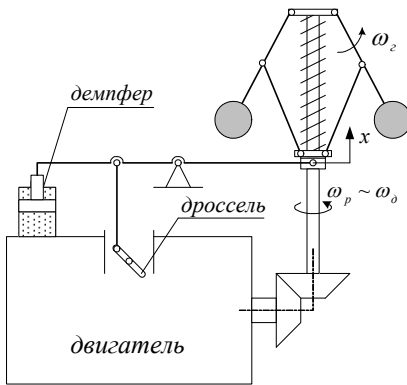


Рисунок 4 – Предельный регулятор Уатта.

Примем, что крутящий момент  $M_{кр}$ , развиваемый паровой машиной, пропорционален перемещению  $x$  муфты регулятора, а момент сопротивления  $M_c$  пропорционален угловой скорости  $\omega_\delta$  вращения её вала, то есть

есть

$$M_{кр} = -k_{рег} \cdot x ; \quad M_c = f_{ов} \cdot \omega_\delta .$$

На установившемся режиме работы машины наблюдается равновесие между центробежной силой  $F_u$ , пытающейся увеличить угол раскрытия грузов, и силой пружины  $F_{np}$ , стремящейся уменьшить этот угол. Примем, что вблизи положения равновесия изменение первой силы пропорционально отклонению  $\delta\omega_\delta$  угловой скорости вала двигателя, а второй – перемещению муфты регулятора, то есть:

$$\Delta F_u = k_{ов} \cdot \delta\omega_\delta ; \quad \Delta F_{np} = k_{zp} \cdot x .$$

Тогда работа паровой машины, снабжённой центробежным регулятором Уатта, приближённо описывается следующей системой уравнений:

$$j_{zp} \cdot \dot{\omega}_{zp} = -f_{pez} \cdot \omega_z + k_{\delta\delta} \cdot \delta\omega_\delta - k_{zp} \cdot x;$$

$$j_{\delta\delta} \cdot \dot{\delta\omega}_{\delta\delta} = -k_{\delta\delta} \cdot \omega_{zp} - f_{\delta\delta} \cdot \delta\omega_\delta - k_{pez} \cdot x; \quad z_{np} \cdot \dot{x} = k_{zp} \cdot \omega_{zp},$$

где  $j_{zp}$ ,  $j_{\delta\delta}$  – моменты инерции, приведенные к грузам и к валу двигателя;  $z_{np}$  – коэффициент жёсткости пружины;  $f_{pez}$  – приведенный коэффициент трения в регуляторе (главным образом – в его гидравлическом демпфере).

Перепишем систему в форме матричного дифференциального уравнения

$$D \cdot \dot{Y} = A \cdot Y,$$

где  $D = \text{diag}(j_{zp}, j_{\delta\delta}, z_{np})$ ;  $Y = \begin{pmatrix} \omega_{zp} \\ \delta\omega_{\delta\delta} \\ x \end{pmatrix}$ ;  $A = \begin{pmatrix} -f_{pez} & k_{\delta\delta} & -k_{zp} \\ -k_{\delta\delta} & -f_{\delta\delta} & -k_{pez} \\ k_{zp} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

К сожалению, матрица  $A$  не является блочной J - симметричной матрицей (матрицей колебаний); этому «мешает» коэффициент регулирования  $k_{pez}$ . Если убрать это препятствие и принять  $k_{pez} = 0$ , то матрица  $A$  будет удовлетворять условию  $A + A^T \leq 0$ , гарантирующему устойчивость. Но, отсоединив тягу от дроссельной заслонки, мы оставили двигатель без его предельного регулятора! В результате, если произойдёт резкий сброс нагрузки, то величина угловой скорости вала станет недопустимо высокой, и машина пойдёт «в разнос» (пусть и устойчиво, но от осознания этого факта окружающим легче не станет).

Прежде, чем исследовать спектр задачи, перейдём к обобщённым переменным и получим матрицу

$$S = D^{-1/2} \cdot A \cdot D^{-1/2} = \begin{pmatrix} -\hat{f}_{pez} & \hat{k}_{\delta\delta} & -\hat{k}_{zp} \\ -\hat{k}_{\delta\delta} & -\hat{f}_{\delta\delta} & \hat{k}_{pez} \\ \hat{k}_{zp} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

все элементы этой матрицы имеют физическую размерность [1/с].

Далее найдём коэффициенты характеристического многочлена и воспользуемся критерием Рауса–Гурвица [7]:

$$-\det(S - \lambda I) = \lambda^3 + \lambda^2 (\hat{f}_{\delta\delta} + \hat{f}_{zp}) + \lambda (\hat{f}_{\delta\delta} \hat{f}_{zp} + \hat{k}_{\delta\delta}^2 + \hat{k}_{zp}^2) + \hat{k}_{zp} (\hat{f}_{\delta\delta} \hat{k}_{zp} + \hat{k}_{\delta\delta} \hat{k}_{pez}).$$

Получается, что работа машины будет асимптотически устойчивой в том, и только в том случае, если выполнится условие:

$$(\hat{f}_{\delta\delta} + \hat{f}_{zp})(\hat{f}_{\delta\delta} \hat{f}_{zp} + \hat{k}_{\delta\delta}^2 + \hat{k}_{zp}^2) > \hat{k}_{zp} (\hat{f}_{\delta\delta} \hat{k}_{zp} + \hat{k}_{\delta\delta} \hat{k}_{pez}),$$

или, что эквивалентно,

$$(\hat{f}_{\text{дв}} + \hat{f}_{\text{зр}})(\hat{f}_{\text{дв}}\hat{f}_{\text{зр}} + \hat{k}_{\text{дв}}^2) + \hat{f}_{\text{зр}}\hat{k}_{\text{зр}}^2 > \hat{k}_{\text{зр}}\hat{k}_{\text{дв}}\hat{k}_{\text{рег}}$$

Ясно, что эти условия выполняются не при любых соотношениях коэффициентов. В частности, если уменьшать коэффициент трения  $f_{\text{зр}}$  и снижать моменты инерции  $j_{\text{зр}}, j_{\text{дв}}$ , то вероятность нарушения условия возрастёт.

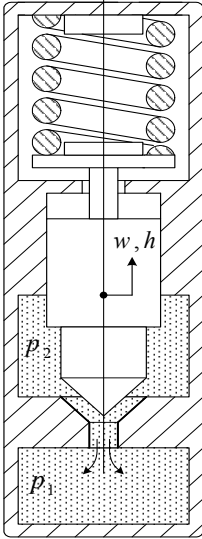


Рисунок 5 –  
Схема клапана.

Именно это в своё время и произошло с новыми быстроходными паровыми машинами, которые начали выпускать в середине XIX - го столетия. Стремясь до предела уменьшить трение в регуляторе, конструкторы «загнали» двигатели в зону неустойчивой работы. Потом, когда математики разобрались с причиной неустойчивости, регулятор стали оснащать гидравлическим демпфером, увеличивающим трение. С этого момента и началась история новой науки – теории автоматического регулирования.

**Неустойчивость клапана в режиме опрокинутого течения.** Выполнение условия (13)

$$b \cdot f < -a \cdot z_{\text{нр}}$$

из статьи [1] предполагает, что течение жидкости происходит в направлении, противоположном подъёму клапана. Ясно, что возникающий *режим опрокинутого течения* далёк от положения статического равновесия, и это обстоятельство должно быть учтено при линеаризации системы уравнений. Но учесть его не сложно: достаточно заменить равновесные значения  $\Delta p_0$  и  $h_0$  теми реальными значениями  $\Delta p(t_0)$  и  $h(t_0)$ , которые наблюдаются в данный момент времени  $t_0$ .

Если мы будем и в этом случае считать, что площадь проходного сечения пропорциональна подъёму клапана, то указанное условие можно представить в следующем виде

$$2 \cdot f \cdot \Delta p < -z_{\text{нр}} \cdot h.$$

На практике это условие выполняется буквально сразу же после опрокидывания течения, поэтому все такие режимы считаются статически (и динамически) неустойчивыми.

**Дифференциальный клапан.** Но в технике используются и такие клапана, для которых обратное направление течения жидкости является основным. К таковым, например, относится так называемый *дифференциальный клапан*, рис. 5.

Очевидная особенность этого клапана заключается в том, что силы давления жидкости, действующие на клапан из полостей системы, здесь не вычитаются, а складываются. Кроме того, перемещение клапана приводит к изменению суммарного объёма жидкости в полостях системы, то есть закон сохранения объёма здесь не действует.

Часть поперечного сечения клапана, контактирующая с полостью 2 (обозначим её  $f_2$ ), называется *дифференциальной площадкой*; остальную часть этой площади обозначим  $f_1$ . Тогда, если мы повторим для этого случая все преобразования, проведенные в примере из статьи [1], то получим ту же самую задачу, в которой матрица  $A$  имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & -f_1 & -b \\ a & -a & -f_2 & b \\ f_1 & f_2 & 0 & -z_{np} \\ 0 & 0 & z_{np} & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не имеет пропорциональных строк или столбцов, но всё же является вырожденной. Поэтому, как и в предыдущем случае, одно из собственных чисел матрицы  $D^{-1} \cdot A$  равно 0, а три остальных являются решением кубического уравнения

$$\lambda^3 + \frac{a\lambda^2}{\alpha w} + \frac{\lambda}{m\alpha} \left( \alpha z_{np} + \frac{f_1^2}{w_1} + \frac{f_2^2}{w_2} \right) = \frac{-1}{m\alpha} \left( \frac{a}{\alpha} \left[ \frac{f^2}{w_1 w_2} + \frac{\alpha z_{np}}{w} \right] + b \left[ \frac{f_1}{w_1} - \frac{f_2}{w_2} \right] \right),$$

где  $f = f_1 + f_2$ ;  $1/w = 1/w_1 + 1/w_2$ .

Как следует из полученного результата, оказалось, что если при проектировании клапана выдержать пропорцию

$$f_1 / f_2 = w_1 / w_2, \tag{15}$$

то он будет устойчиво работать при любых подъёмах и перепадах давления. Действительно, в этом случае коэффициент  $b$  не влияет на корни уравнения, а если мы подставим в матрицу  $A$  значение  $b = 0$ , то получим  $J$ -симметричную матрицу колебаний.

Далее мы будем предполагать, что  $f_1 / f_2 > w_1 / w_2$ . Тогда, если коэффициент  $b < 0$  (что соответствует перепаду давлений  $\Delta p = p_1 - p_2 < 0$  и течению жидкости по направлению, указанному стрелками), то условие Гурвица [7]

$$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \tag{16}$$

будет заведомо выполнено, и причиной неустойчивости может быть только нарушение условия  $a_3 > 0$ . Это возможно, если

$$h < [(f_1/w_1 - f_2/w_2)/(f^2/(w_1 + w_2) + \alpha \cdot z_{np})] \cdot (2 \cdot \alpha \cdot w \cdot |\Delta p|), \quad (17)$$

то есть при малых ( $\alpha$ , возможно, и при не очень малых) подъёмах клапана.

Обнаруженная динамическая неустойчивость в зоне малых подъёмов дифференциального клапана на самом деле может оказаться полезной, поскольку ускоряет его открытие. Так, например, для форсунок (рис. 6) дизельных двигателей (где  $f_1/f_2 \gg w_1/w_2$ ) указанная зона может занимать весь рабочий интервал подъёма клапана (иглы) или его большую часть. Благодаря этому до минимума сокращается продолжительность того участка, где малый подъём иглы оказывает сильное дросселирующее влияние на поток.

При проектировании форсунки нужно добиться того, чтобы игла не «зависала» в промежуточном положении, а двигалась от нижнего упора к верхнему упору и обратно. Поэтому зону динамической неустойчивости по условию (17), придается не сужать, а расширять.

Когда коэффициент  $b > 0$  (что соответствует течению жидкости в противоположном направлении), то теперь условие  $a_3 > 0$  заведомо выполняется, а условие (16) будет нарушено, если

$$h < 2 \cdot \alpha \cdot \Delta p / (f_1/w_1 - f_2/w_2). \quad (18)$$

Чтобы дифференциальный клапан работал качественно и надёжно, зона неустойчивости (18) должна быть сужена до предела. Иначе он может легко потерять герметичность и «распахиваться» даже под действием сил упругости нижнего упора (седла). В форсунках дизелей ширина этой зоны составляет доли микрона, то есть этот эффект имеет только теоретическое значение.

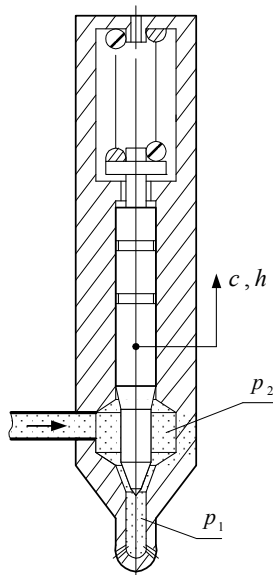


Рисунок 6 – Форсунка.

**Определения абсолютной и относительной устойчивости.** В форсунках высокооборотных дизелей и во многих других технических устройствах все переходные процессы настолько скоротечны, что динамическая неустойчивость, как правило, не приводит к тем тяжёлым последствиям, которые, например, наблюдались при неправильной работе регулятора паровой машины (смотри выше).

Пусть вектор - функция  $\delta \vec{X}$ , составленная из возмущений динамических параметров устройства, является решением уравнения

$$\dot{\delta \vec{X}} = A(t) \cdot \delta \vec{X}. \quad (19)$$

Составим матрицу

$$\operatorname{Re} A(t) = (1/2) \cdot (A + A^T).$$

Если эта матрица при всех  $t \in [0; T]$  удовлетворяет неравенству  $\operatorname{Re} A(t) < 0$ , то невозмущённое движение на промежутке  $t \in [0; T]$  называется *абсолютно устойчивым*. При этом, как это уже было показано выше, матрица

$$P(t, 0) = \int_0^t \exp(A(\tau) \cdot d\tau),$$

оказывается сжимающей при всех  $t > 0$ , что и гарантирует монотонное с течением времени  $t$  уменьшение евклидовой нормы вектора возмущений  $\delta \vec{X}(t)$ .

Предположим, теперь, что матрица  $A(t)$  при всех (или при некоторых)  $t$  не удовлетворяет условию  $\operatorname{Re} A(t) < 0$ . Обозначим её максимальное собственное число  $\lambda_{\max}(t)$ . Тогда, в силу оценки (13), норма мультипликативного интеграла  $P(t, 0)$  удовлетворяет неравенству

$$\|P(t, 0)\| \leq \Lambda(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) \cdot d\tau\right).$$

Если причины, вызывающие возмущение решения, действуют только в начальный момент времени  $t = 0$ , то мы можем ограничиться этой оценкой.

Но когда для интегрирования уравнений движения используются численные методы, то причины, вызывающие возмущение решения, действуют непрерывно (в каждый момент времени  $t_0 \in [0; T]$ ). Возмущение решение связано в этом случае, как с погрешностью используемого метода, так и с округлением чисел в процессоре. Поэтому наряду с матрицей - функцией  $P(t, 0)$  мы обязаны рассмотреть семейство мультипликативных интегралов

$$P(t, t_0) = \int_{t_0}^t \exp(A(\tau) \cdot d\tau),$$

и выполнить для них аналогичную оценку:

$$\|P(t, t_0)\| \leq \Lambda(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) \cdot d\tau\right). \quad (20)$$

Пусть функция  $\Lambda(t, t_0)$  для всех  $t, t_0 \in [0; T]$  удовлетворяет условию

$$\Lambda(t, t_0) < M,$$

где  $M$  – некоторая константа, *существенно меньшая бесконечности* (обычно  $M = 10 \dots 1000$ ).

Тогда невозмущённое движение на промежутке времени  $t \in [0; T]$  считается *относительно устойчивым*.

Смысл этого термина поясняет рис. 7. На заштрихованных участках, где

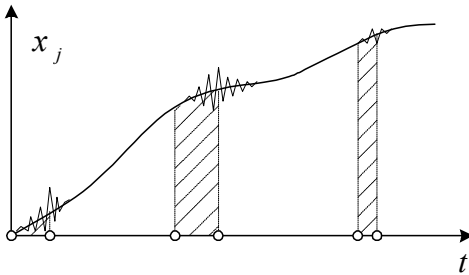


Рисунок 7 – Характер движения в условиях относительной устойчивости.

наблюдается возрастание амплитуды возмущения, имеет место динамическая неустойчивость движения, а там, где эта амплитуда уменьшается, движение устойчиво. Константа  $M$  обычно выбирается с учётом того, чтобы амплитуда возмущений оставалась существенно (на несколько

порядков) меньшей амплитуды основного тона колебаний (и, возможно, нескольких обертонов); в противном случае

возмущения начинают «взаимодействовать» с невозмущённым движением, и выполненная линеаризация уравнений математической модели теряет смысл.

Кроме того, если максимум функции  $\Lambda(t, t_0)$  окажется слишком большим, то на результаты расчёта начнут оказывать существенное влияние погрешности округления чисел в компьютере, что недопустимо.

**Абсолютная устойчивость клапана.** Если мы используем эту теорию для прямого или дифференциального клапана, то получим, что характерно, одну и ту же матрицу

$$\operatorname{Re}(A) = D^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} -a - \hat{q} & a & 0 & -b/2 \\ a & -a - f_m & 0 & b/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b/2 & b/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot D^{-1/2},$$

у которой одно собственное число равно 0, а три остальных удовлетворяют некоторому кубическому уравнению. В частности, если полости изолированы ( $\hat{q} = 0$ ;  $f_m = 0$ ), то это уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + [a / (\alpha \cdot w)] \cdot \lambda^2 - (b/2)^2 / (\alpha \cdot w \cdot z_{np}) \cdot \lambda = 0.$$

В этом случае, поскольку  $b \neq 0$ , то одно из собственных чисел (обозначим его  $\lambda_{\max}(t)$ ) оказывается положительным при всех значениях  $t$ . Следовательно, переходный процесс в таком устройстве не является абсолютно устойчивым, но, если воспользоваться оценкой (20), то ещё имеется шанс пока-



зять, что он относительно устойчив.

Если полости не изолированные, а проточные, то, как правило, на разных фазах переходного процесса величина  $\lambda_{\max}(t)$  принимает значения разных знаков. Уменьшение диагональных элементов матрицы  $A$  смещает весь спектр матрицы  $\text{Re } A$  влево по вещественной оси и, тем самым, повышает устойчивость движения.

Разобраный пример даёт возможность подчеркнуть ещё один важный момент. Оказалось, что значения площадей  $f_1, f_2$  поперечного сечения дифференциального клапана (или общей площади  $f$  поперечного сечения прямого клапана) вообще не влияют на спектр матрицы  $\text{Re } A$ .

В то же время, эти величины влияют на спектр матрицы  $A$ . Более того, выбор площадей  $f_1, f_2$  в соответствии с пропорцией (15) гарантирует расположение всех собственных чисел этой матрицы в левой полуплоскости.

Следовательно, выполнение условия (10) все  $\text{Re } \lambda_j < 0$  не гарантирует выполнение условия (12)  $\text{Re } A < 0$ . Кроме того, в том случае, если

- матрица  $A$  имеет элементы, изменяющиеся с течением времени,
  - анализируемый переходный процесс является длительным,
- то *выполнение условий (10) ещё не гарантирует устойчивость и асимптотическую устойчивость движения.*

**Динамическая неустойчивость обратного клапана.** Клапан, показанный на рис. 8, был разработан для дизелей семейств *КамАЗ* и *ЯМЗ* и предназначался для стабилизации остаточного давления в топливной системе. Но во время проведения испытания на стендах выяснилось, что обратный шариковый клапан теряет герметичность (смотри [8]). Для выяснения причин была составлена матричная математическая модель этого узла и получено уравнение для собственных частот  $\lambda$ :

$$\det[A - \lambda \cdot D] = 0, \text{ где } D = \text{diag}(\alpha w_1; \alpha w_2; \alpha w_3; \alpha w_4; m_k; 1);$$

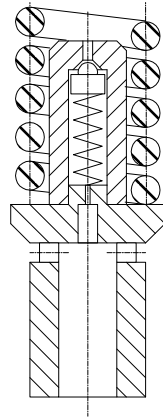


Рисунок 8 –Клапан двойного действия.

$$A = \begin{bmatrix} -q_f - q_{1,2} & q_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{1,2} & -q_{1,2} - q & q & 0 & -f_k & -d \\ 0 & q & -q - q_{3,4} & q_{3,4} & f_k & d \\ 0 & 0 & q_{3,4} & -q_{3,4} - q_{4,0} & 0 & 0 \\ 0 & f_k & -f_k & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

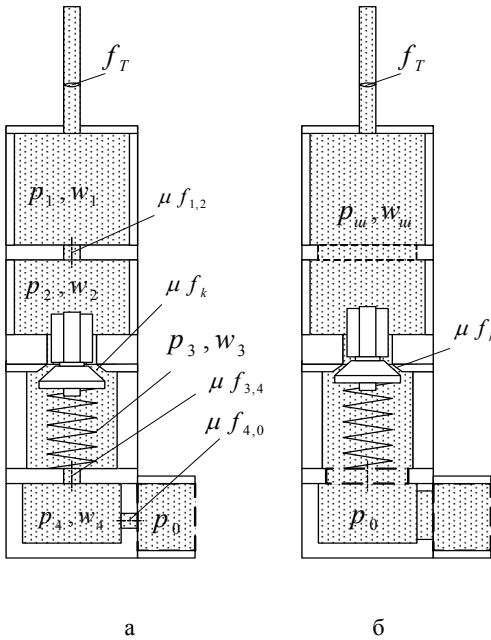


Рисунок 9 – Гидравлическая схема для динамического анализа при существенных (а) и малых (б) подъемах обратного клапана.

$$q_{4,0} = \mu f_{4,0} \sqrt{1/(2\rho |p_4 - p_0|)};$$

$$q = \mu f_k(h) \sqrt{1/(2\rho |p_2 - p_3|)};$$

$$q_{1,2} = \mu f_{1,2} \sqrt{1/(2\rho |p_1 - p_2|)};$$

$$q_{3,4} = \mu f_{3,4} \sqrt{1/(2\rho |p_3 - p_4|)};$$

$$q_f = f_T / (a\rho);$$

$$d = d \mu f_k(h) / dh \cdot s(p_2 - p_3);$$

$$z = z_k \cdot T_{np,k} / 2.$$

Обозначения разъяснены на рис. 9. Если  $d = 0$ , то матрица  $A$  является матрицей колебаний.

Анализ уравнения показал, что при возрастании величины  $q_{1,2}$  все собственные частоты  $\lambda_j$  перемещаются по комплексной плоскости влево, что приводит к повышению устойчивости. Аналогичное свойство имеет место и в отношении величин  $q_{3,4}$  или  $q_{4,0}$ . Следовательно, для достижения предельно возможной устойчивости узла дроссели должны быть убраны, и мы приходим к схеме рис. 9 б.

При анализе схемы выявлена неустойчивость обратного клапана для вы-

соких значениях остаточного давления  $p_{ост}$ , вызванная нарушением условия

$$f_T d_{шар} \operatorname{tg} \phi > 3 w_{ш} \sqrt{2 \alpha p_{ост}},$$

где  $d_{шар}$  – диаметр шарика;  $\phi$  – угол запорного конуса.

Были намечены пути устранения неустойчивости; результаты их практической реализации описаны в [9].

**Выводы.** Разграничены и конкретизированы понятия абсолютной и условной динамической устойчивости гидромеханической системы, разработаны необходимые элементы математической теории и приведены примеры. Доказано, что режим опрокинутого течения сопровождается неустойчивостью клапанного узла. Получены условия обеспечения устойчивости гидромеханических узлов с дифференциальными и обратными клапанами.

**Список литературы:** 1. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов // смотри статью в настоящем сборнике. – С.74-87. 2. Григорьев А.Л., Врублевский А.Н. Универсальный метод гидродинамического расчёта топливного насоса свободнопоршневого двигателя // Вестник НТУ «ХПИ» – Харьков, 2001. – Вып.1. – С.65-80. 3. Єроценков С.А., Григорьев О.Л., Зонов В.Д. Математичне моделювання процесу паливоподачі в форсунках спеціальної конструкції // Збірник наукових праць ХарДАЗТ. – Харків, 2001. – Вип. 45. – С.82-88. 4. Врублевский А.Н., Григорьев А.Л., Грицюк А.В., и др. Особенности математического моделирования гидромеханических процессов ЭГФ // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – № 1. – С. 44-52. 5. Подача и распыливание топлива в дизелях / И. В. Астахов, В. И. Трусов, А.С. Хачиян и др. - М.: Машиностроение, 1972. 6. Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л. О связи силы пружины с законом её деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1985. – Вып.39. – С.7-22. 7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. 8. Григорьев А.Л. Анализ условий устойчивости обратного клапана дизельного топливного насоса // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – № 1. – С. 8-13. 9. Єлістратов В.О. Підвищення стабільності впорскування палива комбінованою паливною системою дизеля. – Автореферат дис. ... канд. техн. наук. за спец. 05.05.03 – двигуни та енергетичні установки. – Харків, 2011. – 20 с.

Поступила в редколлегию 29.12.11

**О.П. ІВАНІЦЬКАЯ**, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХП»

## **ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРАВЛІЧНИХ МОДУЛІВ З ГОРИЗОНТАЛЬНИМ ОДНОШТОКОВИМ ГІДРАВЛІЧНИМ ЦИЛІНДРОМ**

Уся різноманітність гідравлічних дросельних приводів з горизонтальним гідравлічним циліндром може бути зведена до 16 гідравлічних модулів залежно від напрямку руху поршня, напрямку дії навантаження, наявності або відсутності дроселя (або регулятора витрати) і розташування його в напірній або зливній магістралях. Наведені математичні моделі 16 основних типів гідравлічних модулів з горизонтальним гідравлічним циліндром.

Все разнообразие гидравлических дросельных приводов с горизонтальным гидравлическим цилиндром можно свести к 16 гидравлическим модулям в зависимости от направления движения поршня, направления действия нагрузки, наличия или отсутствия дросселя (или регулятора расхода) и расположения его в напорной или сливной магистралях. Приведены математические модели 16 основных типов гидравлических модулей с горизонтальным гидравлическим цилиндром.

All variety of hydraulic throttle drives with the horizontal hydraulic cylinder can be reduced to 16 hydraulic modules depending on a direction of movement of the piston, a direction of action of loading, presence or absence of a throttle (or a regulator of the charge) and its arrangements in pressure head or drain highways. Mathematical models 16 of the basic types of hydraulic modules with the horizontal hydraulic cylinder are resulted.

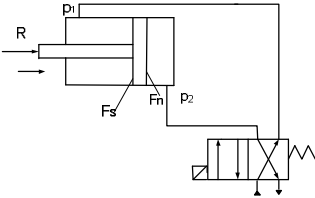
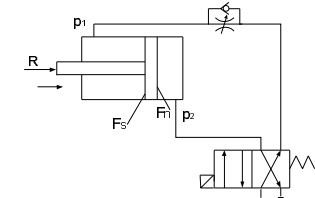
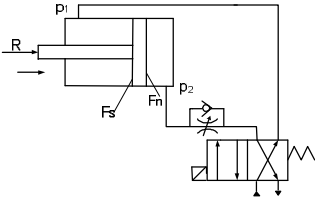
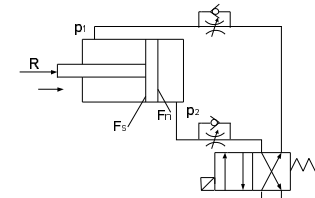
**Вступ.** Гідравлічні приводи застосовуються для автоматизації процесів в усіх галузях життєдіяльності людини. Тому питання математичного моделювання їх робочих процесів є актуальним.

**Мета статті.** Метою даної статті є розробка математичних моделей для робочого процесу гідравлічних модулів з горизонтальним одноштоковим гідравлічним циліндром (ГЦ).

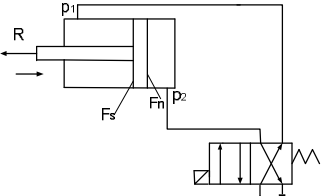
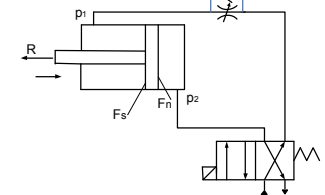
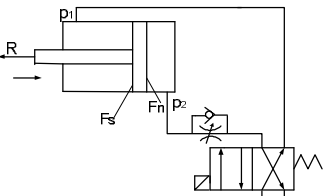
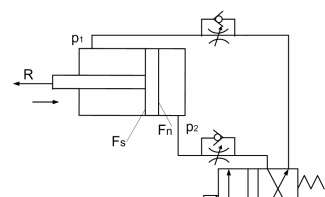
**Поняття гідравлічного модуля.** Будемо вважати, що будь-яку гідравлічну схему можна представити у вигляді гідравлічного блоку (модуля), який складається з: ГЦ; гідравлічного розподільника (у загальному випадку двопозиційного чотирьох лінійного); дроселя зі зворотним клапаном; напірної магістралі, з'єднаної з насосом; зливальної магістралі, з'єднаної з баком (дивись модуль № 1 – 16 таблицю) [1, 2].

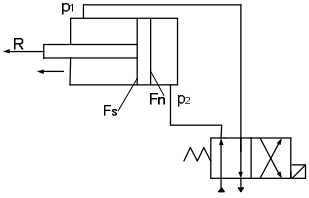
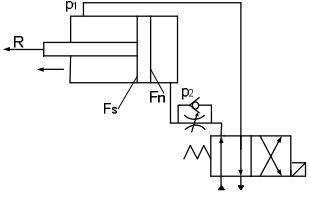
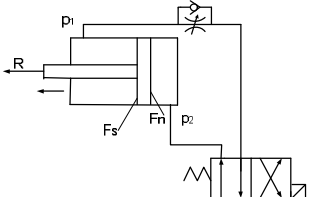
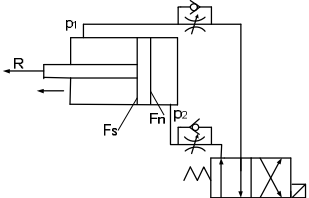
Використовуючи поняття гідравлічного модуля, усі наявні гідравлічні схеми з горизонтальним одноштоковим ГЦ можливо звести до 16 гідравлічних модулів. Перші чотири модулі здійснюють втягування штока ГЦ. При цьому розподільник перебуває в правій робочій позиції (дивись таблицю). Напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока. Гідравлічні модулі з п'ятого по восьмий (дивись таблицю) здійснюють висування штока ГЦ. Розподільник при цьому перебуває в лівій робочій позиції. Напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ.

## Математичні моделі гідравлічних модулів з горизонтальним ГЦ

№	Гідравлічна схема модуля	Математична модель модуля
1	2	3
1		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_h + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_h \right) \frac{E}{W_{02} - F_h y}. \end{aligned} \right.$
2		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_h + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_h \right) \frac{E}{W_{02} - F_h y}. \end{aligned} \right.$
3		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_h + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_h \right) \frac{E}{W_{02} - F_h y}. \end{aligned} \right.$
4		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_h + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu f_{d1} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu f_{d2} \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_h \right) \frac{E}{W_{02} - F_h y}. \end{aligned} \right.$

1	2	3
5		$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt);$ $\frac{dp_1}{dt} = (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y};$ $\frac{dp_2}{dt} = \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}.$
6		$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt);$ $\frac{dp_1}{dt} = (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y};$ $\frac{dp_2}{dt} = \left( \mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}.$
7		$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt);$ $\frac{dp_1}{dt} = (-\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y};$ $\frac{dp_2}{dt} = \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}.$
8		$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt);$ $\frac{dp_1}{dt} = (-\mu f_{d1} \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y};$ $\frac{dp_2}{dt} = \left( \mu f_{d2} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}.$

1	2	3
9		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$
10		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$
11		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$
12		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu f_{d1} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_n - p_1)} - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu f_{d2} \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$

1	2	3
13		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$
14		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu f d \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$
15		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu f d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$
16		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu f d_1 \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu f d_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$



Гідравлічні модулі з дев'ятого по дванадцятий здійснюють втягування штока ГЦ. При цьому розподільник перебуває в правій робочій позиції (дивись таблицю). Напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ.

Гідравлічні модулі із тринадцятого по шістнадцятий (дивись таблицю) здійснюють висування штока ГЦ. Розподільник при цьому перебуває в лівій робочій позиції. Напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ.

Розглянуті гідравлічні модулі із вертикальним одноштоковим ГЦ (шток орієнтований униз) мають наступні особливості схеми (дивись таблицю):

- модуль №1: шток втягується, дроселі відсутні, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока;
- модуль №2: шток втягується, дросель установлений у напірній магістралі, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №3: шток втягується, дросель установлений у зливній магістралі, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №4: шток втягується, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №5: шток висувається, дроселі відсутні, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №6: шток висувається, дросель установлений у напірній магістралі, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №7: шток висувається, дросель установлений у зливній магістралі, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №8: шток висувається, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, напрямок навантаження співпадає з втягуванням штока ГЦ;
- модуль №9: шток втягується, дроселі відсутні, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №10: шток втягується, дросель установлений у напірній магістралі, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №11: шток втягується, дросель установлений у зливній магістралі, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №12: шток втягується, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №13: шток висувається, дроселі відсутні, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №14: шток висувається, дросель установлений у напірній магістралі, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №15: шток висувається, дросель установлений у зливній магістралі, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ;
- модуль №16: шток висувається, дроселі встановлені в напірній і злив-

ній магістралях, напрямок навантаження співпадає з висуванням штока ГЦ.

**Математичні моделі гідравлічних модулів з горизонтальним одноштоковим гідравлічним циліндром.** При побудові математичних моделей будемо використовувати наступні припущення [4]:

- відсутні витоки робочої рідини (РР);
- сухе тертя дорівнює нулю;
- хвильові процеси в трубопроводах відсутні;
- температура РР постійна (тобто постійними вважаємо коефіцієнти кінематичної в'язкості й сили тертя);
- втрати на тертя в магістралях і в гідравлічній апаратурі не враховуються;
- тиск у зливній магістралі дорівнює нулю;
- радіальний зазор між втулкою й золотником у золотникових розподільниках приймаємо рівним нулю;
- робочі кромки вважаємо гострими;
- приймаємо постійним  $E$  – модуль пружності РР.

1. *Рівняння нерозривності.* Рівняння нерозривності виражає закон збереження маси рідини, що рухається. Для двох поперечних перерізів того самого потоку ідеальної рідини рівняння нерозривності можна записати у вигляді:

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{або} \quad V_1 S_1 = V_2 S_2, \quad (1)$$

де  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  – витрати, швидкості РР й площі поперечних перерізів 1-1 і 2-2.

Так, наприклад, для гідравлічної системи із дросельним способом регулювання швидкості (модуль 3, таблиця) при правій робочій позиції розподільника рівняння нерозривності має вигляд:

$$Q_n = Q_{p1} = Q_{ц1}; \quad Q_{ц2} = Q_{оп} = Q_{p2} = Q_{\sigma}, \quad (2)$$

де  $Q_n$  – витрата насоса;  $Q_{p1}$ ,  $Q_{p2}$  – витрата через розподільник;  $Q_{ц1}$  – витрата штокової порожнини ГЦ;  $Q_{ц2}$  – витрата поршневої порожнини ГЦ;  $Q_{оп}$  – витрата через дросель;  $Q_{\sigma}$  – витрата, що надходить із ГЦ через розподільник у бак.

2. *Рівняння динаміки* виконавчого органа гідравлічного приводу, що описує рух поршня ГЦ як твердого тіла, відповідно до законів механіки, а саме на основі *принципу Даламбера* (згідно з яким сила інерції дорівнює різниці активних сил і сил опору), запишемо на прикладі модуля 3 (таблиця) у вигляді:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = p_1 F_s - p_2 F_n + R - R_t, \quad (3)$$

де  $m$  – приведена до поршня маса рухливих частин і РР;  $p_1, p_2$  – тиск у порожнинах гідроциліндра;  $F_n, F_s$  – ефективні площі поршня поршневої і штокової порожнин ГЦ;  $R$  – навантаження;  $R_t$  – сили тертя;  $y$  – переміщення поршня.

3. Рівняння витрат РР через апаратуру. Для ГЦ, з урахуванням стисливості РР, рівняння витрати, наприклад, для модуля 3 (таблиця) має вигляд:

$$Q_{ц1} = F_s V + \frac{(W_{01} + F_s y)}{E} \frac{dp_1}{dt}; \quad Q_{ц2} = F_n V - \frac{(W_{02} - F_n y)}{E} \frac{dp_2}{dt}, \quad (4)$$

де  $V$  – швидкість поршня;  $W_{01}, W_{02}$  – початковий об'єм РР у відповідних порожнинах ГЦ.

Для гідравлічної апаратури, у якій відбувається дроселювання РР (дроселі, розподільники), рівняння витрати має вигляд:

$$Q_{др} = \mu f_d \sqrt{2\Delta p / \rho}, \quad Q_p = \mu \pi d_z x_z \sqrt{2\Delta p / \rho}, \quad (5)$$

де  $Q_{др}, Q_p$  – витрата через дросель та розподільник;  $\mu$  – коефіцієнт витрати;  $f_d$  – площа прохідного перетину дроселя;  $\Delta p$  – перепад тиску на щілині гідроапаратури;  $\rho$  – густина РР;  $d_z$  – діаметр золотника розподільника;  $x_z$  – величина відкриття вікна розподільника.

У таблиці наведені математичні моделі гідравлічних модулів з горизонтальним одноштоковим ГЦ, які складені на підставі розглянутих вище рівнянь нерозривності, руху рухливих елементів і рівнянь витрати через гідравлічну апаратуру.

**Висновки.** Усе різноманіття гідравлічних дросельних приводів з горизонтальним одноштоковим ГЦ можна звести до 16 типових гідравлічних модулів залежно від напрямку руху поршня і штока ГЦ, напрямку дії навантаження, наявності дроселя (або регулятора витрати) і розташування його в напірній або зливній магістралях.

Для опису робочого процесу гідравлічних приводів використовуються основні види рівнянь: нерозривності; руху рухливих елементів; витрат рідини через апаратуру.

Наведені математичні моделі 16 основних гідравлічних модулів з горизонтальним одноштоковим ГЦ.

**Список літератури:** 1. *Іваницька Е.П.* К вопросу о типизации гидравлических приводов // Восточно-европейский журнал передовых технологий, 2009. – № 4 / 10 (40). – С. 37 – 40. 2. *Іваницька Е.П.* Математические модели гидравлических модулей с вертикальным гидравлическим цилиндром // Восточно-европейский журнал передовых технологий, 2009. – №5 / 6 (41). – С. 38 – 41. 3. *Лур'є З.Я., Іваницька О.П.* Моделювання та динаміка гідравлічних систем: Навчальний посібник. – Харків: ХДПУ, 2000. – 132 с. 4. *Іваницька О.П.* Про моделювання гідравлічних модулів з вертикальним гідравлічним циліндром // Вісник НТУ «ХП», 2011. – Вип.13. С. 89 – 96.

Надійшла до редколегії 09.01.2012

**С.І. КУЛИК**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

## **МІШАНА ВЕЙВЛЕТ-АПРОКСИМАЦІЯ ХААРА ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ**

Запропоновано метод побудови операторів мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій трьох змінних. Доведені їх властивості, а також теорема про оцінку похибки наближення неперервних функцій цими операторами.

Предложен метод построения операторов смешанной вейвлет-аппроксимации Хаара функций трех переменных. Доказаны их свойства, а также теорема об оценке погрешности приближения непрерывных функций этими операторами.

The article suggests a method of creating Haar's blending wavelet-approximation operators of functions of three variables. Proved their properties, as well as the theorem on error estimation of the approximation of continuous functions by these operators.

**Вступ.** Теорія *вейвлетів* на даний час є однією з найбільш ефективних теорій наближення функцій однієї та багатьох змінних. Вона знаходить широкі застосування в ряді областей науки і техніки. Вейвлет-аналіз використовується для стиснення й обробки зображень, розпізнавання мовних сигналів, передбачення землетрусів, прогнозування погоди, у медицині (томографія, електрокардіографія), при передбаченні курсу цінних паперів на ринку, гідродинаміці, гідроакустиці та інших галузях [1]-[9], а також в Інтернеті (для зменшення обсягу звукових та відео файлів). Вейвлети мають невичерпні можливості в обробці сигналів і зображень, наприклад для Інтернету [10], що полягає в зменшенні об'єму звукових та відеофайлів. На даний час широко використовуються і стали популярними *стандарти MP4, JPEG 2000*, а також відомі графічні програмні засоби, наприклад *Corel DRAW* тощо, які використовують вейвлет-технологію обробки зображень. Вейвлет-обробка сигналів забезпечує можливість доволі ефективного стиснення сигналів і їх відновлення з малими втратами інформації, а також використовується для задач фільтрації сигналів [11]. Для ряду типів вейвлетів існують швидкі алгоритми *вейвлет-перетворення* [12], [13], що дає можливість значно зменшити витрати часу при їх реалізації.

Проте, слід зазначити, що дослідження теорії вейвлет-апроксимацій функцій багатьох змінних на даний момент можна вважати недостатнім. Зокрема, не розвинуто та не досліджено такий важливий розділ теорії вейвлет-апроксимацій як мішана вейвлет-апроксимація функцій трьох і більше змінних, в той час як дослідження з двовимірної вейвлет-апроксимації продемонстрували її високу ефективність, як з точки зору точності апроксимації так і з точки зору стиснення інформації про двовимірні сигнали (образи). Тому ак-

туальною є розробка та дослідження мішаної вейвлет-апроксимації функцій трьох змінних та побудова і дослідження на їх основі узагальнених вейвлет-апроксимацій функцій трьох змінних.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботах *Кашина Б.С., Саакяна А.А.* [14], *Ronald A. DeVore* [15], *Stephane G. Malat* [16], *Yves Meyer* [17], [18], *Cohen A.* [19], *Wayne M. Lawton* [20], *Ingrid Daubechies* [21], *K. Gröchenig* [22], *Jelena Kovačević та Martin Vetterli* [23], *K. Gröchenig та W. R. Madych* [24] досліджена теорія кратномасштабного аналізу (КМА) та теорія вейвлетів багатьох змінних (дивись також огляд «Fundamental Papers in Wavelet Theory» авторів *Christopher Heil та David F. Walnut* [25]). Відмітимо, що дослідження, присвячені побудові вейвлетів від багатьох змінних цих та інших авторів не використовували оператори мішаної вейвлет-апроксимації (blending function approximation operators). В роботах [26]-[31] авторів даної статті запропоновано і досліджено оператори  $Wf(x, y)$  мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій двох змінних. Нагадаємо вигляд цих операторів:

$$Wf(x, y) = (W_{1,p} + W_{2,q} - W_{1,p}W_{2,q})f(x, y),$$

де

$$W_{1,p}f(x, y) = (C1_{00}f)(y) + \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^{2^i-1} (C1_{i,l}f)(y)\psi_{i,l}(x),$$

$$W_{2,q}f(x, y) = (C2_{00}f)(x) + \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^{2^j-1} (C2_{j,m}f)(x)\psi_{j,m}(y),$$

$$(C1_{00}f)(y) = \int_0^1 f(x, y) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y) = \int_0^1 f(x, y)\psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$(C2_{00}f)(x) = \int_0^1 f(x, y) dy, \quad (C2_{j,m}f)(x) = \int_0^1 f(x, y)\psi_{j,m}(y) dy, \quad j, m \in \mathbb{Z}.$$

Введемо позначення:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{де } \psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t < 0 \vee t \geq 1. \end{cases}$$

Крім того, у вказаних роботах авторів запропоновані і досліджені оператори узагальненої двовимірної вейвлет-апроксимації Хаара функцій двох змінних (УДВА)

$$\widetilde{W}_{p,q,N}f(x,y) = (\widetilde{W}_{1,p,N} + \widetilde{W}_{2,q,N} - W_{1,p}W_{2,q})f(x,y),$$

$$\widetilde{W}_{1,p,N}f(x,y) = W_{1,p}W_{2,N}f(x,y),$$

$$\widetilde{W}_{2,q,N}f(x,y) = W_{1,N}W_{2,q}f(x,y),$$

де оператори  $W_{1,p}f(x,y)$ ,  $W_{1,N}f(x,y)$  – діють на функцію  $f(x,y)$ , як на функцію від змінної  $x$  (змінна  $y$  вважається параметром); оператори  $W_{2,q}f(x,y)$ ,  $W_{2,N}f(x,y)$  діють на функцію  $f(x,y)$ , як на функцію від змінної  $y$  (змінна  $x$  вважається параметром). Основними з найважливіших властивостей цих операторів є наступні:

$$1) \int_0^1 W_{p,q}f(x,y)dx = \int_0^1 f(x,y)dx = (C1_{00}f)(y), \int_0^1 W_{p,q}f(x,y)dy = \int_0^1 f(x,y)dy = (C2_{00}f)(x),$$

$$\int_0^1 W_{p,q}f(x,y)\psi_{i,l}(x)dx = \int_0^1 f(x,y)\psi_{i,l}(x)dx = (C1_{i,l}f)(y), \quad i = \overline{0,p}, \quad l = \overline{0,2^i-1},$$

$$\int_0^1 W_{p,q}f(x,y)\psi_{j,m}(y)dy = \int_0^1 f(x,y)\psi_{j,m}(y)dy = (C2_{i,m}f)(x), \quad j = \overline{0,q}, \quad m = \overline{0,2^j-1}.$$

$$2) f(x,y) - W_{p,q}f(x,y) = (I - W_{p,q})f(x,y) = R_{1,p}R_{2,q}f(x,y),$$

$$R_{1,p} = (I - W_{1,p})f(x,y), \quad R_{2,q} = (I - W_{2,q})f(x,y), \quad \text{де } I - \text{тотожний оператор.}$$

$$3) f(x,y) - \widetilde{W}_{p,q,N}f(x,y) = O\left(\left|(f - W_{p,q}f)(x,y)\right|\right), \quad \left|(f - W_{p,q}f)(x,y)\right| \rightarrow 0.$$

$$\exists N \in \mathbb{N}: f(x,y) - \widetilde{W}_{p,q,N}f(x,y) = O\left(\left|(f - W_{p,q}f)(x,y)\right|\right).$$

Таким чином, оператори мішаної вейвлет-апроксимації, які використовують оператори вейвлет-апроксимації Хаара, що діють на функцію  $f(x,y)$  як на функцію однієї змінної ( $x$  або  $y$  відповідно), мають точність  $O(\varepsilon^2)$  при  $p = q$ , якщо  $R_{1,p}f = O(\varepsilon)$ ,  $R_{2,p}f = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При цьому класична двовимірна вейвлет-апроксимація Хаара  $W_{1,p}W_{2,p}f(x,y)$  має таку ж саму за порядком точність при  $p = N$ , як і  $R_{p,q,N}f(x,y)$  при значно більшій кількості коефіцієнтів двовимірної вейвлет-апроксимації.

**Постановка задачі.** Задача полягає у побудові операторів мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій трьох змінних та дослідження їх апроксимативних властивостей.

**Основні результати роботи.** Введемо позначення:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{де } \psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t < 0 \vee t \geq 1. \end{cases}$$

Для кожної інтегрованої на  $R^3$  функції  $f(x, y, z)$  введемо оператори:

$$W_{1,p}f(x, y, z) = (C1_{00}f)(y, z) + \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^{2^i-1} (C1_{i,l}f)(y, z) \psi_{i,l}(x),$$

$$W_{2,q}f(x, y, z) = (C2_{00}f)(x, z) + \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^{2^j-1} (C2_{j,m}f)(x, z) \psi_{j,m}(y),$$

$$W_{3,r}f(x, y, z) = (C3_{00}f)(x, y) + \sum_{k=0}^r \sum_{n=0}^{2^k-1} (C3_{k,n}f)(x, y) \psi_{k,n}(z),$$

$$(C1_{00}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$(C1_{00}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$(C1_{00}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$W_{p,q,r}f(x, y, z) = (W_{1,p} + W_{2,q} + W_{3,r} - W_{1,p}W_{2,q} - W_{1,p}W_{3,r} - W_{2,q}W_{3,r} + W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}) \times f(x, y, z).$$

**Лема 1.** Оператори  $W_{1,p}f(x, y, z)$  мають наступні властивості:

$$\int_0^1 W_{1,p}f(x, y, z) dx = \int_0^1 f(x, y, z) dx = (C1_{00}f)(y, z), \quad \forall y, z \in [0, 1], \quad (1)$$

$$\int_0^1 W_{1,p}f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx = (C1_{i,l}f)(y, z),$$

$$i = \overline{0, p}, \quad l = \overline{0, 2^i - 1}. \quad (2)$$

Доведення цієї леми впливає з відомих властивостей вейвлет-сум Хаара [1] від однієї змінної, оскільки в даному випадку при інтегуванні за змінною  $x$  змінні  $y$  та  $z$  вважаються параметрами.

**Зауваження.** Аналогічні властивості мають оператори

$$\int_0^1 W_{2,q} f(x, y, z) dy \text{ та } \int_0^1 W_{3,r} f(x, y, z) dz :$$

$$\int_0^1 W_{2,q} f(x, y, z) dy = \int_0^1 f(x, y, z) dy = (C2_{00} f)(x, z), \quad \forall x, z \in [0, 1], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{2,q} f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy = \\ &= (C2_{j,m} f)(x, z), \quad j = \overline{0, q}, \quad m = \overline{0, 2^j - 1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int_0^1 W_{3,r} f(x, y, z) dz = \int_0^1 f(x, y, z) dz = (C3_{00} f)(x, y), \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{3,r} f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz = \\ &= (C3_{k,n} f)(x, y), \quad k = \overline{0, r}, \quad n = \overline{0, 2^k - 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Теорема 1.** Оператор  $W_{p,q,r} f(x, y, z)$  має такі властивості:

$$1) \int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) dx = \int_0^1 f(x, y, z) dx = (C1_{00} f)(y, z) \quad (7)$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) dy = \int_0^1 f(x, y, z) dy = (C2_{00} f)(x, z) \quad (8)$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) dz = \int_0^1 f(x, y, z) dz = (C3_{00} f)(x, y) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx = \\ &= (C1_{i,l} f)(y, z), \quad i = \overline{0, p}, \quad l = \overline{0, 2^i - 1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy = \\ &= (C2_{j,m} f)(x, z), \quad j = \overline{0, q}, \quad m = \overline{0, 2^j - 1}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz =$$



$$= (C3_{k,n}f)(x,y), \quad k = \overline{0,r}, \quad n = \overline{0,2^k-1}. \quad (12)$$

*Доведення.* З означення операторів  $W_{p,q,r}f$ , а також з тверджень леми витікає, що:

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{p,q,r}f(x,y,z)dx &= \int_0^1 W_{1,p}f(x,y,z)dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)dx + \int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}f(x,y,z)dx - \int_0^1 W_{1,p}W_{3,r}f(x,y,z)dx - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)dx + \\ &\quad + \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)dx = \int_0^1 f(x,y,z)dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)dx + \int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)dx - \int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)dx - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)dx + \\ &\quad + \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)dx = \int_0^1 f(x,y,z)dx = (C1_{00}f)(y,z), \quad \forall y,z \in [0,1]. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{p,q,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx &= \int_0^1 W_{1,p}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx + \\ &\quad + \int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx - \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx - \int_0^1 W_{1,p}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx + \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx = \\ &= \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx + \int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx - \int_0^1 W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx + \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx = \\ &= \int_0^1 f(x,y,z)\psi_{i,l}(x)dx = (C1_{i,l}f)(y,z), \quad \forall y,z \in [0,1]. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Для похибки наближення функції  $f(x,y,z) \in C(D)$ ,

$D = [0, 1]^3$  операторами  $W_{p,q,r}f(x, y, z)$  виконується співвідношення

$$f(x, y, z) - W_{p,q,r}f(x, y, z) = (I - W_{p,q,r})f(x, y, z) = R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f(x, y, z),$$

де  $I$  – тотожній оператор,  $R_{1,p}f = f - W_{1,p}f(x, y, z)$ ,

$$R_{2,q}f = f - W_{2,q}f(x, y, z), \quad R_{3,r}f = f - W_{3,r}f(x, y, z).$$

*Доведення.* Запишемо систему операторних рівностей:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - W_{p,q,r}f(x, y, z) &= (I - W_{p,q,r})f(x, y, z) = (I - W_{1,p} + W_{2,q} + W_{3,r} - \\ &- W_{1,p}W_{2,q} - W_{1,p}W_{3,r} - W_{2,q}W_{3,r} + W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r})f(x, y, z) = (I - W_{1,p})(I - W_{2,q}) \times \\ &(I - W_{3,r}) = R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f(x, y, z). \end{aligned}$$

**Наслідок.** Отже, якщо  $R_{1,p}f = O(\varepsilon)$ ,  $R_{2,q}f = O(\varepsilon)$ ,  $R_{3,r}f = O(\varepsilon)$ , то

$$R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f = O(\varepsilon^3).$$

Для порівняння зауважимо, що оператори класичної тривимірної вейвлет-апроксимації Хаара  $W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)$  наближують функцію  $f(x, y, z)$  з похибкою, яка має оцінку  $R_{classic} = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані зі створенням операторів узагальненої тривимірної вейвлет-апроксимації, дослідженням їх апроксимативних властивостей, створенням швидких алгоритмів їх реалізації та дослідженням можливостей щодо їх впровадження у різноманітні галузі застосувань вейвлетів, які вимагають обробки багатовимірних залежностей.

**Висновки.** Таким чином, оператори класичної тривимірної вейвлет-апроксимації Хаара  $W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)$  наближують функцію  $f(x, y, z)$  з похибкою, яка має оцінку  $R_{classic} = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В той час як оператори тривимірної мішаної вейвлет-апроксимації  $W_{p,q,r}f(x, y, z)$  наближують функцію трьох змінних з похибкою, яка має оцінку  $R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f = O(\varepsilon^3)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Це дуже значна перевага запропонованих операторів над класичними схемами і може бути використана у багатьох застосуваннях теорії вейвлетів.

**Список літератури:** 1. Петухов А. П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 132 с. 2. Столиць Э., Дероуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. – Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с. 3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – Москва: Триумф, 2003. – 320 с. 4. Яковлев А. Основы вейвлет-преобразования сигналов. Серия «Конспекты лекций по радиотехническим дисциплинам», выпуск 10. – Москва: Физматлит, 2003. – 176 с. 5. Гудим

В. В. Використання вейвлет-перетворень та нейронних мереж для обробки та покращання розпізнавання мовних сигналів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.12.13. Нац. ун-т "Львів. політехніка". – Л., 2003. – 20 с.: рис., табл. – укр. **6.** *Sweldens W.* The lifting scheme: a construction of second generation wavelets // *SIAM J. Math. Anal.* – 1996. – Vol. 3(2). – P. 186 – 200. **7.** *Стаховський І. П.* Вейвлетний аналіз часових сейсмічних рядів // *ДАН.* – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 393 – 396. **8.** *DeVore R., Jawerth W., Lucier B.* Image compression through wavelet transform coding // *IEEE Trans. on Information Theory.* – 1992. – Vol. 39(2). – P. 719 – 746. **9.** *Захаров В. Г.* Розробка і застосування методів вейвлет-аналізу до нелінійних гідродинамічних систем. Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.05. – Пермь, 1997. **10.** *Дьяконов В. П.* Настольная книга пользователя Internet. – М.: Изд-во "СОЛЮН-Пресс", 2000. – 640 с. **11.** *Воробьев В. И., Грибунин В. Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – Санкт-Петербург: Изд-во Воен. ун-та связи, 1999. – 204 с. **12.** *Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V.* Fast wavelet transforms and numerical algorithms // *Comm. on Pure and Appl. Math.* – 1991. – Vol. 44. – P. 141 – 183. **13.** *Задирака В. К., Абдикаликов К. А.* Быстрые ортогональные преобразования: теория и приложения. – Алматы: Научно издательский центр «Фылым», 2003. – 220 с. **14.** *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с. **15.** *Ronald A. DeVore, Björn Jawerth, Vasil Popov.* Compression of wavelet decompositions // *Amer. J. Math.* – 1992. – Vol. 114. – P. 737 – 785. **16.** *Stephane G. Mallat.* A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* – 1989. – Vol. 11. – P. 674 – 693. **17.** *Y. Meyer.* Ondelettes, fonctions splines et analyses graduees [Wavelets, Spline functions, and multiresolution analysis]. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino.* – 1987. – Vol. 45. – P. 1-42. Translated by John Horvath. **18.** *Y. Meyer.* Wavelets with compact support // *Zygmund Lectures.* U. Chicago. – 1987. **19.** *Cohen A.* Ondelettes, analysis multiresolutions et filtres miroirs en quadrature // *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire.* – 1990. – Vol. 7. – P. 439 – 459. **20.** *Lawton Wayne M.* Tight frames of compactly supported affine wavelets // *J. Math. Phys.* – 1990. – Vol. 31. – P. 1898 – 1901. **21.** *Ingrid Daubechies.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1988. – Vol. 41. – P. 909 – 996. **22.** *Karlheinz Gröchenig.* Analyse multi-échelle et bases d'ondelettes [Multiscale analyses and wavelet bases]. // *C.R. Acad. Sci. Paris Série I.* – 1987. – Vol. 305. – P. 13 – 17. Translated by Robert D. Ryan. **23.** *Jelena Kovačević and Martin Vetterli.* Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for  $R^n$ . // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1992. – Vol. 38. – P. 533 – 555. **24.** *K. Gröchenig and W. R. Madych.* Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of  $R^n$  // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1992. – Vol. 38. – P. 556 – 568. **25.** *Fundamental Papers in Wavelet Theory / Edited by Christopher Heil and David F. Walnut.* Princeton University Press. 2006. – 878 p. **26.** *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. **27.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Узагальнені оператори Хаара, побудовані на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара // *Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів.* – Київ: Видання Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем, 2004. – С. 297 – 300. **28.** *Литвин О., Кулик С. І.* Bivariate Wavelet Sums, Constructed on the Basis of Haar Blending Approximation and Experimental Data // *Управляющие системы и машины.* – 2008. – №3. – С. 53 – 59. **29.** *Литвин О. Н., Кулик С. И.* Некоторые аспекты быстрого вычисления смешанных сумм Хаара // *Компьютерная математика.* – 2008. – №2. – С. 83 – 95. **30.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Використання мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами у стискуванні інформації // *Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів.* – Київ: Видання Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем, 2006. – С. 155 – 158. **31.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // *Проблеми машинобудування.* – 2008. – Т.11, №2. – С. 56 – 65.

Надійшла до редакції 15.12.2011

**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;  
**Л.С. ЛОБАНОВА**, канд. фіз.-мат. наук, доц., УПА, Харків;  
**І.В. НЕФЬОДОВА**, ст. викл., УПА, Харків

**ПРО АНАЛІТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СТРУКТУРИ  
 НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ В МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ  
 ЕЛЕМЕНТІВ (ПРЯМОКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ)  
 З ВИБОРОМ КООРДИНАТ ВУЗЛІВ ЕЛЕМЕНТІВ.**

Запропоновано загальний метод побудови структури наближеного розв'язку крайової задачі в області  $\Omega$ , згідно з яким проводиться вибір координат вузлів сітки, який зберігає глобальну неперервність наближеного розв'язку в області  $\Omega$  або неперервність наближеного розв'язку і його частинних похідних до порядку  $n-1$  включно. Метод істотно використовує інтерполяцію функцій, інтерлінацію функцій двох змінних на системі взаємно перпендикулярних прямих (ліній ректангуляції) та метод побудови базисних сплайнів 2-го порядку.

Предложен общий метод построения структуры приближенного решения краевой задачи в области  $\Omega$ , согласно которому проводится выбор координат узлов сетки, который сохраняет глобальную непрерывность приближенного решения в области  $\Omega$  или непрерывность приближенного решения и его частных производных до  $n-1$  порядка включительно. Метод существенно использует интерполяцию функций, интерлинацию функций двух переменных на системе взаимно перпендикулярных прямых (линиях ректангуляции) и метод построения базисных сплайнов 2-го порядка.

The paper offers a general method of constructing the structure of the approximate solution of boundary value problem in the field  $\Omega$ . According to this method the choice of grid nodes, which keeps the global continuity of the approximate solution in the field  $\Omega$ , or the continuity of the approximate solution and its partial derivatives up to order  $n-1$  inclusive. The method essentially uses interpolation of functions, interlination of functions of two variables in the system of mutually perpendicular lines (lines of rektangulation) and the method of constructing basis splines of order 2.

**Вступ.** На даний час метод скінченних елементів є одним з найбільш широко використовуваних методів дослідження теплових, електромагнітних та фізико-механічних полів. Як відмічалось на міжнародній конференції «Современные проблемы концентрации напряжений», яка проходила в Донецькому національному університеті в 1998 році під керівництвом академіка О.С. Космодам'янського, сучасні системи дослідження напруженого стану корпусів літаків, автомобілів тощо, вимагають розв'язання багатьох десятків тисяч рівнянь. Це пов'язано з тим, що при формуванні систем методу скінченних елементів (МСЕ) не враховуються відомі з теорії пружності факти про можливу наявність на поверхні напружено-деформованого тіла точок, в яких виникає концентрація напруження. Тобто прогин поверхні в околі вказаних точок може мати особливості. На вказаній вище конференції, зокрема, було зроблено висновок про необхідність розробки методів оптимального вибору вузлів в МСЕ.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботах [1 – 3] запропоновано метод побудови оптимальних схем методу скінчених елементів, у яких знаходяться не тільки вузлові параметри, а також і базисні функції та координати вузлів елементів з умови мінімуму функціоналу енергії, відповідного розв’язуваній крайовій задачі. Однією з нерозв’язаних проблем цього методу на даний час залишається проблема оптимального розбиття області інтегрування на елементи. На практиці при оптимальному виборі вузлів елементів (прямокутні елементи) виникає необхідність розбиття окремо взятого елемента з найбільшим значенням функціонала на чотири додаткових елемента. В результаті отримуємо нерегулярне розбиття області на елементи, яке не вивчалось в цитованих вище працях.

В працях Іво Бабушки і його учнів [4], [5] був розроблений метод згущення сітки МСЕ в околі точок, які є концентраторами напружень. Цей метод добре себе зарекомендував, але проблема ефективного вибору вузлів в околі особливих точок залишається недослідженою у випадку, коли схема МСЕ використовує лише прямокутні елементи. Це твердження пов’язано з тим, що у цитованих вище працях Іво Бабушки та його співробітників пропонується переходити до полярної системи координат з центром в особливій точці.

В даній роботі пропонується загальний метод побудови структури наближеного розв’язку крайової задачі в області  $\Omega$  на базі використання прямокутних елементів в МСЕ, який зберігає глобальну неперервність розв’язку в області. Метод істотно використовує інтерлінацію функцій двох змінних на *лініях ректангуляції* (системі взаємно перпендикулярних прямих) [8].

**Постановка задачі.** Припустимо, що область  $\Omega$  поділена лініями  $x = x_k$ , ( $k = \overline{1, m}$ ),  $y = y_l$ , ( $l = \overline{1, n}$ ) на прямокутні елементи

$$\Pi_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}], \quad (k = \overline{1, m-1}, l = \overline{1, n-1})$$

і в кожному з цих елементів наближений розв’язок  $\tilde{u}(x, y)$  крайової задачі

$$Lu(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$\text{де } Lu(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( p_1(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( p_2(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) + q(x, y)u(x, y),$$

$$p_1, p_2 \in C^1(\Omega), \quad q \in C(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega)$$

подається у вигляді:

$$\tilde{u}(x, y) = u_{k,l}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{k,l} \subset \Omega,$$

$$u_{k,l}(x, y) = C_{k,l} h_{k,l}^0(s) h_{k,l}^0(t) + C_{k+1,l} h_{k+1,l}^1(s) h_{k+1,l}^0(t) + C_{k,l+1} h_{k,l+1}^0(s) h_{k,l+1}^1(t) + C_{k+1,l+1} h_{k+1,l+1}^1(s) h_{k+1,l+1}^1(t) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^1 \sum_{\nu=0}^1 C_{k+\mu,l+\nu} h1_{k+\mu,l+\nu}^{\mu}(s) h2_{k+\mu,l+\nu}^{\nu}(t) = w_{k,l}(s, t), \quad (1)$$

де  $s = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$ ,  $t = \frac{y - y_l}{y_{l+1} - y_l}$ , функції  $h1_{k,l}^{\mu}(s)$ ,  $h2_{k,l}^{\nu}(t) \in C^2[0,1]$  і мають

властивості

$$h1_{k,l}^0(0) = h2_{k,l}^0(0) = 1, \quad h1_{k,l}^0(1) = h2_{k,l}^0(1) = 0, \quad h1_{k,l}^1(0) = h2_{k,l}^1(0) = 0, \\ h1_{k,l}^0(1) = h2_{k,l}^0(1) = 1, \quad \forall (x_k, y_l) \in \bar{\Omega}.$$

Введемо позначення:

$$\tilde{J}_{k,l} = \iint_{0,0}^{1,1} \left[ p1_{k,l}(s, t) \left( \frac{\partial w_{k,l}(s, t)}{\partial s} \right)^2 \Delta 1_k^{-2} + p2_{k,l}(s, t) \left( \frac{\partial w_{k,l}(s, t)}{\partial t} \right)^2 \Delta 2_k^{-2} + \right. \\ \left. + q_{k,l}(s, t) w_{k,l}^2(s, t) - 2f_{k,l}(s, t) w_{k,l}(s, t) \right] \Delta 1_k \Delta 2_l ds dt, \quad (2)$$

$$\Delta 1_k = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta 2_l = y_{l+1} - y_l, \quad p1_{k,l}(s, t) = p1(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l), \\ p2_{k,l}(s, t) = p2(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l), \quad q_{k,l}(s, t) = q(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l), \\ f_{k,l}(s, t) = f(s\Delta 1_k + x_k, t\Delta 2_l + y_l).$$

Значення наближеного розв'язку  $u_{k,l}$  у всіх внутрішніх вузлах сітки знаходяться шляхом мінімізації функціоналу

$$J(\tilde{u}) = \sum_{\Pi_{k,l} \subset \Omega} \tilde{J}_{k,l} \rightarrow \min_{C_{k,l}}.$$

### Основні положення пропонованого методу оптимізації сітки вузлів.

Алгоритм методу, який пропонується, полягає в наступному.

1. Розбиваємо область  $\Omega$  на елементи  $\Pi_{p,q} \subset \Omega$  прямими  $x = x_p$ ,  $y = y_q$ . У даній роботі вважаємо, що  $\Omega$  є об'єднанням таких прямокутних елементів.
2. При фіксованому розбитті області інтегрування на елементи  $\Pi_{k,l}$ , при відомих базисних функціях і вузлових параметрах, обчислюємо всі значення  $J_{k,l}$  і знаходимо серед них максимальне.
3. Припустимо, що значення  $J_{p,q}$  в елементі  $\Pi_{p,q} \subset \Omega$  є максимальним, тобто задовольняє наступним нерівностям

$$J_{p,q} - J_{k,l} > \varepsilon, \quad k \neq p, \quad l \neq q, \quad \varepsilon - \text{задане додатне число.}$$

Якщо ця нерівність не виконується, тобто  $\max_{(k,l) \neq (p,q)} (J_{p,q} - J_{k,l}) \leq \varepsilon$ ,  $k \neq p$ ,

$l \neq q$ , процес розбиття на елементи припиняємо, тобто крок 4 не виконуємо.

4. Вважаємо елемент  $\Pi_{p,q}$  базовим і для оптимізації сітки розіб'ємо його прямими

$$x = x_{p+0,5} = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}, \quad y = y_{q+0,5} = \frac{y_q + y_{q+1}}{2}.$$

на чотири елементи

$$\begin{aligned} \Pi_{p,q}^{(1)} &= [x_p, x_{p+0,5}] \times [y_q, y_{q+0,5}]; & \Pi_{p,q}^{(2)} &= [x_p, x_{p+0,5}] \times [y_{q+0,5}, y_{q+1}]; \\ \Pi_{p,q}^{(3)} &= [x_{p+0,5}, x_{p+1}] \times [y_q, y_{q+0,5}]; & \Pi_{p,q}^{(4)} &= [x_{p+0,5}, x_{p+1}] \times [y_{q+0,5}, y_{q+1}]. \end{aligned}$$

В результаті отримуємо нове розбиття області інтегрування на прямокутні елементи. Наближений розв'язок, який відповідає отриманому розбиттю, має новий вигляд в елементах  $\Pi_{p,q}^{(1)}$ ,  $\Pi_{p,q}^{(2)}$ ,  $\Pi_{p,q}^{(3)}$ ,  $\Pi_{p,q}^{(4)}$ , а також у наступних чотирьох елементах:  $\Pi_{p,q-1}$ ,  $\Pi_{p-1,q}$ ,  $\Pi_{p,q+1}$ ,  $\Pi_{p+1,q}$ , якщо ці елементи належать області інтегрування. У всіх інших елементах розбиття форма наближеного розв'язку не змінюється.

В елементі  $\Pi_{p,q}^{(1)}$ , наближений розв'язок запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p,q}^{(1)}(x, y) &= C_{p,q} h3_{p,q}^0(s1) h4_{p,q}^0(t1) + C_{p+0,5,q} h3_{p+0,5,q}^1(s1) h4_{p+0,5,q}^0(t1) + \\ &+ C_{p,q+0,5} h3_{p,q+0,5}^0(s1) h4_{p,q+0,5}^1(t1) + \\ &+ C_{p+0,5,q+0,5} h3_{p+0,5,q+0,5}^1(s1) h4_{p+0,5,q+0,5}^1(t1), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $s1 = \frac{x - x_p}{x_{p+0,5} - x_p}$ ,  $s2 = \frac{x - x_{p+0,5}}{x_{p+1} - x_{p+0,5}}$ ,  $t1 = \frac{y - y_q}{y_{q+0,5} - y_q}$ ,  $t2 = \frac{y - y_{q+0,5}}{y_{q+1} - y_{q+0,5}}$ , фун-

кції  $h3_{p,q}^u(s1)$ ,  $h4_{p,q}^v(t1)$ ,  $h3_{p,q}^u(s2)$ ,  $h4_{p,q}^v(t2) \in C^2[0,1]$  і мають властивості:

$$\begin{aligned} h3_{p,q}^0(0) = h4_{p,q}^0(0) = 1, \quad h3_{p,q}^0(1) = h4_{p,q}^0(1) = 0, \quad h3_{p,q}^1(0) = h4_{p,q}^1(0) = 0, \\ h3_{p,q}^1(1) = h4_{p,q}^1(1) = 1, \quad \forall (x_p, y_q) \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Аналогічні формули визначають наближений розв'язок в елементах  $\Pi_{p,q}^{(2)}$ ,  $\Pi_{p,q}^{(3)}$ ,  $\Pi_{p,q}^{(4)}$ .

Для написання структури наближеного розв'язку в елементах  $\Pi_{p,q-1}$ ,  $\Pi_{p-1,q}$ ,  $\Pi_{p,q+1}$ ,  $\Pi_{p+1,q}$  будемо використовувати інтерлінацію функцій на чотирьох сторонах вказаних прямокутників [6].

В елементі  $\Pi_{p-1,q}$  структура наближеного розв'язку має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p-1,q}(x, y) &= U(x_{p-1}, y) h1_{p-1,q}^0(s) + U(x_p, y) h1_{p-1,q}^1(s) + U(x, y_q) h2_{p-1,q}^0(t) + \\ &+ U(x, y_{q+1}) h2_{p-1,q+1}^1(t) - C_{p-1,q} h1_{p-1,q}^0(s) h2_{p-1,q}^0(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_{p-1,q+1}h1_{p-1,q+1}^0(s)h2_{p-1,q+1}^1(t) - C_{p,q}h1_{p,q}^1(s)h2_{p,q}^0(t) - \\
& -C_{p,q+1}h1_{p,q+1}^1(s)h2_{p,q+1}^1(t), \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\text{де } x_{p-1} \leq x \leq x_p, \quad y_q \leq y \leq y_{q+1}, \quad s = \frac{x - x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}, \quad t = \frac{y - y_q}{y_{q+1} - y_q},$$

$$U(x_{p-1}, y) = C_{p-1,q}h2_{p-1,q}^0(t) + C_{p-1,q+1}h2_{p-1,q+1}^1(t),$$

$$U(x, y_q) = C_{p-1,q}h1_{p-1,q}^0(s) + C_{p,q}h1_{p,q}^1(s),$$

$$U(x, y_{q+1}) = C_{p-1,q+1}h1_{p-1,q+1}^0(s) + C_{p,q+1}h1_{p,q+1}^1(s),$$

$$U(x_p, y) = \begin{cases} C_{p,q}h4_{p,q}^0(t1) + C_{p,q+0.5}h4_{p,q+0.5}^1(t1), & y_q \leq y \leq y_{q+0.5}; \\ C_{p,q+0.5}h4_{p,q+0.5}^0(t2) + C_{p,q+1}h4_{p,q+1}^1(t2), & y_{q+0.5} \leq y \leq y_{q+1}; \end{cases}$$

$$t1 = \frac{y - y_q}{y_{q+0.5} - y_q}, \quad t2 = \frac{y - y_{q+0.5}}{y_{q+1} - y_{q+0.5}},$$

Аналогічні структури наближених розв'язків будуть також у елементів  $\Pi_{p,q-1}$ ,  $\Pi_{p,q+1}$ ,  $\Pi_{p+1,q}$  нового розбиття.

5. Знаходимо серед всіх елементів нового розбиття  $\Theta$  такий елемент  $\Pi_{p',q'}$  в якому виконуються умови  $J_{p',q'} - J_{k,l} > \varepsilon$ ,  $\forall (k,l) \in \Theta$ ,  $k \neq p'$ ,  $l \neq q'$ ,  $\varepsilon$  – задане додатне число, та переходимо до пункту 2.

Зауважимо, що послідовність максимальних значень  $J_{p,q}$  буде не зростаючою і крім того такий елемент  $\Pi_{k,l}$  може бути не єдиний.

**Теорема 1.** Якщо у вказаних восьми елементах розбиття структуру наближеного розв'язку  $\tilde{u}(x, y)$  записати згідно з викладеним алгоритмом, а у всіх інших елементах розбиття її залишити незмінною, то незалежно від вибору невідомих параметрів  $C_{i,j}$ ,  $(i = \overline{1, m-1}, j = \overline{1, n-1})$ ,  $C_{p,q+0.5}$ ,  $C_{p+0.5,q+0.5}$ ,  $C_{p+0.5,q}$ ,  $C_{p+0.5,q+1}$ ,  $C_{p+1,q+0.5}$  та невідомих базисних функцій  $h1_{p,q}^\mu$ ,  $h2_{p,q}^\nu$ ,  $h3_{p,q}^\mu$ ,  $h4_{p,q}^\nu \in C^1[0,1]$  з відповідними індексами  $0 \leq \mu, \nu \leq 1$ , наближений розв'язок буде зберігати неперервність, тобто  $\tilde{u}(x, y) \in C(\Omega)$  і  $\tilde{u}(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ .

*Доведення.* Враховуючи структуру наближеного розв'язку в кожному



елементі розбиття, а також те, що всі базисні функції є неперервно диференційовними, можна стверджувати, що у кожному елементі розбиття наближений розв'язок буде функцією двох змінних, яка є неперервною і має неперервні частинні похідні першого порядку. Крім того, на сторонах, спільних для двох сусідніх прямокутників розбиття наближений розв'язок зберігає неперервність при довільному виборі вузлових параметрів. Тому  $\tilde{u}(x, y) \in C(\Omega)$ .

Твердження про те, що  $\tilde{u}(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ , випливає з того, що

$$J(\tilde{u}) = \sum_{\Pi_{k,l} \subset \Omega} \tilde{J}_{k,l} \text{ і } \tilde{J}_{k,l} < \infty \forall \Pi_{k,l} \subset D.$$

Теорема доведена.

**Результати чисельного експерименту.** Застосуємо запропонований метод до розв'язання наступної крайової задачі:

$$\Delta u = -2, (x, y) \in G, \quad (5)$$

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial G, \quad (6)$$

для області  $G$ , що має форму рівнобокого кута, тобто

$$G = \{([0, a] \times [0, b]) \cup ([a, b] \times [0, a])\}, \quad a = 0.5, b = 1.$$

Розіб'ємо область  $G$  на прямокутні елементи прямими

$$x = x_k = k \cdot \Delta, \quad k = \overline{0, m}, \quad y = y_l = l \cdot \Delta, \quad l = \overline{0, n}.$$

В кожному з елементів  $\Pi_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$  наближений розв'язок представляється у вигляді:

$$\tilde{u}(x, y) = u_{k,l}(x, y) = \sum_{i=k}^{k+1} \sum_{j=l}^{l+1} C_{i,j} h_i(x) h_j(y),$$

$$\text{де } h_k(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1} \\ \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x_{k-1} < x \leq x_k \\ x_k - x_{k-1}, & x_k < x < x_{k+1} \\ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x_k < x < x_{k+1} \\ 0, & x \geq x_{k+1} \end{cases}, \quad h_l(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{l-1} \\ \frac{y - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}}, & y_{l-1} < y \leq y_l \\ y_l - y_{l-1}, & y_l < y < y_{l+1} \\ \frac{y - y_{l+1}}{y_l - y_{l+1}}, & y_l < y < y_{l+1} \\ 0, & y \geq y_{l+1} \end{cases}$$

Невідомі сталі  $C_{k,l}$  знаходимо з умови

$$J(\tilde{u}) = \sum_{\Pi_{k,l} \subset G} \tilde{J}_{k,l} \rightarrow \min_{C_{k,l}},$$

$$\text{де } \tilde{J}_{k,l} = \iint_{\Pi_{k,l}} \left( \left( \frac{\partial u_{k,l}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_{k,l}}{\partial y} \right)^2 - 4u_{k,l} \right) dx dy .$$

Шляхом мінімізації цього функціоналу знайдені невідомі  $C_{k,l}$  (табл. 1) при  $m = 4$ ;  $n = 4$ .

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів  $C_{k,l}$

4	0	0	0		
3	0	0,055719	0		
2	0	0,070755	0	0	0
1	0	0,064564	0,070755	0,055719	0
0	0	0	0	0	0
$l$ / $k$	0	1	2	3	4

При цьому отримані значення  $\tilde{J}_{k,l}$ , які представлені в таблиці 2.

Таблиця 2

Значення функціоналів  $\tilde{J}_{k,l}$

3	-0,001413	-0,001413		
2	-0,003812	-0,003812		
1	-0,003864	-0,009809	-0,003812	-0,001413
0	-0,001256	-0,003864	-0,003812	-0,001413
$l$ / $k$	0	1	2	3

Порівнюючи значення  $\tilde{J}_{k,l}$  бачимо, що найбільше по модулю з них буде  $\tilde{J}_{1,1} = -0,009809$ .

Згідно з описаним вище алгоритмом, розбиваємо елемент  $\Pi_{1,1} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  на чотири елементи:

$$\begin{aligned} \Pi_{1,1}^{(1)} &= [x_1, x_{1+0.5}] \times [y_1, y_{1+0.5}], & \Pi_{1,1}^{(2)} &= [x_1, x_{1+0.5}] \times [y_{1+0.5}, y_2], \\ \Pi_{1,1}^{(3)} &= [x_{1+0.5}, x_2] \times [y_{1+0.5}, y_2], & \Pi_{1,1}^{(4)} &= [x_{1+0.5}, x_2] \times [y_1, y_{1+0.5}]. \end{aligned}$$

Далі знаходимо мінімум функціоналу

$$J(\tilde{u}^{(1)}) = \sum_{\substack{\Pi_{k,l} \subset G \\ \Pi_{k,l} \neq \Pi_{1,1}}} \tilde{J}_{k,l} + \tilde{J}_{1,1}^{(1)} + \tilde{J}_{1,1}^{(2)} + \tilde{J}_{1,1}^{(3)} + \tilde{J}_{1,1}^{(4)} \rightarrow \min_{C_{k,l}},$$

враховуючи, що в кожному з елементів розбиття наближений розв'язок залишається в такій же формі як і був, за виключенням восьми елементів  $\Pi_{1,1}^{(1)}$ ,  $\Pi_{1,1}^{(2)}$ ,  $\Pi_{1,1}^{(3)}$ ,  $\Pi_{1,1}^{(4)}$  та  $\Pi_{0,1}$ ,  $\Pi_{1,0}$ ,  $\Pi_{1,2}$ ,  $\Pi_{2,1}$ , в яких наближений розв'язок будеться з використанням формул (3)-(4). Значення наближеного розв'язку у вузлах нової сітки наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення функції  $U(x, y)$  у вузлах

5	0	0	0	0		
4	0	0,057835			0	
3	0	0,068314	0,059991	0	0	0
2	0	0,071984	0,070198	0,059998		0
1	0	0,067119	0,071984	0,068228	0,057830	0
0	0	0	0	0	0	0
$l$ / $k$	0	1	2	3	4	5

Для порівняння наведемо результати розв'язання задачі (5)-(6) класичним методом скінченних елементів теж з використанням прямокутних елементів та лінійних базисних функцій.

Зазначимо, що при п'яти внутрішніх вузлах (10 елементів) запропонований метод і класичний МСЕ дали майже однакові значення наближеного розв'язку у вузлах сітки.

В табл. 4 наведені значення наближеного розв'язку, отримані класичним методом скінченних елементів з використанням прямокутних елементів з довжиною сторони, рівною 0,125 (48 елементів, 33 внутрішніх вузлів).

Класичний розв'язок з використанням квадратної сітки

8	0	0	0	0	0				
7	0	0,0275	0,0350	0,0275	0				
6	0	0,0394	0,0520	0,0396	0				
5	0	0,0454	0,0615	0,0467	0				
4	0	0,0485	0,0679	0,0586	0	0	0	0	0
3	0	0,0488	0,0709	0,0692	0,0586	0,0467	0,0396	0,0275	0
2	0	0,0442	0,0652	0,0709	0,0679	0,0615	0,0520	0,0350	0
1	0	0,0309	0,0442	0,0488	0,0485	0,0454	0,0394	0,0275	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$L$ $k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

**Перспективи подальших досліджень.** В подальшому автори планують удосконалення запропонованого алгоритму з метою застосування його до знаходження розв'язків крайових задач із заданим класом диференційованості. Планується провести також вибір вузлів з використанням оптимальних базисних функцій, отриманих в роботах О.М. Литвина [8].

**Висновки.** Розроблено та досліджено використання сплайн-інтерлінації функцій двох змінних для побудови адаптивної сітки вузлів МСЕ (прямокутні елементи), що згущується в околі точок, в яких точний розв'язок має особливості, при використанні лише прямокутних елементів.

**Список літератури:** 1. *Литвин О.Н.* Оптимальные схемы МКЭ // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – К.: Наук. думка. – 1978. С. 160-165. 2. *Литвин О.М.* Узагальнена нелінійна інтерполяція і розв'язок граничних задач // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1980. №6. С. 23-29. 3. *Литвин О.Н.* Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т.20, №4. – С. 677-688. 4. *Babuska I.* Finite Element Method for domain with corners // Computing. – 1970. – Vol. 6, N. 3. – P.264-273. 5. *Zienkiewicz O.C., Gago J.P.R., Kelly D.W.* The hierarchic concept in finite element analysis // Comp. Struct. – 1983. – Vol. 16. – P.53-65. 6. *Литвин О.Н., Носов К.В.* Чисельная реализация оптимального метода конечных элементов для бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Современ. проблемы конц. напр.: Тр. междунар. науч. конф. – Донецк: ДонГУ, «Кассиопея», 1998. – С. 151-157. 7. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – Т. 16 – С. 209-292. 8. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Надійшла до редколегії 08.12.2011

**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;  
**О.П. НЕЧУЙВИТЕР**, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА, Харків

## **2D - КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є НА КЛАСІ ЛІПШИЦЯ ТА ОПЕРАТОРИ КУСКОВО-СТАЛОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ**

Побудовані кубатурні формули наближеного обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації на класі Ліпшиця. Інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задана слідами функції на взаємно-перпендикулярних лініях, значеннями функції в точках. Отримані оцінки похибки наближення.

Построены кубатурные формулы приближенного вычисления 2 D - коэффициентов Фурье, которые используют в своем построении операторы кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации функций на классе Липшица. Информация о неосциллирующем множителе подынтегральной функции задана следами функции на взаимно-перпендикулярных линиях, значениями функции в точках. Получены оценки погрешности приближения.

Formulas of the evaluating of 2 D - Fourier's coefficients with using spline-interlineation were submitted. Cubature formulas are investigated in the case when information about function is set of lines set of knots on the class of Lipschitz. The estimations of error of approaching of the cubature formulas are presented.

**Вступ.** Сучасні задачі цифрової обробки сигналів вимагають вміння наближено обчислювати інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Зокрема, задачу наближеного обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій [1] відповідно на різних класах функцій. Важливим кроком в розв'язанні такої задачі є обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є за допомогою операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації (тобто інформація про функцію  $f(x, y)$  задається її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, значеннями функції в точках) на класі Ліпшиця.

**Аналіз останніх досліджень.** В [2]-[4] розглядалась задача наближеного обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію  $f(x, y)$  задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих, але вона розв'язувалась на класі диференційованих функцій. В [5] розглядалась побудова кубатурних формул обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є на класі Ліпшиця за допомогою оператора інтерполянта, побудованого з використанням кусково-сталої інтерлінації у ви-

падку, коли інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції задається значеннями функції в точках. Однак актуальним є питання отримання більш точних оцінок на класі Ліпшиця.

**Постановка задачі.** Обчислити наближено 2D - коефіцієнти Фур'є за допомогою кубатурних формул з використанням інтерлінації функцій на класі дійсних функцій двох змінних, визначених на  $G = [0, 1]^2$  і таких, що задовольняють наступним умовам Ліпшиця:

$$\begin{aligned} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| &\leq L|x_1 - x_2|, \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \\ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)| &\leq \tilde{L}|x_1 - x_2||y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих  $x_k = k\Delta - \Delta/2$ ,  $y_j = j\Delta - \Delta/2$ ,  $k, j = \overline{1, \ell}$ ,  $\Delta = 1/\ell$ . Отримати оцінку похибки побудованих кубатурних формул.

### Обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації.

**Означення.** Під слідом функції  $f(x, y)$  на лінії розуміємо функцію однієї змінної

$$\begin{aligned} f(x_k, y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad f(x, y_j), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell. \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}; \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell}, \\ X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \\ x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell. \end{aligned}$$

Нехай  $Jf(x, y)$  – оператор-інтерлінант

$$\begin{aligned} Jf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \\ - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y), \end{aligned}$$

для якого виконуються властивості [1]:

- $Jf(x_k, y) = f(x_k, y)$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ ,  $Jf(x, y_j) = f(x, y_j)$ ,  $j = \overline{1, \ell}$ ,
- $|f(x, y) - Jf(x, y)| = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = O(\Delta^2)$ ,  $\forall (x, y) \in G$ .

Для обчислення інтегралів  $I_k^2(m, n)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,

$$I_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$I_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$I_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерліманта  $Jf(x, y)$  та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул:

$$\begin{aligned} \Phi_1^2(m, n) &= \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_0^1 f(x_k, y) \sin 2\pi ny dy + \\ &+ \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) \sin 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy - \\ &- \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy, \\ \Phi_2^2(m, n) &= \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi mx dx \int_0^1 f(x_k, y) \cos 2\pi ny dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) \cos 2\pi m x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi n y dy - \\
& - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi m x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi n y dy, \\
\Phi_3^2(m, n) = & \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi m x} dx \int_0^1 f(x_k, y) e^{-i2\pi n y} dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) e^{-i2\pi m x} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi n y} dy - \\
& - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi m x} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi n y} dy.
\end{aligned}$$

**Теорема 1.** Нехай  $f(x, y) \in C_{2,L,L}^2$  та функція задана  $N = 2\ell$  слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих

$$f(x_k, y), \quad k = \overline{1, \ell}, \quad f(x, y_j), \quad j = \overline{1, \ell},$$

в області  $G = [0, 1]^2$ . Тоді кубатурна формула  $\Phi_1^2(m, n)$  для обчислення інтегралу  $I_1^2(m, n)$  має наступну оцінку похибки при  $\ell > 2\pi \max\{m, n\}$ :

$$\left| I_1^2(m, n) - \Phi_1^2(m, n) \right| \leq \frac{\tilde{L}}{16\ell^2} = \frac{\tilde{L}}{4N^2}.$$

**Доведення.** Введемо оператори:

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x), \quad k = \overline{1, \ell}, \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y), \quad j = \overline{1, \ell},$$

тоді для оператора-інтерліанга  $Jf(x, y)$  справедлива тотожність

$$Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f.$$

Для кожної функції  $f(x, y)$  виконується оцінка



$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y)) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy \right| \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy = \\
& = \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy = \\
& = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |f(x, y) - f(x_k, y) - f(x, y_j) + f(x_k, y_j)| dx dy \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \tilde{L} |x - x_k| |y - y_j| dx dy = \\
& = \tilde{L} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy = \\
& = \frac{\tilde{L}}{4} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \left( - (x_k - x)^2 \Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + (x - x_k)^2 \Big|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \left( - (y_j - y)^2 \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + (y - y_j)^2 \Big|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) = \\
& = \frac{\tilde{L}}{4} \frac{\Delta^2}{2} \frac{\Delta^2}{2} \ell^2 = \tilde{L} \frac{\Delta^2}{16} \cdot \frac{1}{\Delta^2} \Delta^2 = \tilde{L} \frac{\Delta^2}{16} = \frac{\tilde{L}}{16 \ell^2} = \frac{\tilde{L}}{4N^2}.
\end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

**Обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерполяції на основі кусково-сталой сплайн-інтерпліації.** Введемо позначення:

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}],$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, & x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell^2}, \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, & y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell^2},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k} \Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j} \Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Нехай  $\tilde{J}f(x, y)$  – оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерлінанта  $Jf(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{J}f(x, y) = & \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_j) h_{0k}(x) \tilde{H}_{0j}(y) + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_k, y_j) \tilde{h}_{0k}(x) H_{0j}(y) - \\ & - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y), \end{aligned}$$

для якого виконуються властивості [1]:

1.  $\tilde{J}f(\tilde{x}_k, y_j) = f(\tilde{x}_k, y_j)$ ,  $\tilde{k} = \overline{1, \ell^2}$ ,  $j = \overline{1, \ell}$ ,  
 $\tilde{J}f(x_k, \tilde{y}_j) = f(x_k, \tilde{y}_j)$ ,  $j = \overline{1, \ell^2}$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ ;
2.  $|f(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = O(\Delta^2)$ ,  $\forall (x, y) \in G$ .

Для обчислення інтегралів  $I_k^2(m, n)$ ,  $k = 1, 2, 3$  пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$\tilde{\Phi}_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$\tilde{\Phi}_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерполянта  $\tilde{J}f(x, y)$  та отримаємо відповідні кубатурні формули, наприклад:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1^2(m, n) = & \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy + \\ & + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_k, y_j) \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy - \\ & - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Хай  $f(x, y) \in C_{2,L,L}^2$  та значення  $f_{kj} = f(x_k, y_j)$ ,  $k = \overline{1, m_1}$ ,  $j = \overline{1, m_2}$ , задані не більше, ніж в  $N = m_1 m_2$ ,  $m_1 = m_2 = \ell^2$ ,  $N = \ell^4$  фіксованих вузлових точках  $(x_k, y_j) \in G$ . Тоді кубатурна формула  $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$  для обчислення інтегралу  $I_1^2(m, n)$  має наступну оцінку похибки при  $\ell > 2\pi \max\{m, n\}$ : причому

$$\left| I_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right| \leq \frac{\tilde{L} + 8L}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{L} + 8L}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

*Доведення.* Розглянемо оператори

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x), \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y),$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x), \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y),$$

тоді для оператора-інтерполянта  $\tilde{J}f(x, y)$ , побудованого на основі  $Jf(x, y)$ , справедлива тотожність  $\tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2) f$ .

Знайдемо оцінку величини  $\left| I_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right|$ :

$$\begin{aligned} \left| I_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right| &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - \tilde{J}f(x, y)) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

За теоремою 1 маємо:  $\left| I_1^2(m, n) - \Phi_1^2(m, n) \right| \leq \frac{\tilde{L}}{16\ell^2} = \frac{\tilde{L}}{4N^2}$ . Отже,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 - J_1 \tilde{J}_2) f + (J_2 - J_2 \tilde{J}_1) f \right| dx dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 - J_1 \tilde{J}_2) f \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_2 - J_2 \tilde{J}_1) f \right| dx dy \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_j) \right| dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} \left| f(x, y_j) - f(\tilde{x}_k, y_j) \right| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq \\
& \leq L \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} |y - \tilde{y}_j| dy + L \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq \\
& \leq L \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 + L \ell \Delta \frac{\Delta_1}{4} \ell^2 = L \ell \frac{1}{\ell} \frac{\Delta_1}{2} = L \frac{1}{2} \Delta^2 = L \frac{\Delta^2}{2} = \frac{L}{2 \ell^2}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
\left| I_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right| & \leq \left| I_1^2(m, n) - \Phi_1^2(m, n) \right| + \left| \Phi_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right| \leq \\
& \leq \frac{\tilde{L} + 8L}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{L} + 8L}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}.
\end{aligned}$$

Теорема 2 доведена.

**Чисельний експеримент.** Нехай задана функція

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (\cos(2x - 2y) + \cos(2x + 2y)).$$

Покажемо, що

$$\begin{aligned}
\varepsilon & = \left| I_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right| \leq \\
& \leq \left| I_1^2(m, n) - \Phi_1^2(m, n) \right| + \left| \Phi_1^2(m, n) - \tilde{\Phi}_1^2(m, n) \right| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Точні значення інтегралів:

$$I_1^2(1, 2) = 0.028997787909237,$$

$$I_1^2(2, 3) = 0.008785471951418,$$

$$I_1^2(3, 4) = 0.004308752165426,$$

$$I_1^2(3, 4) = 0.002566548604326.$$

Таблиця 1.

Обчислення  $I_1^2(m, n)$  за кубатурною формулою  $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$ 

$m$	$n$	$\ell$	$\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$	$\varepsilon$
1	2	10	0.02899675888006	0.000001029029177
		20	0.028997722732186	0.00000065177052
2	3	10	0.00878516815062	0.000000303800798
		20	0.008785452326578	0.0000001962484
		30	0.008785468052442	0.00000003898977
3	4	10	0.004308608143948	0.000000144021479
		20	0.004308742628912	0.00000009536515
		30	0.004308750260989	0.00000001904438
4	5	10	0.002566464399399	0.000000084204928
		20	0.002566542991854	0.00000005612472
		30	0.002566547476052	0.00000001128274
		40	0.002566548245131	0.00000000359196

Таблиця 2.

Похибка обчислення  $I_1^2(m, n)$  за формулами  $\Phi_1^2(m, n)$  та  $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$ 

$m$	$n$	$\ell$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$
1	2	10	0.000000064804145	0.000000964225032	0.000001029029177
		20	0.000000004793151	0.000000060383901	0.000000065177052
2	3	10	0.000000012040883	0.000000291759915	0.000000303800798
		20	0.00000001331797	0.00000018293043	0.0000001962484
		30	0.0000000028432	0.00000003614657	0.00000003898977
3	4	10	0.00000001192014	0.000000142829465	0.000000144021479
		20	0.00000000565952	0.00000008970562	0.00000009536515
		30	0.00000000131706	0.00000001772732	0.00000001904438
4	5	10	0.000000000683359	0.000000084888287	0.000000084204928
		20	0.00000000269926	0.000000005342546	0.000000005612472
		30	0.00000000072364	0.0000000105591	0.00000001128274
		40	0.00000000025053	0.00000000334143	0.00000000359196

Аналіз таблиці 1 та 2 показує справедливості теоретичних тверджень.

**Перспективи подальших досліджень.** Результати даних досліджень будуть використані при побудові кубатурних формул наближеного обчислення 3D - коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на класі Ліпшиця.

**Висновки.** В статті досліджуються кубатурні формули обчислення 2D - коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на класі Ліпшиця. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Отримана оцінка похибки кубатурних формул. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

**Список літератури:** 1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с. 2. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації. Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18-21 трав., 2010р., Харків, Ч.1. – 2010. – С. 211–213. 3. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доповіді НАН України. - 2010. № 3, - С. 24-29. 4. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». - 2010. № 926, - С.153-160. 5. Литвин О. М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 136 с.

*Надійшла до редколегії 15.12.2011*

УДК 519.6

**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;  
**Ю.І. ПЕРШИНА**, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА, Харків

### **ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ, АПРОКСИМАЦІЙНИХ ТА ІНТЕРЛІНАЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРАПЕЦЕВИДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Побудовані розривні апроксимаційні, інтерполяційні та інтерлінаційні сплайни для наближення розривної функції двох змінних з областю визначення, яку можна розбити на прямокутні трапеції. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни. Запропоновані методи наближення можна використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Построены разрывные аппроксимационные, интерполяционные и интерлиначионные сплайны для приближения разрывной функции двух переменных с областью определения, которую можно разбить на прямоугольные трапеции. Построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны. Предложенные методы приближения можно использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Are constructed discontinuous approximation, interpolation and interlination splints for approach of discontinuous function of two variables with definition range which can be divided into rectangular trapezes. Constructed discontinuous splints include, as a special case, classical continuous splints. Offered methods approximations can be used for mathematical modeling of discontinuous processes in medical, geological, space and other researches

**Вступ.** Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту.

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах вітчизняних та зарубіжних дослідників (див., наприклад, [1-4]). Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Дивись, так в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин, підшлункова залоза має свою форму та щільність тканин, хребет має свою щільність тощо); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

**Аналіз останніх досліджень.** На практиці використання кусково-аналітичних наближень, заданих різними формулами (поліномами відповідного степеня) в точках кожного елемента розбиття області наближення приводить інколи до знаходження великої кількості невідомих параметрів. Це привело до появи неконформних елементів в методі скінченних елементів [4]. Аналогічна задача досліджувалась в працях Попова Б.А. [5] та інших авторів, де розглядалися наближення неперервних та неперервно-диференційованих функцій за допомогою розривних сплайнів в *чебишовській нормі* (рівномірне наближення).

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включає множину неперервних сплайнів, що можуть мати розриви першого роду в заданих точках або на заданій множині ліній – межах елементів.

В роботі [6] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [7] – інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [8].

В даній роботі вперше будуються та досліджуються інтерполяційні, апроксимаційні та інтерлінаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на трапецевидні елементи.

**Постановка задачі.** Нехай задана розривна функція двох змінних  $f(x, y)$  в області  $D = [0, 1]^2$ . Будемо вважати, що область  $D$  розбивається

прямими  $x = x_k, y = y_l, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}$ , де  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ ,  $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$  на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається похилою лінією на прямокутну трапецію та прямокутний трикутник. Трапеції та трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція  $f(x, y)$  має розриви першого роду на межах між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою роботи є побудова та дослідження розривного лінійного сплайн-інтерполянта, апроксиманта та інтерлінанта для наближення розривної функції з використанням трапецевидних елементів.

**Побудова оператора розривної інтерполяції.** Розглянемо чотири типи прямокутних трапецій з прямим кутом у вузлі  $(x_i, y_j)$

$$\begin{aligned} \text{TP}_{ij}^{(1)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\}; & \text{TP}_{ij}^{(2)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\}; \\ \text{TP}_{ij}^{(3)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\}; & \text{TP}_{ij}^{(4)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\}. \end{aligned}$$

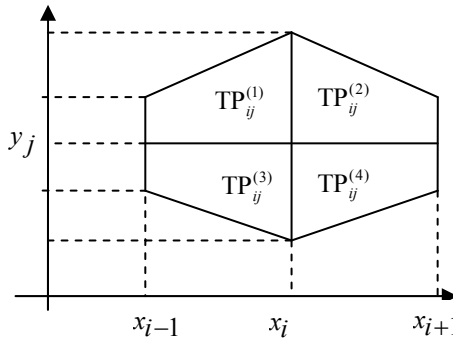


Рисунок 1 – Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі  $(x_i, y_j)$ .

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція  $f(x, y)$  може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває наступних значень

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(2)} &= f(x_i - 0, y_j + 0), \\ C_2^{(1)} &= f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), & C_2^{(2)} &= f(x_{i-1} + 0, y_j + 0), \\ C_3^{(1)} &= f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & C_3^{(2)} &= f(x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), \\ C_4^{(1)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & C_4^{(2)} &= f(x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} &= f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= f(x_i + 0, y_j - 0), \\
C_2^{(3)} &= f(x_{i-1} + 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= f(x_{i+1} - 0, y_j - 0), \\
C_3^{(3)} &= f(x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & C_3^{(4)} &= f(x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), \\
C_4^{(3)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i+1} - 0)), & C_4^{(4)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0).
\end{aligned}$$

**Визначення.** Будемо називати *розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном* в області  $\text{TP}_{ij}^{(k)} \subset D$ ,  $k = \overline{1, 4}$  наступну функцію:

$$\begin{aligned}
S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) = & C_1^{(k)} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)}) \omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(1)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)}) \omega 3_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\
& + C_3^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 4_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)}) \omega 4_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} + C_4^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)}) \omega 2_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})}, \quad (1)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) &= y - y_j, & \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) &= x - x_i, \\
\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y) &= y - g^{(k)}(x), & \omega 4_{ij}^{(k)}(x, y) &= x - x_{i+1},
\end{aligned}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \quad A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} - 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} - 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4, \end{cases}$$

$$A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), & k = 4, \end{cases} \quad A_4^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1}) + 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0), & k = 4. \end{cases}$$

**Теорема 1.** Якщо  $f(x, y)$  має розриви першого роду у деяких точках  $(x_i, y_j)$  та  $f(x, y) \in C^{(r, r)}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $r = 1, 2$ , то залишок наближення функції  $f(x, y)$  сплайном вигляду (1) на кожній трапеції буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
RS(x, y) = & R_1 R_2 f(x, y) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) + \\
& + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} R_2 f(x, g_{j+1}^{(1)}(x)),
\end{aligned}$$

де

$$R_1 f(x, y) = \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(0,r)}(x, \eta) G1(x, y, \eta) d\eta, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$R_2 f(x, y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi, y) G2(x, \xi) d\xi, \quad y \in [y_j, g_{j+1}^{(1)}(x)],$$

$$G1(x, y, \eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq \xi \leq y \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \\ \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq y \leq \xi \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \end{cases}$$

$$G2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq \xi \leq x \leq x_{i+1}, \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq x \leq \xi \leq x_{i+1}. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Оцінка похибки наближення функції  $f(x, y)$  побудованим розривним інтерполяційним сплайном  $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$  на кожній трапеції має вигляд

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq Q;$$

$$Q = \|f(x, y)\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{64} \times$$

$$\times \max \left\{ \left( y_j - y_{j+1}(x_i) \right)^2, \left( y_j - y_{j+1}(x_{i+1}) \right)^2 \right\} +$$

$$+ \max \left\{ \|f^{(0,2)}(x_i, y)\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_i) - y_j)^2}{8}, \right. \quad (2)$$

$$\left. \|f^{(0,2)}(x_{i+1}, y)\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j)^2}{8} \right\} +$$

$$+ \max \left\{ \|f^{(2,0)}(x, y_j)\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8}, \right.$$

$$\left. \|f^{(2,0)}(x, y_{j+1}(x))\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8} \right\}.$$

**Побудова оператора розривної апроксимації.** Якщо значення функції у вузлах трапецевидної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів  $C_p^{(k)}$ ,  $p = \overline{1,3}$ ,  $k = \overline{1,4}$ , в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J^{(k)}(C) = \sum_{\text{TP}_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{\text{TP}_{ij}^{(k)}} [f(x, y) - s_{ij}^{(k)}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C. \quad (3)$$

І тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

**Теорема 3.** Для оператора наближення розривної функції  $f(x, y) \in C^{(2,2)}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$  розривним апроксимаційним сплайном  $S(x, y)$  вигляду (1), побудованого за допомогою методу найменших квадратів, на кожному елементі розбиття  $\text{TP}_{ij}^{(1)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , справедлива наступна оцінка:

$$\|Sp(x, y)\|_{\infty} \leq \max\{|f(x_i, y_j)|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i))|, |f(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))|\} + Q,$$

де  $Q$  визначається формулою (2).

**Наслідок.** Якщо наближувана функція  $f(x, y)$  є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трапецевидному елементі розбиття з точками розриву  $(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном  $S(x, y)$ , визначеним формулами (1) з невідомими  $C_m^{(k)}$ ,  $m = \overline{1, 4}$ ,  $k = \overline{1, 8}$ , що знаходяться з умови (3), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто  $S(x, y) = f(x, y)$ , де  $f(x, y) = A(\text{const})$  або  $f(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy$ .

**Зауваження.** Якщо  $C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = C_1^{(4)} = S(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , або  $C_1^{(5)} = C_1^{(6)} = C_1^{(7)} = C_1^{(8)} = S(x_i, y_j)$  то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

**Побудова оператора розривної інтерлінації.** Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії. Для цього доцільніше використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що інтерлінація є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями.

Розглянемо трапецію типу  $\text{TP}_{ij}^{(1)}$ .

Вважаємо заданими наступні величини.

1. Сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $x = x_i$  (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y) = f(x_i + 0, y), \quad \varphi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y) = f(x_i - 0, y);$$

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi pm_{ij+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0).$$

2. Сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $x = x_{i+1}$  (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} + 0} f(x, y) = f(x_{i+1} + 0, y), \quad \varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} - 0} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y)$$

;

$$\varphi mp_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

3. Сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $y = y_j$  (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0), \quad \psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\psi pp_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi mp_{i+1,j} = \psi m_j(x_{i+1}) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

4. Сліди функції  $f(x, y)$  на прямій  $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$  (під та над прямою відповідно):

$$\psi m_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0), \quad \psi p_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) + 0),$$

$$\psi pm_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0),$$

$$\psi mm_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

**Визначення.** Будемо називати *розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в трапецевидному елементі*  $TP_{ij}^{(1)}$  наступну функцію:

$$Lf(x, y) = (L_1 + L_2 - L_2 L_1) f(x, y), \quad (4)$$

де

$$L_1 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \varphi m_{i+1}(y),$$

$$L_2 f(x, y) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \psi p_j(x).$$

**Теорема 4.** Якщо сліди функції  $f(x, y)$  задовольняють співвідношенням:

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \psi p_j(x_{i+1}) = \varphi m_{i+1}(y_j),$$

$$\varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = \psi m_{j+1}(x_i), \quad \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = \psi m_{j+1}(x_{i+1}),$$

то оператор (5) інтерлінує  $f(x, y)$  на  $\partial \text{TP}_{ij}^{(1)} : Lf(x, y)|_{\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}} = f(x, y)|_{\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}}$ , тобто

$$Lf(x_i, y) = \varphi p_i(x),$$

$$Lf(x_{i+1}, y) = \varphi p_{i+1}(x),$$

$$Lf(x, y_j) = \psi p_j(x),$$

$$Lf(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) = \psi m_{j+1}(x).$$

**Зауваження.** Перестановність операторів відсутня, тобто  $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$ .

**Теорема 5.** Нехай виконуються умови теореми 4, тоді для залишкового члена  $Rf(x, y) = (I - L)f(x, y)$  виконується рівність

$$Rf(x, y) = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 P_{1,k}(x) P_{2,m}(x, y) \int_{x_k}^x \int_{y_m(x)}^y f^{(p,q)}(\xi, \eta) \frac{(x_k - \xi)^{p-1} (y_\ell - \eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!} d\xi d\eta$$

$1 \leq p, q \leq 2$ ,  $y_1(x) = y_j$ ,  $y_2(x) = g_{j+1}^{(1)}(x)$ , а поліноми  $P_{1,k}(x), P_{2,m}(x, y)$  мають вигляд:

$$P_{1,1}(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad P_{1,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$P_{2,1}(x) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}, \quad P_{2,2}(x) = \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}.$$

Оцінимо похибку наближення розривної функції  $f(x, y)$  побудованим розривним інтерлінантом  $Lf(x, y)$ , визначеним формулою (4) в трапецевидному елементі  $\text{TP}_{ij}^{(1)}$ .

**Теорема 6.** Нехай  $f(x, y) \in C^{p,q}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$ ,  $p = \overline{1,2}$ ,  $q = \overline{1,2}$ , тоді для залишкового члена  $Rf(x, y)$  має місце оцінка

$$\|Rf(x, y)\|_{C(\text{TP}_{ij}^{(1)})} \leq M \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} |G_1(x, \xi) \cdot G_2(x, y, \eta)| d\xi d\eta.$$

де

$$M = \max_{(x,y) \in \text{TP}_{ij}^{(1)}} |f^{(p,q)}(x,y)|,$$

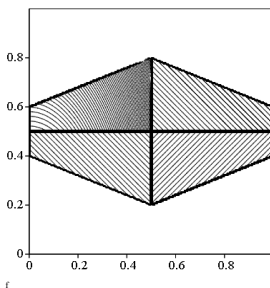
$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{(x_i - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i \leq \xi < x, \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{(x_{i+1} - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x \leq \xi \leq x_{i+1}, \end{cases}$$

$$G_2(x, y, \eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \cdot \frac{(y_j - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j \leq \eta < y, \\ \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \cdot \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y \leq \eta < g_{j+1}^{(1)}(x). \end{cases}$$

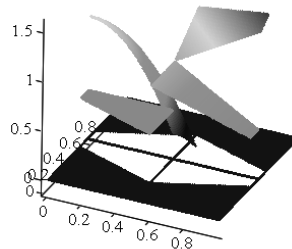
**Зауваження.** Якщо односторонні сліди функції на відповідних лініях, що утворюють границі трапецевидних елементів, збігаються, то розривна функція перетворюється в неперервну.

**Чисельний експеримент. Приклад 1.** Нехай задана функція на одиничному квадраті  $[0,1] \times [0,1]$  (дивись рис. 2)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0.5 < x < 1, 0.5 < y < -0.4x+1, \\ 1.5-4x^2-y^2, & 0 < x < 0.5, 0.5 < y < 0.4x+0.6, \\ 0.5, & 0 < x < 0.5, 0.4-0.4x < y < 0.5 \\ -x+1.5, & 0.5 < x < 1, 0.4x < y < 0.5. \end{cases}$$



а)



б)

Рисунок 2 – Графічне зображення: а) області визначення функції  $f(x,y)$ ; б) функції  $f(x,y)$ .

Тобто на лініях фігури, зображеної на рисунку 2 а), функція  $f(x,y)$  має розриви першого роду. Нехай задані лінії:  $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1,$

$$y_1 = -\frac{2}{5}x + 1, \quad y_2 = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}, \quad y_3 = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}x, \quad y_4 = \frac{2}{5}x.$$

Вони розбивають область визначення функції  $f(x, y)$  на вісім трапецевидних елементів (один з кутів обов'язково є прямокутним).

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції  $TR_{ij}^{(1)}$  задається формулою

$$S(x, y) = f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + f(x_{i+1}, y_j) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$

$$+ f(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i)) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + f(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}.$$

Отримаємо інтерполяційний сплайн, графічний вигляд якого наведений на рис.3.

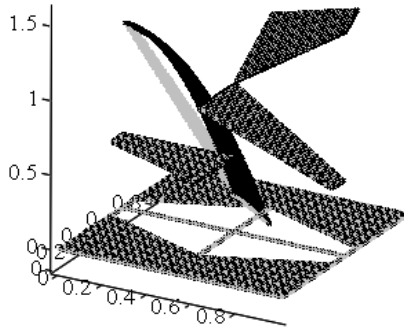


Рисунок 3 – Графічний вигляд розривного інтерполяційного сплайну (світлий колір), та заданої функції (темний колір).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції  $f(x, y)$  від побудованого сплайну  $S(x, y)$ :

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.3.$$

**Приклад 2.** Тепер побудуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції  $TR_{ij}^{(1)}$  задається формулою

$$S(x, y) = C_1^{(1)} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + C_2^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$

$$+ C_3^{(1)} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + C_4^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}.$$

Після знаходження коефіцієнтів цього сплайну з умови (3), отримаємо

сплайн, наведений на рисунку 4.

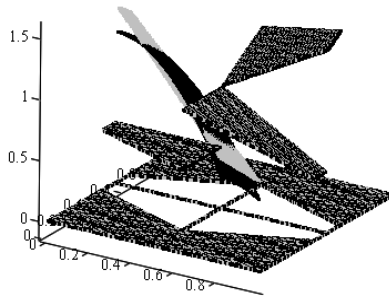


Рисунок 4 – Графічний вигляд розривного апроксимаційного сплайну (світлий колір), та заданої функції (темний колір).

Як на рис.3, так і на рис. 4 бачимо, що задана функція наближується точно там, де вона задана константою або лінійною функцією (графіки функції  $f(x, y)$  та наближуючи сплайнів співпадають).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції  $f(x, y)$  від побудованого сплайну  $S(x, y)$  :

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.08 .$$

**Приклад 3.** Тепер побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн вигляду (4) на заданій сітці (рис.5).

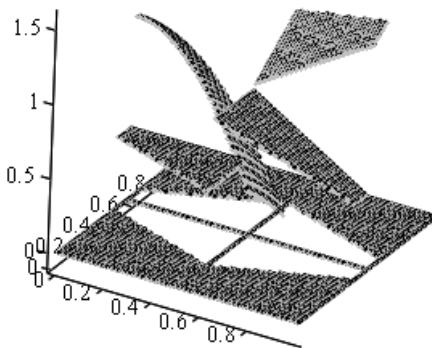


Рисунок 5 – Графічний вигляд розривного інтерлінаційного сплайну (світлий колір), та заданої функції (темний колір).



Максимальне відхилення наближуваної функції  $f(x, y)$  від побудованого сплайну  $S(x, y)$  :

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| = 0.$$

**Порівняння результатів.** Як бачимо, побудований розривний інтерлінаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний та апроксимаційний. Побудовані розривні інтерполяційні та апроксимаційні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

В подальшому авторами планується розробити теорію наближення розривних функцій розривними функціями у випадку, коли невідомі вузли, в яких знаходиться розрив, та застосувати цю теорію до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

**Висновки.** Таким чином, в роботі запропонована математична модель розривного процесу, що описується функцією однієї змінної, побудована за допомогою розривного інтерполяційного сплайну. Визначений загальний вигляд похибки наближення функції побудованою розривною конструкцією в інтегральному вигляді, та наведені оцінки похибки наближення в кожному інтервалі розбиття. В роботі також запропонована математична модель розривного процесу, що побудована за допомогою розривного апроксимаційного сплайну, коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня.

**Список літератури:** 1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.; 2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. Перевод с английского Ю. А. Кузнецова. - Изд-во "Мир", Москва. 1974. - 124с.; 3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1976; 4. Ф.Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Перевод с английского Б.И. Квасова. - Изд-во "Мир", Москва. 1980. - 512с.; 5. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989.– 272с.; 6. О.М. Литвин, Ю.І. Першина. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврійський вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72.; 7. О.Н. Литвин, Ю.І. Першина. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. –С.96 – 105.; 8. О.М. Литвин, Ю.І. Першина. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины.– Киев, 2011, №5. – С.34–47.

Надійшла до редколегії 15.12.11

**В.І. МЕЖУЄВ**, канд. пед. наук, доц., БДПУ, Бердянськ;  
**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;  
**О.О. ЛИТВИН**, канд. фіз.-мат. наук, доц., УІПА, Харків

## МЕТОД РОЗРОБКИ МЕТАМОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ ЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРЕДМЕТНИХ ОБЛАСТЕЙ

Відомий метод  $R$ -функцій В.Л. Рвачова для розв'язання задач аналітичної геометрії використовує множини функцій кількох змінних, що мають властивості, тісно пов'язані з властивостями булевих функцій. В даній роботі для розробки метамodelей пропонується використовувати теж логічні моделі предметних областей. Розглянуто приклад.

Известный метод  $R$ -функций В.Л. Рвачова для решения задач аналитической геометрии использует множества функций нескольких переменных, которые обладают свойствами, тесно связанными со свойствами булевых функций. В данной работе для разработки метамodelей также предлагается использовать логические модели предметных областей. Рассмотрен пример.

The well-known method of  $R$ -functions of V. Rvachov for solving problems of analytic geometry, uses a set of functions of several variables which have properties, closely associated with properties of Boolean functions. In this work it is also suggested to use the logical models of subject domains for metamodels development. An example is considered.

**Вступ.** В інформаційній технології (ІТ) предметно-орієнтованого математичного моделювання *DSMM* (*Domain Specific Mathematical Modelling*) [1; 6] під *метамodelлю* розуміється формальна система, що визначає специфічну для предметної області (ПрО) мову моделювання. У наших попередніх дослідженнях була запропонована узагальнена модель метамodelі, що включає множини типових елементів ПрО, правил граматики та операцій над множинами типових елементів [1]. В ІТ *DSMM* визначаються наступні формальні системи: мета-мета-метамodelь ( $M4$ ), мета-метамodelь ( $M3$ ) та метамodelь ( $M2$ ), що слугують, відповідно, для побудови мета-метамodelей ( $M3$ ), метамodelей ( $M2$ ) та моделей ПрО ( $M1$ ).

У статті пропонується метод розробки метамodelей у рамках алгебраїчних систем, що дозволяє застосувати методи сучасної алгебри для розв'язання виникаючих у ПрО задач. Створення метамodelі здійснюється на основі логічних моделей ПрО, що надаються, зокрема, у рамках логіки висловлювань та логіки предикатів. Такий підхід дозволяє визначити метамodelь як особливого виду логіко-алгебраїчну систему.

Як приклад, у даній роботі на основі векторної алгебри будується метамodelь для логічних моделей ПрО, формалізованих у рамках логіки висловлювань; на засадах алгебри поліномів будується метамodelь для моделей ПрО, визначених за допомогою системи булевих функцій. У першому випадку множина операцій векторної алгебри застосовується для визначення сис-

теми логічного виведення, що дозволяє використати запропонований метод в оптичних комп'ютерах для автоматичного доведення теорем [7]. У другому випадку доводиться, що занурення булевої логіки в алгебру поліномів дозволяє суттєво підвищити ефективність розв'язання задач над ПрО, що ілюструється на прикладі обчислення степеневих функцій. Зазначимо, що запропонований підхід має багато спільного з методом занурення ПрО аналітичної геометрії в множину булевих функцій шляхом виділення у множині функцій двох і більше змінних підмножини  $R$  – функції В.Л. Рвачова (дивись, зокрема [3]), що дозволило створити метод опису рівнянь границь областей складної форми; інший приклад демонструє занурення ПрО в евклідовий простір, що досліджувалося у роботах Ю.Г. Стояна та його учнів (див., зокрема [4]).

**Постановка задачі.** Побудова метамоделі здійснюється на основі аналізу атрибутів, функцій, структури та інших властивостей моделі ПрО. У залежності від виду моделей ПрО, взагалі кажучи, можна виділити два підходи до створення метамоделей:

- алгебраїчний (або безпосередній), що здійснюється на підставі аналізу моделей ПрО, як частини дійсності;
- логічний (або опосередкований), що здійснюється на підставі аналізу моделей знань про ПрО.

У першому випадку входом методу для побудови метамоделі є атрибути, структура, правила, операції та інші елементи моделі ПрО, що надані у формі фізичних величин, випадкових процесів, математичних функцій, фізичних законів та тому подібне. У другому випадку метамоделі будуються на основі моделей знань про ПрО (зокрема, семантичної мережі, продукційної, фреймової, логічної моделі тощо). Зазначимо, що можливим є існування змішаних випадків, коли входом методу для побудови метамоделі є водночас як алгебраїчні так і логічні моделі ПрО.

У даній роботі розглядається метод розробки метамоделей на основі логічних моделей ПрО, що має важливе окреме значення у рамках сучасних ІТ. Сутність підходу полягає у зануренні логічної моделі ПрО у деяку алгебраїчну систему, що розглядається як *мета-метамодель* для побудови метамоделі. Таким чином, логічна модель ПрО розглядається як *мета-метамодель* ( $M4$ ) для побудови мета-метамоделі ( $M3$ ).

Логічна модель ПрО є множиною тверджень про властивості ПрО, що подаються як формули у деякій логіці. Зазвичай, логічна модель ПрО також включає аксіоми та процедури виведення, що дозволяють отримати нові знання про ПрО.

Таким чином, логічну модель ПрО можна визначити як формальну систему:

$$\Lambda = \langle \Lambda_p, \Lambda_F, \Lambda_R, \Lambda_A \rangle \quad (1),$$

де  $\Lambda_p$  – множина символів логічної моделі  $\Lambda$  ПрО (що слугує алфавітом мета-мета-метамоделі  $M4$ );  $\Lambda_F$  – множина операцій над  $\Lambda_p$ ;  $\Lambda_R$  – множина відношень між побудованими за допомогою  $\Lambda_F$  формулами, що визначають правила виведення;  $\Lambda_A$  – множина аксіом (апріорі істинних формул).

Розглянемо мета-метамодель як особливого виду алгебраїчну систему, тобто множину з заданим на ній набором операцій та відношень, що задовольняють деякій системі аксіом. Відповідно до цього, визначимо мета-метамодель як кортеж:

$$\Omega = \langle \Omega_T, \Omega_F, \Omega_R, \Omega_A \rangle, \quad (2)$$

де  $\Omega_T$  є непорожньою множиною, що є носієм алгебраїчної системи (мета-метамоделі  $M3$ );  $\Omega_F$  – множиною заданих на  $\Omega_T$  алгебраїчних операцій;  $\Omega_R$  – множиною заданих на  $\Omega_T$  відношень;  $\Omega_A$  – множиною аксіом.

З формули (2) випливає, що розробка мета-метамоделі на основі логічної моделі ПрО (1) потребує визначення носія алгебраїчної системи  $\Omega_T$ , а також множин заданих на  $\Omega_T$  алгебраїчних операцій та відношень. Особливістю визначення мета-метамоделі (2) є розгляд множини заданих на  $\Omega_T$  відношень  $\Omega_R$  як правил граматики, що визначають способи поєднання екземплярів  $\Omega_T$ .

Значимо, що побудована як алгебраїчна система  $\Omega$ , мета-метамодель  $M3$  має відповідати наступній властивості:

для метамоделей  $M4$  як  $\Lambda$ , та  $M3$  як  $\Omega$  має місце гомоморфізм, що зберігає операції над множинами  $\Lambda_p$  та  $\Omega_T$ .

$$M_{43} : \Lambda_p \rightarrow \Omega_T, \quad M_{43} \subseteq \Lambda_p \times \Omega_T. \quad (3)$$

Тобто операції, визначені на  $\Lambda_p$ , є застосовними для еквівалентних елементів множини  $\Omega_T$ .

Розглянемо практичні способи визначення алгебраїчних мета-мета-моделей для різного роду логічних систем, що відповідають критерію (3).

**Побудова мета моделі для логіки висловлювань (логіки нульового порядку).** Логіка висловлювань є формальною системою, в якій логічні формули, що відповідають висловленням про властивості ПрО, утворюються шляхом поєднання простих висловлювань за допомогою множини логічних операцій. Логіка висловлювань також включає систему правил виведення, в якій певні формули визначаються як теореми даної формальної системи.

Таким чином, визначення логіки висловлювань знаходиться у рамках загального визначення (1), де:

$\Lambda_p$  є скінченною множиною елементарних висловлювань, для позна-

чення яких у логічній моделі ПрО зазвичай використовують малі латинські літери:  $a, b, c, \dots, x, y, z$ ;

$\Lambda_F$  є скінченною множиною логічних операцій,  $\Lambda_F = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ ;

$\Lambda_R$  є скінченною множиною правил виведення, що дозволяють одержувати нові формули з існуючих;

$\Lambda_A$  є скінченною множиною аксіом. В окремому випадку,  $\Lambda_F = \emptyset$ .

Як зазначалося раніше, особливістю визначення метамоделі на основі формули (1) є розгляд  $\Lambda_R$  як правил граматики мови моделювання ПрО.

1. Алфавітом мови є множина  $P$ , що складається з елементарних висловлювань. Всі елементи множини  $P$  є формулами;

2. Якщо  $a_1, a_2, \dots, a_n$  є формулами та  $f \in \Omega_n$ , то  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  теж є формулою. Наприклад, якщо  $a$  і  $b$  є формули, то вирази  $a \vee b$ ,  $a \wedge b$ ,  $\neg a$ ,  $a \rightarrow b$  також є формулами;

3. Інших формул, ніж побудовані за правилами 1 і 2, немає.

Побудова алгебраїчної мета-метамоделі для логіки висловлювань потребує встановлення відношень між носіями алгебраїчної та логічної систем, у даному прикладі, елементами множини елементарних висловлювань  $\Lambda_p$  логіки  $\Lambda$  та елементами множини  $\Omega_T$ , як носія алгебраїчної системи  $\Omega$ . Відповідно до (3), такі відношення повинні бути гомоморфними, що дозволяє використати для елементів множини  $\Lambda_p$  визначені на  $\Omega_T$  алгебраїчні операції.

Розглянемо приклад побудови основаної на векторній алгебрі мета-метамоделі  $V$  для логіки висловлювань  $\Lambda$ . Зазначимо, що вибір алгебраїчної системи для побудови мета-метамоделі визначається властивостями ПрО та задачами, які необхідно розв'язати над ПрО. У даному випадку вибір векторної алгебри зумовлений потребами практики, а саме можливістю застосування наявного технічного обладнання для реалізації логіки висловлювань. Конкретно кажучи, вектори можуть бути реалізовані як промені лазерів оптичного комп'ютера, де операція сумування векторів має фізичну природу інтерференції оптичних хвиль [4, 5].

Визначимо векторну мета-метамодель у булевому просторі  $B^2 = \{0, 1\}$  як

$$V = \langle B^n; +; -; G \rangle \quad (4),$$

де  $B^n$  є *декартова степінь* множини  $\{0, 1\}$ ; «+» - операція сумування векторів, «-» - операція знаходження зворотного вектору;  $G$  - множина правил граматики (заданих як відношення над  $B^n$ ). З рівності (4) випливає, що логічний вектор простору  $B^n$  метамоделі  $V$  задається кортежем довжиною  $n$ ,

який складається з нулів та одиниць:  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ .

Введемо поняття нейтрального елемента для  $V$ :  $\vec{0} = (0_1, \dots, 0_n)$ .

Визначимо наступні операції.

1. Знаходження зворотного елемента (унарний «-»):  $-\vec{a}$

$$-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n), \quad (5)$$

2. Множення логічних векторів (бінарний «\*»):  $\vec{a} * \vec{b}$

$$(a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \wedge b_1, \dots, a_n \wedge b_n), \quad (6)$$

3. Сумування логічних векторів (бінарний «+»):  $\vec{a} + \vec{b}$

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n). \quad (7)$$

Таким чином, особливістю визначення алгебраїчної операцій над логічними векторами є задання відповідних логічних операцій над кожною складовою логічного вектора окремо.

**Твердження.** Використання визначеної як (4) векторної метамоделі дозволяє зменшити кількість операцій для побудови моделі ПрО в  $n$  разів, де  $n$  є -арністю логічного вектора.

Доведення цього твердження впливає з визначення операцій (5),(6),(7) що здійснюються над логічним вектором -арності  $n$  як цілим, порівняно з опрацюванням кожної окремої складової логічного вектора. Іншими словами, якщо розглядати як операнд логічних операцій кожен окрему компоненту логічного вектора, то векторна логіка зводиться до булевої алгебри.

Розглянемо реалізацію логічних операцій на множині операцій з логічними векторами в одновимірному випадку.

Таблиця 1.

Множина операцій з логічними векторами в одновимірному випадку.

Одновимірний випадок реалізації логічних операцій

Булева алгебра					Одновимірний випадок				
$x$	$y$	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$-\vec{a}$	$\vec{a} * \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$
0	0	1	0	0	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)
0	1	1	0	1	(0)	(1)	(1)	(0)	(1)
1	0	0	0	1	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)
1	1	0	1	1	(1)	(1)	(0)	(1)	(1)

Розглянутий одновимірний випадок може бути перенесений на довільний компонент логічного вектора, тобто є застосовним для довільної кількості вимірів.

Таблиця 2.

Множина операцій з логічними векторами у двовимірному випадку.  
Двовимірний випадок реалізації логічних операцій

Двовимірний випадок				
$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\neg\vec{a}$	$\vec{a} * \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$
(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(0, 1)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)
<b>(1, 0)</b>	<b>(0, 1)</b>	<b>(0, 1)</b>	<b>(0, 0)</b>	<b>(1, 1)</b>
(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)
(1, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)

На рис. наведений приклад сумування векторів  $\vec{a} = (1, 0)$  та  $\vec{b} = (0, 1)$  як виконання логічної операції «або» (відповідний рядок у таблиці 2 відформатований напівжирним шрифтом).

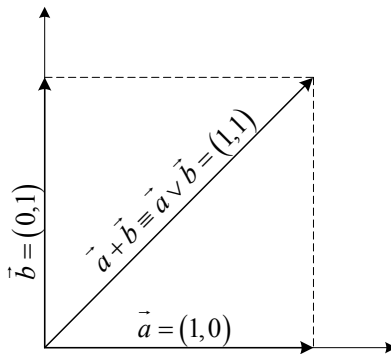


Рисунок – Приклад сумування векторів  $\vec{a} = (1, 0)$  та  $\vec{b} = (0, 1)$ .

Зазначимо, що  $\vec{b} = (0,1) = -(1,0) = -\vec{a}$ . Розглянемо деякі інші властивості логічних векторів:

$$\begin{aligned} --\vec{a} &= --(1,0) = -(0,1) = (1,0) = \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{a} &= (1,0) + (1,0) = (1,0) = \vec{a}, \\ \vec{a} * \vec{a} &= (1,0) * (1,0) = (1,0) = \vec{a}. \end{aligned}$$

**Побудова метамоделей для логіки предикатів (логіки першого порядку).** Логіка предикатів є формальною системою, в якій допускаються висловлення відносно змінних, фіксованих функцій і предикатів. Логіка першого порядку  $\Psi$  є розширенням логіки висловлювань  $\Lambda$ .

Алфавіт мови логіки першого порядку  $\Psi$  будується на основі множин змінних  $\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ , функціональних символів  $F$  і предикатних символів  $P$ . Кожен функціональний і предикатний символ має визначену кількість аргументів (-арність). Для побудови виразів множина логічних операцій  $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow\}$  розширюється кванторами загальності  $\forall$  та існування  $\exists$ , а також службовими символами: дужками і комою.

Множина змінних, символи з  $P$  і  $F$  утворюють *алфавіт* мови логіки першого порядку  $\Psi$ . Граматика мови визначається такими правилами:

- терм - це символ змінної або функція  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , де  $f$  - функціональний символ -арності  $n$ , а  $t_1, t_2, \dots, t_n$  - терми;
- атом -  $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , де  $p$  - предикатний символ -арності  $n$ , а  $t_1, t_2, \dots, t_n$  - терми;
- формула є атомом, або однією з наступних конструкцій:  $F_1 \vee F_2$ ,  $F_1 \wedge F_2$ ,  $\neg F$ ,  $F_1 \rightarrow F_2$   $\forall xF$ ,  $\exists xF$ , де  $F, F_1, F_2$  - формули, а  $x$  - змінна.

**Наведемо метод побудови мета-метамоделі на основі моделі ПрО, наданої у рамках логіки предикатів  $\Psi$ .** У загальному випадку метод включає три етапи.

1. Алфавіт моделі ПрО у рамках логіки предикатів розглядається як базова множина  $\Omega_F$  алгебраїчної мета моделі  $\Omega$ .
2. Кожен  $n$ -арний функціональний символ  $f \in F$  перетворюється в  $n$ -арну функцію  $\Omega_F(f): D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow D$ .
3. Кожному  $n$ -арному предикатному символу  $p \in P$  ставиться у відповідність  $n$ -арне відношення  $\Omega_R(p) \subseteq D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ .

**Особливості визначення алгебраїчних операцій метамоделей.**  $n$ -арна операція  $f$  на  $D$  - це відображення  $f: D^n \rightarrow D$  декартового добутку  $n$  екземплярів множини в саму множину  $D$ . Окремий інтерес має  $\theta$ -арна опера-



ція  $(f : D^0 \rightarrow D)$ , що є виділенням елементу множини  $D$ .

**Особливості визначення алгебраїчних відношень елементів метамоделей.**  $n$ -місним відношенням над  $D$  є підмножина декартового степеня  $D^n$  множини  $D$ . Елементи  $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$  знаходяться у відношенні  $R$ , якщо кортеж  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in D$ . Оскільки відношення на  $D$  є також множинами, то для них можна застосовувати теоретико-множинні операції.

Наприклад, перетином бінарних відношень "більше або дорівнює" і "менше або дорівнює" є відношення "дорівнює", об'єднанням відношень "менше" і "більше" є відношення "не дорівнює", доповненням відношення "ділиться на" є відношення "не ділиться на" тощо.

**Визначення атрибуту як унарного відношення.** При  $n = 1$  відношення  $R \subseteq D$  є унарним відношенням, що будемо називати *атрибутом елементу*  $d$  множини  $D$ . Надалі будемо вважати, що елемент  $d \in D$  має атрибут  $R$ , якщо  $d \in R$  і  $R \subseteq D$ . Бінарне відношення на множині  $D$  встановлюється між двома елементами множини. Елементи  $x, y \in D$  знаходяться у бінарному відношенні  $R : aRb$ , якщо впорядкована пара  $(x, y) \in R$ . Отже,  $R$  є підмножиною декартового квадрата:  $R \subseteq D \times D$ .

Розкриємо дані положення на прикладі моделі ПрО, наданої у рамках логіки першого порядку:

- 0-арні предикати логічної моделі ПрО стають елементами метамоделі. Наприклад, МАШИНА, ВОДІЙ (на рівні побудови моделі приймають конкретні значення: Жигулі, Іванов);
- 1-арні предикати стають атрибутами об'єктів, наприклад СИНЯ (МАШИНА);
- 2 і більше -арні предикати визначають правила граматики, наприклад, ВЛАСНИК (ВОДІЙ, МАШИНА);
- частина предикатів класифікуються як функціональні й визначають синтаксис операцій метамоделі: кількість і тип параметрів, тип результату. Наприклад, РЕМОНТ (ВОДІЙ, МАШИНА).

Даний підхід дозволяє визначити синтаксис метамоделі (алфавіт, граматику й операції).

**Розглянемо метод занурення булевої алгебри від  $n$  змінних у підмножину множини поліномів  $n$  змінних**, які на множині  $B^n$  приймають лише значення 0 або 1.

Як відомо, через основні булеві операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення може бути виражена кожна булева операція. В той же час для вказаних базових булевих операцій справедливі наступні вирази через звичайні поліноми:

$$x \wedge y = xy, \quad x \vee y = x + y - xy, \quad \neg x = 1 - x.$$

Тобто справедлива тотожність на множині  $B^n$  :

$$\forall F: B^n \rightarrow B \quad \exists P: F(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in B^n,$$

де  $P(x_1, \dots, x_n)$  – поліном від  $n$  змінних.

Це твердження дозволяє запропонувати ефективний метод мінімізації булевих функцій. Суть цього методу полягає в наступному.

Введемо позначення:

$$P_k(x_1, \dots, x_n) = P_k F(x_1, \dots, x_n) = F|_{x_k=0} (1-x_k) + F|_{x_k=1} x_k, \quad k=1, \dots, n.$$

1. Будемо поліном у такому вигляді:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{q=1}^n P_q F(x_1, \dots, x_n). \quad (8)$$

2. Використовуємо класичні методи спрощення поліномів, враховуючи також, що серед  $2^n$  доданків у формулі (8) залишаться лише ті доданки, які мають множники  $F=1$ . Всі інші доданки будуть дорівнювати нулю.

Крім того слід врахувати, що у випадку, коли  $F|_{x_k=0} = F|_{x_k=1} = F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  $k=1, \dots, n$ , то  $P_k = F_k$ .

Очевидно, що коли  $F=0$  на всіх наборах, то і  $PF=0$ , а також, коли  $F=1$  на всіх наборах, то і  $PF=1$ . Якщо, наприклад  $n=3$ ,  $F(1,1,1)=1$ , а на всіх інших наборах  $F=0$ , то  $PF = x_1 x_2 x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ .

Аналогічні формули можна написати також і для інших булевих функцій.

**Висновки.** У даній роботі запропонований метод побудови метамоделей ПрО як особливої логіко-алгебраїчної системи. Такий підхід дозволяє збільшити ефективність побудови моделей ПрО, а також запропонувати нові ефективні методи розв'язання задач над ПрО.

**Список літератури:** 1. *Межуєв В.І.* Лінгвістичний підхід до розгляду архітектури інструментів предметно-орієнтованого математичного моделювання // Збірник наукових праць ДонНТУ серії "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка". – 2011. – Вип. 14(188). – С. 301-307. 2. *Рвачев В.Л.* Метод R-функций и некоторые его приложения. К.: Наукова думка, 1985, – 550 с. 3. *Стоян Ю.Г.* Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство.— Харьков, 1982.—33 с. 4. *Стоян Ю.Г.* Интервальные пространства  $I_s^2(R)$ . Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. №6, 1998.- С. 109-116. 5. *Vitaliy Mezhuhev.* Vector logic: theoretical principles and practical implementations // Вісник ЗНУ: Збірник наукових статей. Фізико-математичні та технічні науки. – Запоріжжя: ЗНУ, 2006. – С. 91-97. 6. *Межуєв В.І.* Использование векторной алгебры для построения инструментов предметно-ориентированного моделирования // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. – 2010. - С. 79-84. 7. *Jonathan Westphal.* Optical Vector Logic Theorem-Proving / Jonathan Westphal, H.J. Caulfield, Jim Hardy and Lei Qian // Proceedings of the 2005 Joint Conference on Information Systems, Photonics, Networking and Computing Division. - Salt Lake. - 2005. 8. *Аришинский Л.В.* Многочленные логики с векторной семантикой; ВСИ МВД России.-Иркутск, 2003.- 46 с.: Рус.-Деп. в ВИНТИ 13.02.03, № 281-B2003.

*Надійшла до редколегії 19.12.2011.*

**О. М. НАЗАРЕНКО**, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми;  
**М. В. КАРПУША**, аспірант, СумДУ, Суми

## **МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ**

Розглядається проблема моделювання та прогнозування нестационарних часових рядів. Пропонується використання дискретно-неперервних моделей з фіктивними змінними для визначення варіантів прогнозу та множинної логіт-моделі для визначення оптимального прогнозу.

Рассматривается проблема моделирования и прогнозирования нестационарных временных рядов. Предлагается использование дискретно-непрерывных моделей с фиктивными переменными для определения вариантов прогноза и множественной логит-модели для определения оптимального прогноза.

This paper considers the problem of modeling no stationary time series. It is proposed to use discrete-continuous models with dummy variables for determining the prognosis of options and multiple logit-model to determine the optimal forecast.

**Вступ.** Різноманітні дані в техніці, економіці, соціології, медицині та інших сферах надходять у вигляді часових рядів. Вони є, як правило, нестационарними, оскільки їх основні характеристики змінюються в часі. Більшість методів, що стосуються обробки нестационарних рядів, базуються на способах усунення нестационарної частини так, щоб утворювався ряд, з яким можна поводитися як зі стаціонарним [1, 2].

При практичних дослідженнях нестационарна частина часто розкладається в ряд по базисним функціям, які є розв'язками деякої системи диференціальних рівнянь. Цей метод ефективно працює при моделюванні макроекономічних процесів [3, 4]. Широке розповсюдження отримали методи, які базуються на масштабних властивостях часового ряду та його приростів (циклічний аналіз, фрактальні методи, вейвлет аналіз) [5, 6].

Метою даної роботи є побудова економетричних моделей, що адекватно описують нестационарні ряди і дозволяють будувати високоточні коротко-строківі прогнози для майбутніх значень часового ряду.

Виділимо наступні етапи дослідження. Спочатку проводиться попередня обробка вихідних даних, розбиття часових рядів на класи та віднесення до одного з класів (TS або DS класу [7]). До TS класу належать ряди, які є стаціонарними відносно детермінованого тренду, тому для них прийнято виділяти трендову складову [8]. До DS класу входять ряди з присутнім стохастичним трендом (можливо, разом з детермінованим трендом). Такі ряди зводяться до стаціонарних шляхом  $k$ -кратного диференціювання [9]. Ці два класи нестационарності вимагають різних методів моделювання. Важливою характеристикою для прогнозування рядів TS класу є те, що вплив минулих

відхилень затухає з часом, а в рядах DS класу кожне відхилення впливає з однаковою силою на всі наступні значення часового ряду [2].

Наступним кроком аналізується ефективність методів для кожного з класів. При цьому використані методи повинні враховувати можливу складність таких рядів, яка обумовлена особливістю механізмів, що їх формують. При моделюванні часових рядів ми виходили з того, що в їх динаміці спостерігаються ефекти неперервної та дискретної зміни, причому ні моменти часу, коли відбуваються стрибки в значеннях часового ряду, ні величини цих стрибків невідомі. Тому пропонується використовувати дискретно-неперервну модель, для якої параметри неперервної моделі і дискретні ефекти оцінюються ітераційним шляхом.

Далі вирішується питання вибору прогнозного значення. Зазначимо, що до складу описаної нижче дискретно-неперервної моделі включені фіктивні змінні, які формуються в процесі ітерацій. Тому при прогнозуванні використовується множинна логіт-модель, яка дозволяє будувати найімовірніший варіант прогнозу.

І в кінці оцінюється адекватність модельних прогнозних значень та можливості їх використання при прийнятті рішень.

Апробація запропонованих алгоритмів проведена на фінансових часових рядах, які формуються під впливом великої кількості змінних механізмів та різноманітних зовнішніх факторів.

**Нестационарність часових рядів.** Для вирішення питання про віднесення ряду до TS або DS класу існують процедури, які вирішують поставлену задачу в класі ARMA моделей. В цьому випадку перевірка нульової гіпотези щодо належності досліджуваного часового ряду DS класу може бути зведена до перевірки того, що *авторегресійний поліном* містить хоча б один одиничний корінь [9]. Але кожна з цих процедур не є універсальною і має різні недоліки. Наприклад, отримується досить низька потужність, що веде до частого підтвердження нульової гіпотези, хоча насправді вона не виконується. Іншим недоліком може бути невиконання теоретичних передумов, на яких базується дана процедура. Це може призвести до частого відхилення нульової гіпотези, хоча вона справджується в дійсності [7]. Тому при віднесенні часового ряду до одного з класів використовують одразу декілька процедур.

Найчастіше на практиці використовується *розширений тест Дікі-Фулера* [9], який оцінює методом найменших квадратів наступну модель:

$$\Delta x_t = \alpha + \rho x_{t-1} + \delta t + \sum_{i=1}^p \zeta_i \Delta x_{t-i} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

де  $u_t$  – незалежні, нормально розподілені залишки з нульовим математичним сподіванням;  $N$  – об'єм вибірки.

Нульова гіпотеза про те, що ряд належить DS класу, еквівалентна тому, що  $\rho = 0$ . Альтернативна гіпотеза – ряд належить TS класу та  $\rho < 0$ .

При практичному використанні тесту Дікі-Фуллера важливо правильно специфікувати регресійну модель (1). Для рядів можливі випадки відсутності тренду, вільного члена чи вибору різної довжини лагу  $p$ . Неправильна специфікація тесту може призвести до неадекватних результатів [2].

Для вибору оптимальної величини лагу пропонуються різні підходи [10]. У даній роботі використовується *інформаційний критерій Шварца*:

$$BIC(p) = \log(\hat{\sigma}_u^2) + \frac{(p+1) \cdot \log(N)}{N}, \quad (2)$$

де  $\hat{\sigma}_u^2$  – оцінка дисперсії залишків регресійної моделі (1).

При виборі оптимального  $p$  перевага надається моделям з найменшим значенням  $BIC$  та високим значенням коефіцієнта детермінації  $R^2$ .

Якщо встановлена оптимальна кількість лагів, то існують процедури для остаточної правильної специфікації моделі (1). Найбільш відомі з них описані в [11]. На практиці ефективним є *метод Доладо Дж., Дженкінса Т., Сосвіля – Ріверо С.* [12]. Цей метод ґрунтується на тому, що включення в модель (1) додаткових незначущих складових приводить до завищення розрахованого значення тесту. При зменшенні кількості регресорів в моделі (1) критичне значення збільшується (при заданих рівні значущості та числу ступенів вільності). Вказаний метод враховує ці особливості і полягає в наступному.

1. Проводиться оцінювання регресійної моделі (1). Якщо критичне значення вище отриманого за розширеним тестом Дікі-Фуллера, то ми відкидаємо нульову гіпотезу і відносимо даний ряд до TS класу. Якщо немає підстав відхилити нульову гіпотезу, то однозначно визначити клас ряду не можна, оскільки неправильна специфікація регресійної моделі (1) могла привести до завищення значення тесту.

На наступному кроці перевіряється значущість включеного детермінованого тренду. Для цього оцінюємо регресійну модель (1) при значенні  $\rho = 0$  і перевіряємо значущість оцінки  $\hat{\delta}$  коефіцієнта  $\delta$ . Якщо  $\hat{\delta}$  виявиться значущим, то модель (1) специфікована правильно і не має підстав для відхилення нульової гіпотези (даний ряд належить DS класу). Якщо оцінка  $\hat{\delta}$  незначуща, то переходимо до наступного кроку.

2. Оцінюється регресійна модель (1) при відсутності детермінованого тренду ( $\delta = 0$ ). Якщо нульова гіпотеза відхиляється, то часовий ряд не містить одиничного кореня та лінійного тренду. Якщо нульова гіпотеза не відхиляється, то перевіряємо значущість оцінки нульового члена в моделі (1) при  $\rho = 0$  і  $\delta = 0$ . Далі слідуємо аналогічно кроку 1.

3. У випадку незначущості оцінки вільного члена ( $\alpha = 0$ ) оцінюється модель (1) при відсутності лінійного тренду ( $\alpha = 0$  і  $\delta = 0$ ). У залежності від значущості чи незначущості оцінки параметра  $\rho$  однозначно встановлюємо клас даного ряду.

Передумовами тесту Дікі-Фуллера є неавтокорельованість, гомоскедастичність та нормальний розподіл залишків  $u_t$  регресійної моделі (1). У випадку невиконання однієї з цих умов на практиці використовується *тест Філіпса-Перрона*, який також базується на оцінюванні моделі (1), але стандартні помилки розглядає в *формі Н'юї-Веста* [2]. Отже, на відміну від критерію Дікі-Фуллера, випадкова складова  $u_t$  з нульовим математичним сподіванням може бути автокорельована, гетероскедастична та не обов'язково нормально розподілена. Тим самим, критерій Філіпса-Перрона розглядає більш широкий клас часових рядів.

Значимо, якщо досліджуваний часовий ряд буде належати DS класу, то описана методика імітації та прогнозування буде застосовуватися для диференційованого часового ряду. Для цього розширений тест Дікі-Фуллера використовується для регресійної моделі

$$\Delta^{(n)} x_t = \alpha + \rho \Delta^{(n-1)} x_{t-1} + \delta t + \sum_{i=1}^p \zeta_i \Delta^{(n)} x_{t-1} + u_t, \quad (3)$$

де  $\Delta^{(n)} x_t = \Delta^{(n-1)} x_t - \Delta^{(n-1)} x_{t-1}$  – кінцеві різниці  $n$ -го порядку. Значення  $n$  збільшується до тих пір, доки не буде встановлена стаціонарність відповідного ряду.

**Дискретно-неперервна модель.** Припустимо, що нами отримано деякий стаціонарний часовий ряд. Далі розглянемо метод прогнозування цього ряду. Вважаємо, що в досліджуваних часових рядах спостерігаються неперервні та дискретні процеси. Тоді відповідну неперервно – дискретну регресійну модель для даного ряду можна записати наступним чином:

$$y_t = f(t, \mathbf{a}) + \mathbf{d}'\mathbf{z} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

де  $y_t$  – значення ряду в момент часу  $t$ ;  $f(t, \mathbf{a})$  – неперервна складова;  $\mathbf{d}'\mathbf{z}$  – дискретна складова;  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_l)'$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)'$  – вектори оцінювальних параметрів;  $\mathbf{z} = (z_{t1}, z_{t2}, \dots, z_{tm})'$  – вектор змінних дискретної складової;  $\varepsilon_t$  – випадкове збурення.

В якості неперервної складової будемо використовувати авторегресійні моделі, які залежать від класу нестаціонарного ряду. Якщо ряд належить TS класу, то до авторегресійної моделі включаємо детермінований тренд, якщо DS класу, то використовуємо кінцеві різниці, які є стаціонарними.

Недостатня складність у виборі неперервної складової моделі для якісного опису даного ряду може бути компенсована ітераційним шляхом. В огляді літератури з даної проблеми вказується на використання двозначних фіктивних змінних на кожній ітерації [13]. Але аналіз реальних часових рядів показує, що при такому підході на практиці не виконуються передумови лінійної регресійної моделі (*гомоскедастичність*, відсутність автокореляції та нормальний розподіл залишків). Тому у даній роботі пропонується викорис-

товувати тризначну фіктивну змінну.

Спочатку оцінюється неперервна складова регресійної моделі (4) і обчислюються залишки  $\varepsilon_t^{(1)} = y_t - f(t, \hat{\mathbf{a}})$ . На першому кроці дискретна змінна формується наступним чином:

$$z_{t1} = \begin{cases} +T^{(1)}, & \varepsilon_t^{(1)} > \xi, \\ 0, & -\xi \leq \varepsilon_t^{(1)} \leq \xi, \\ -S^{(1)}, & \varepsilon_t^{(1)} < -\xi. \end{cases} \quad (5)$$

Тут  $\xi$  - точність наближення (у даній роботі значення  $\xi$  вибиралось рівним  $0,01 \cdot (y_t^{\max} - y_t^{\min})$ );  $S^{(1)}$  і  $T^{(1)}$  - кількість точок з даного проміжку, в яких виконуються нерівності  $\varepsilon_t^{(1)} > \xi$  і  $\varepsilon_t^{(1)} < -\xi$  відповідно (тоді середнє значення фіктивної змінної автоматично дорівнює нулю).

Далі оцінюється регресійна модель  $\varepsilon_t^{(1)} = d_1 z_{1t} + \varepsilon_t^{(2)}$ .

Аналогічно на  $k$ -кроці ( $k = 2, 3, \dots, m$ ) обчислюються залишки  $\varepsilon_t^{(k)} = \varepsilon_t^{(k-1)} - \hat{d}_{k-1} z_{(k-1)t}$  і

$$z_{tk} = \begin{cases} +T^{(k)}, & \varepsilon_t^{(k)} > \xi, \\ 0, & -\xi \leq \varepsilon_t^{(k)} \leq \xi, \\ -S^{(k)}, & \varepsilon_t^{(k)} < -\xi. \end{cases} \quad (6)$$

Далі оцінюється регресійна модель  $\varepsilon_t^{(k)} = d_k z_{kt} + \varepsilon_t^{(k+1)}$ .

Практичні дослідження показують, що на 3-4-й ітерації фіктивна змінна приймає значення 0, що означає закінчення процесу ітерацій із заданою точністю.

**Прогнозування.** Описана процедура вказує на те, що за допомогою вектору  $\mathbf{z}$  фіктивних змінних можна досягти необхідну точність апроксимації. Однак таке введення фіктивних змінних призводить до неоднозначності при визначенні прогнозного значення регресанда. Для прогносної точки  $t^*$  регресанд може приймати  $3^m$  значень, оскільки кожна з фіктивних змінних (6) може приймати одне із трьох значень, а кількість ітерацій дорівнює  $m$ . Для вибору оптимального значення фіктивної змінної в точці  $t^*$  пропонується використовувати *множинну логіт - модель* [14]:

$$P(z_i^* = \hat{z}_i^*(j)) = \frac{e^{t^* \mathbf{b}_j}}{\sum_{j=1}^3 e^{t^* \mathbf{b}_j}}, \quad j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

де  $z_i^*$  - значення фіктивної змінної  $z_{it}$  в прогнозній точці  $t^*$ ;  $\hat{z}_i^*(j)$  - оцінка

прогнозного значення для варіанта  $j$ ;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)'$  – вектор оцінювальних параметрів.

Регресійна модель, яка відповідає (7), є істотно нелінійною відносно  $\mathbf{b}$ , тому для її оцінювання можна використовувати чисельний *метод Ньютона–Рафсона* розв’язання системи рівнянь правдоподібності, записаних у логарифмічній формі [14].

**Практична частина.** Апробація запропонованого алгоритму проводилась на статистичних даних цін акцій українських компаній, що функціонують на Варшавській фондовій біржі, яка характеризується найбільш динамічним розвитком серед бірж центральної Європи. Розглядалися часові ряди, які відображають коливання цін акцій компаній, які входять до індексу WIGUkraine. На 6.10.2011 до складу індексного кошику входять наступні компанії: Kernel Holding S.A. (KER, 42,267%), Astarta Holding N.V. (AST, 21,613%), Coal Energy S.A. (CLE, 9,422%), Milkiland N.V. (MLK, 5,784%), Agroton Public Limited (AGT, 4,937%), KSG Agro S.A. (KSG, 3,852%), Industrial Milk Company S.A. (IMC, 3,238%), Sadovaya Group S.A. (SGR, 3,234%), Ovostar Union N.V. (OVO, 2,967%), Westa ISIC S.A. (WES, 2,687%) (в дужках вказані котировки акцій та доля в індексному кошику на 6.10.2011). Статистична інформація бралась за період з 18.05.2011 до 6.10.2011 (об’єм вибірки  $N=100$ , якщо компанія торгувала на біржі до 18.05.2011); або з дня виходу компанії на біржу до 6.10.2011 (для CLE, OVO та WES; значення  $N$  для них дорівнює 56, 71 та 80 відповідно).

Розглянемо детально моделювання цін та доходностей акцій на прикладі Astarta Holding N.V. (AST) та Westa ISIC S.A. (WES).

Діаграма розсіювання цін акції AST показана на рис. 1.

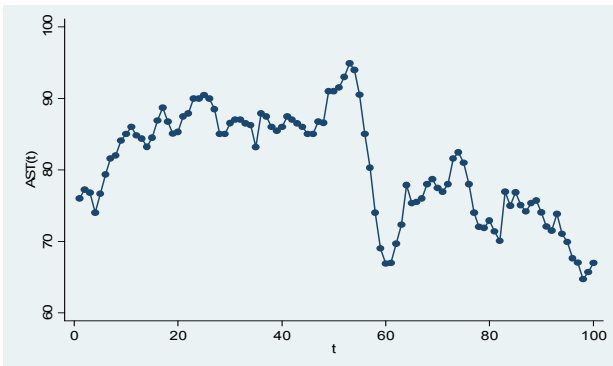


Рисунок 1 – Статистичні дані цін акції AST.



Перевірка моделі (1) за *розширеним тестом Дікі-Фуллера* з використанням методу Доладо Дж., Дженкінса Т., Сосвіля – Ріверо С. та інформаційного критерію Шварца вказує на значущість оцінки коефіцієнта  $\rho$  (рівень значущості – 5%) при  $\alpha \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$  і  $\zeta_i = 0$  ( $i = \overline{1, p}$ ). Це означає, що ряд відноситься до TS класу, причому оптимальною є авторегресійна модель з двома лагами. Аналіз залишків  $u_t$  не виявляє автокорельованості ( $P$  – значення *статистики Дарбіна-Уотсона* дорівнює 2,09), значущих відхилень від нормального розподілу ( $P$  – значення *критерію Жака-Бера* дорівнює 1,59), гетероскедастичності ( $P$  – значення *критерію Бройша-Пагана* дорівнює 2,53). Отже, маємо стаціонарний ряд відносно лінійного детермінованого тренду.

Розрахунки формують неперервну складову моделі (4) у вигляді

$$\hat{x}_t = 10,0743 - 0,0248t + 1,2179x_{t-1} - 0,3277x_{t-2}. \quad (8)$$

(3,3032)      (0,0095)      (0,0974)      (0,0959)

Тут під значенням МНК-оцінок вказані відповідні значення стандартних помилок цих оцінок.

Після нарощування за вказаним алгоритмом дискретної складової після двох ітерацій приходимо до наступної дискретно-неперервної моделі:

$$\hat{x}_t = 10,0743 - 0,0248t + 1,2179x_{t-1} - 0,3277x_{t-2} + 0,0651z_1 + 0,0685z_2. \quad (9)$$

(с.п.)      (3,3032)      (0,0095)      (0,0974)      (0,0959)      (0,0041)      (0,0047)

Аналіз залишків не виявляє автокорельованості ( $P$  – значення статистики Дарбіна-Уотсона дорівнює 2,12), значущих відхилень від нормального розподілу ( $P$  – значення критерію Жака-Бера дорівнює 0,76), гетероскедастичності ( $P$  – значення критерію Бройша-Пагана дорівнює 0,99), тому обґрунтованим є використання результатів  $t$ - і  $F$ -критеріїв [15].

На рис. 2 показані модельні та реальні значення цін акції на досліджуваному проміжку часу.

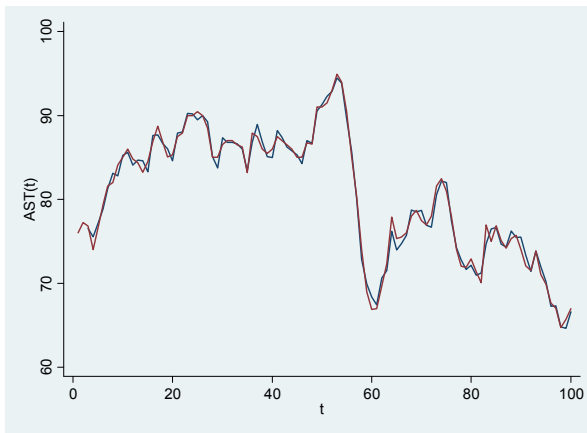


Рисунок 2 – Модельні та реальні значення цін акції AST.

Аналіз отриманих результатів вказує на високу якість апроксимації, тому дана модель може бути використана для прогнозування в точці  $t^* = N + 1$ , що відповідає 7.10.2011. Для цього спочатку обчислюємо теоретичні значення ціни в точках досліджуваного періоду за формулою (9). Далі знаходимо значення фіктивних змінних в прогнозній точці  $t^*$  за допомогою множинної логіт-моделі (7). Після цього прогнозне значення розраховується за формулою (9) при  $t = t^*$ . У даному випадку отримуємо прогнозне значення 70,13. Зазначимо, що реальне значення на 7.10.2011 становить 69,75, тому відносна похибка прогнозу складає 0,54%.

Розглянемо тепер моделювання цін акцій компанії WES. Відповідна діаграма розсіювання показана на рис. 3, а.

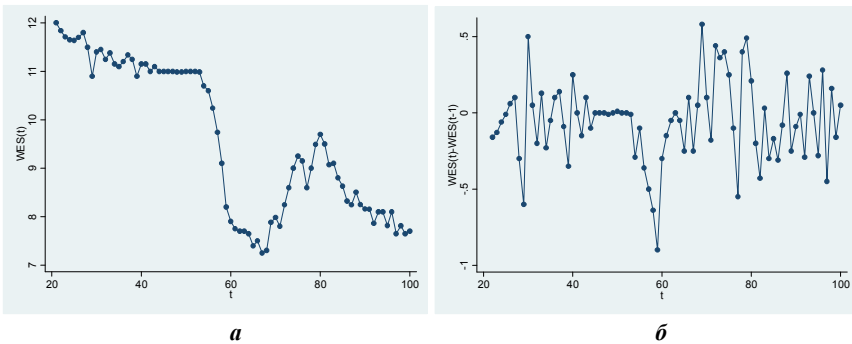


Рисунок 3 – Статистичні дані цін акції WES (а) та їх перших різниць (б).

Аналіз діаграми розсіювання вказує на належність даного часового ряду до DS класу, тому диференціюємо часовий ряд. Результати диференціювання показані на рис. 3, б.

Використання описаної вище процедури встановлення стаціонарності часового ряду вказує на те, що часовий ряд, який відповідає рис. 3, б, є стаціонарним вже при  $n = 2$ .

Відповідна неперервна складова моделі наступна:

$$\Delta \hat{x}_t = -0,0416 + 0,2063 \Delta x_{t-1}. \quad (10)$$

(0,0415)      (0,0922)

Після нарощування дискретної складової за вказаним алгоритмом після трьох ітерацій дискретно-неперервна модель приймає вигляд:

$$\Delta \hat{x}_t = -0,0416 + 0,2063 \Delta x_{t-1} + 0,0099 z_1 + 0,0102 z_2 + 0,0345 z_2. \quad (11)$$

(с.н.)      (0,0415)      (0,0922)      (0,0007)      (0,0007)      (0,0061)

Аналіз залишків цієї моделі не виявляє автокорельованості ( $P$  – значення статистики Дарбіна-Уотсона дорівнює 2,11), значущих відхилень від

нормального розподілу ( $P$  – значення критерію Жака-Бера дорівнює 1,56), гетероскедастичності ( $P$  – значення критерію Бройша-Пагана дорівнює 6,30), тому обгрунтованим є використання результатів  $t$  - і  $F$  -критеріїв.

На рис. 5 показані модельні та реальні значення цін акції WES та їх різниць на досліджуваному проміжку часу.

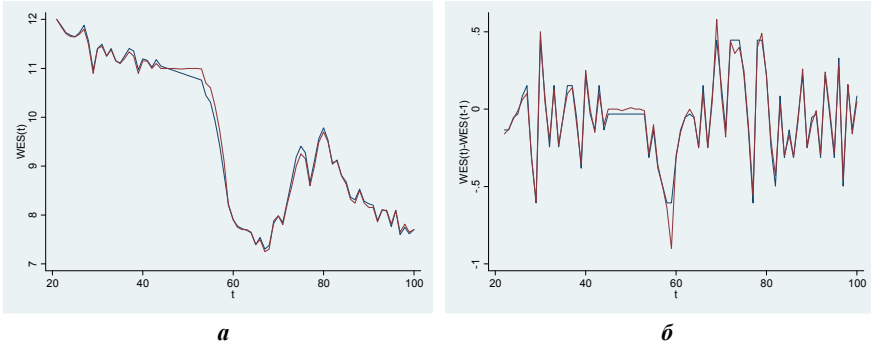


Рисунок 4 – Модельні та реальні значення цін акції WES (а) та їх різниць (б).

Аналіз рис. 4 вказує на досить високі імітаційні властивості моделі (11). Використовуючи відповідну множинну логіт – модель і розраховуючи теоретичні (на досліджуваному періоді) та прогнозне значення доходностей (приростів), отримаємо прогнозне значення ціни, яке дорівнює 7,65. Реальне значення становить 7,69, тому відносна похибка прогнозу складає 0,52%.

За вказаною методикою було проведено моделювання цін акцій інших зазначених компаній. В таблиці наведені реальні та прогнозні значення цін українських компаній на Варшавській фондовій біржі на 7.10.2011.

Таблиця

Прогнозні та реальні значення цін українських компаній

	Реальні значення	Прогнозні значення	Відносна похибка прогнозу, %	Клас часового ряду	Кількість ітерацій
KER	62,75	62,26	0,79	TS	2
AST	69,75	70,13	0,54	TS	2
MLK	20,85	21,24	1,84	DS	3
AGT	25,4	25,08	1,28	DS	3
CLE	24,25	24,24	0,04	TS	2
KSG	23,35	24,04	2,87	TS	2
SGR	9,15	9,19	0,44	TS	2
IMC	9,00	8,99	0,11	TS	2
OVO	58,60	58,92	0,54	DS	3
WES	7,69	7,65	0,52	DS	3

**Висновки.** У даній роботі розглянутий підхід, який дозволяє моделювати часові ряди з високими імітаційними та прогнозними властивостями. Враховується нестационарність вихідного часового ряду і пропонується процедура зведення дослідження до аналізу стаціонарного часового ряду. Особливістю даної роботи є побудова неперервно-дискретних моделей з використанням тризначних фіктивних змінних, що дозволяють отримувати високі апроксимаційні властивості за 2-3 ітерації. Апробація запропонованої методики на прикладі цін акцій українських компаній на Варшавській фондовій біржі показала можливість її використання на практиці.

**Список літератури:** 1. *Gurierous C., Monfort A.* Time Series and Dynamic Models. – Cambridge University Press, 1997. – 668 p. 2. *Hamilton J.* Time Series Analysis. – Princeton University Press, 1994. – 799 p. 3. *Nazarenko O. M., Filchenko D. V.* Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective // International Journal of Innovating Computing, Information and Control. – 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 1553–1566. 4. *Назаренко А. М., Фильченко Д. В.* Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника. – 2009. – Вып. 158. – С. 81–99. 5. *Востров Г. Н., Полякова М. В., Любченко В. В.* Сегментация и анализ временных рядов на основе стохастической фрактальной модели // Труды Одесского политехнического университета. – 2001. – №1. – С. 109 – 144. 6. *Серая О. В.* Прогнозирование вейвлет-аппроксимации временного ряда // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – №4 (52) – С. 49 – 51. 7. *Носко В. П.* Введение в регрессионный анализ временных рядов. – Москва, 2002. – 273с. 8. *Clements M. P., Hendry D. F.* Forecasting with difference-stationary and trend-stationary models // Econometrics Journal. – 2001. – No. 4. – P. 1–19. 9. *Канторович Г. Г.* Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – № 3. – С. 379 – 401. 10. *Rossen A.* On the predictive content of nonlinear transformations of lagged autoregression residuals and time series observations // Hamburg Institute of International Economics, Research Paper 113. – 2001. – P. 1–24. 11. *Patterson K.* An Introduction to Applied Econometrics: A Time Series Approach. – Palgrave, 2000. – 797 p. 12. *Dolado J., Jenkinson T., Sosvilla-Rivero S.* Cointegration and Unit Roots // Journal of Economic Surveys. – 1990. – Vol. 4. – P. 249–273. 13. *Мартынова М. А.* Инвестиционные решения в пространстве риск-устойчивых стратегий. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2009. – 141с. 14. *Давнис В. В.* Прогнозные модели экспертных предпочтений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248с. 15. *Назаренко О. М.* Основы эконометрики. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.

*Надійшла до редколегії 23.12.2011*

**З.Ф. НАЗИРОВ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків;  
**Н.В. ЧЕРЕМСЬКА**, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХП»

## ДИЛАТАЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. У статті розглядалися лінійні перетворення над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Рассмотрены линейные преобразования некоторых классов случайных полей. Получены необходимые и достаточные условия в терминах корреляционных функций для того чтобы преобразованное поле принадлежало тому или иному классу. В статье рассматривались линейные преобразования двухпараметрические последовательности в гильбертовом пространстве, которые строятся по заданному дискретному случайному полю.

The article deals with linear transformations of certain classes of random fields. Necessary and sufficient conditions in terms of correlation function to convert the field belonged to a particular class. The article deals with two-parameter sequence of linear transformations in Hilbert space, which are constructed from a given discrete random field.

**Вступ.** При розв'язанні прикладних задач доводиться розглядати лінійні перетворення випадкових полів. Наприклад, електромагнітні поля з випадковими джерелами, турбулентність у стадії виродження та інші [1, 2]. При гільбертовому підході до дослідження випадкових функцій виникає новий вид лінійних перетворень випадкових полів як багатопараметричних векторних функцій у гільбертовому просторі. Такі перетворення є мало дослідженими [3, 4].

**Аналіз останніх досліджень.** До цього часу була розроблена достатньо повна спектральна теорія однорідних випадкових полів [3]. Дискретні поля вивчалися лише епізодично [5,7]. Гільбертів підхід до лінійних перетворень дискретних випадкових полів не розглядався.

**Постановка задачі.** Визиває зацікавленість розповсюдження результатів роботи [6], в якій розглянуто лінійні перетворення випадкових полів у гільбертовому просторі, на дискретні випадкові поля. Такий підхід дозволяє отримати широкі класи випадкових полів, розглядаючи лінійне операторне перетворення поля після занурення у гільбертів простір. Це дає можливість також моделювати кореляційні функції випадкових неоднорідних полів тільки за спектром даного поля і відхиленню оператора перетворення від унітарного.

**Розв'язання задачі.** Розглянемо еволюційно зображене поле (ЕПП)  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$ , де  $A_1, A_2$  – несамоспряжені двічі переставні [4] обмежені оператори в гільбертовому просторі  $H = \overline{V_{n,m \in \mathbb{Z}} u(n, m)}$ . Такі поля та їх збудження розглядались у [6]

Розглянемо також лінійне перетворення ЕПП:  $V(n, m) = Bu(n, m)$ , де оператор  $B \in [H, H]$ ,  $\|B\| < \infty$ , і  $I - B^*B = \langle \cdot, e \rangle e$ ,  $u(n, m)$  – ганкелево поле [6], оператор  $B$  називатимемо *дилатацією* [6].

Кореляційна функція дилатації ганкелева поля має вигляд:

$$K_{VV}(n, m, p, q) = \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = \langle u(n, m), u(p, q) \rangle - \left\langle (I - B^*B)u(n, m), u(p, q) \right\rangle = K_{uu}(n, m, p, q) - \Phi(n, m) \overline{\Phi(p, q)}, \quad (1)$$

де  $\Phi(n, m) = \langle u(n, m), e \rangle$ .

Тоді кореляційну різницю  $W(n, m, p, q)$ , яка описує відхилення дискретного випадкового поля від ганкелева [6], запишемо так:

$$W(n, m, p, q) = LK(n, m, p, q) = K(n, m+1, p+1, q) + K(n+1, m, p, q+1) - K(n+1, m+1, p, q) - K(n, m, p+1, q+1).$$

У випадку, що розглядається маємо:

$$W_{VV} = LK_{VV}(n, m, p, q) = L \left( K_{UU}(n, m, p, q) - \Phi(n, m) \overline{\Phi(p, q)} \right),$$

$$LK_{UU}(n, m, p, q) = W_{UU}(n, m, p, q).$$

$$L\Phi(n, m) \overline{\Phi(p, q)} = \Phi(n, m+1) \overline{\Phi(p+1, q)} + \Phi(n+1, m) \overline{\Phi(p, q+1)} - \Phi(n+1, m+1) \overline{\Phi(p, q)} - \Phi(n, m) \overline{\Phi(p+1, q+1)}. \quad (2)$$

Позначимо

$$\Phi(n, m+1) = \Phi_1(n, m), \quad \Phi(n+1, m) = \Phi_2(n, m),$$

$$\Phi(n+1, m+1) = \Phi_3(n, m), \quad \Phi(n, m) = \Phi_4(n, m).$$

Тоді

$$W_{VV} = W_{UU}(n, m, p, q) - \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Phi_\alpha(n, m) J_{\alpha\beta} \overline{\Phi_\beta(p, q)}, \quad (3)$$

$$\text{де } J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{інволютивна матриця.}$$

Нехай  $A_1, A_2$  – несамоспряжені двічі переставні обмежені оператори  
Тоді кореляційна різниця ЕПП має вигляд:

$$W_{UU}(n, m, p, q) = \varphi(n, m) \overline{\varphi(p, q)}, \quad \varphi(n, m) = \langle A_1^n A_2^m u_0, g \rangle,$$

$g$  – каналовий елемент.

**Означення.** Біспектром послідовності  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$  у гільбертовому просторі назвемо об'єднання спектрів операторів  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ).

**Розв'язання задачі для послідовності з біспектром у нулі.** Перейдемо до отримання відповідних необхідних і достатніх умов у випадку заданого спектра операторів  $A_1$  и  $A_2$ . Нехай в еволюційному зображенні  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$ , де  $A_1, A_2$  – оператори зі спектром у нулі [7] і  $g$  – каналовий елемент.

У цьому випадку модельний простір  $\widehat{H}$  збігається з  $L^2(D)$ ,  
 $D = [0, a_1] \times [0, a_2]$ ;  $a_1, a_2 < \infty$ ,  $\widehat{A}_1 f(x, y) = i \int_0^x f(t, y) dt$ ,  $\widehat{A}_2 f(x, y) = i \int_0^y f(x, \tau) d\tau$ ,  
де  $i = \sqrt{-1}$ .

**Теорема 1.** Для того щоб  $V(n, m)$  була дилатацією першого порядку поля  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$ , де  $A_1, A_2$  – несамоспряжені двічі переставні [4] обмежені оператори зі спектром у нулі, необхідно і достатньо щоб її кореляційна різниця другого порядку мала вигляд (2), до того ж  $\Phi_\alpha(n, m)$  – лінійні функціонали від  $u(n, m)$ , а

$$W_{UU}(n, m, p, q) = \varphi(n, m) \overline{\varphi(p, q)}, \quad (4)$$

$$\varphi(n, m) = \frac{(-1)^m i^{n+m} a_1^{n+1} a_2^{m+1}}{(n+1)!(m+1)!}. \quad (5)$$

*Доведення. Необхідність.*

Розглянемо випадок, коли біспектр послідовності  $u(n, m)$  міститься у нулі [7] та  $g$  – каналовий елемент.

Нехай модельний простір  $\widehat{H}$  збігається з  $L^2(D)$ ,  $D = [0, a_1] \times [0, a_2]$ ;

$$a_1, a_2 < \infty \quad \widehat{A}_1 f(x, y) = i \int_0^x f(t, y) dt, \quad \widehat{A}_2 f(x, y) = i \int_0^y f(x, \tau) d\tau.$$

Згідно з унітарною еквівалентністю  $H_0$  відображується оператором  $\cup$  в  $\widehat{H}_0 = \overline{2Jm\widehat{A}_1\widehat{H}} \cap \overline{2Jm\widehat{A}_2\widehat{H}}$  підпростір постійних функцій  $L^2(D)$ , через те що  $\|g_0\| = 1$ , отже  $g_0(x, y) \equiv 1$ .

Неважко показати, що

$$\left(\widehat{A}_1 - \lambda_1 I\right)^{-1} \left(\widehat{A}_2 - \lambda_2 I\right)^{-1} g_0(x, y) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} e^{i\frac{x}{\lambda_1} + i\frac{y}{\lambda_2}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(n, m) &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^m \left[ \int_D \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} e^{i\frac{\xi_1}{\lambda_1} + i\frac{\xi_2}{\lambda_2}} d\xi_1 d\xi_2 \right] d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_D \left[ \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^{n-1} \lambda_2^{m-1} e^{i\frac{\xi_1}{\lambda_1} + i\frac{\xi_2}{\lambda_2}} d\lambda_1 d\lambda_2 \right] d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_D \frac{i^n \xi_1^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^m i^m \xi_2^m}{m!} d\xi_1 d\xi_2 = (-1)^m \frac{i^{n+m} a_1^{a_1} a_2^{a_2}}{n! m!} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \xi_1^n \xi_2^m d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= (-1)^m \frac{i^{n+m} a_1^{n+1} a_2^{m+1}}{(n+1)!(m+1)!}, \end{aligned}$$

$$W_{UU}(n, m, p, q) = \varphi(n, m) \overline{\varphi(p, q)}, \quad \varphi(n, m) = \frac{(-1)^m i^{n+m} a_1^{n+1} a_2^{m+1}}{(n+1)!(m+1)!}.$$

Той факт, що  $\Phi_\alpha(n, m)$  – лінійні функціонали від  $u(n, m)$  витікає з (2).

*Достатність.*

Покажемо, що існує дискретне поле вигляду  $u(n, m) = \widehat{A}_1^n \widehat{A}_2^m u_0$ , для якого  $W_{UU}(n, m, p, q)$  є кореляційною різницею. Розглянемо гільбертів простір

$L^2(D)$ ,  $D = [0; a_1] \times [0; a_2]$ . Введемо оператори  $\widehat{A}_1 f(x, y) = i \int_0^x f(t, y) dt$ ,

$\widehat{A}_2 f(x, y) = i \int_0^y f(x, \tau) d\tau$ . Якщо провести такі ж міркування, як при доведенні

необхідності, одержимо кореляційну різницю вигляду (4) з  $\varphi(n, m)$  вигляду (5).

Теорема доведена.

Розглянемо випадок, коли біспектр послідовності  $u(n, m)$  міститься у



нулi [7] та  $h_0$  не є каналовим елементом. Як модельний простір  $\widehat{H}$  візьмемо

$$L^2(D), \quad D = [0; a_1] \times [0; a_2] \quad a_1, a_2 < \infty \quad \widehat{A}_1 f(x, y) = i \int_0^x f(t, y) dt,$$

$$\widehat{A}_2 f(x, y) = i \int_0^y f(x, \tau) d\tau.$$

Розглянемо

$$\left( \widehat{A}_1^* - \lambda_1 I \right)^{-1} h_0 = f(x, y), \quad h_0 = \left( \widehat{A}_1^* - \lambda_1 I \right) f(x, y), \quad h_0 = -\lambda_1 f(x, y) - i \int_x^1 f(t, y) dt.$$

Позначимо  $u(x, y) = \int_x^1 f(t, y) dt$ .

Тоді

$$-iu(x, y) + \lambda_1 \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = h_0(x, y); \quad u(1, y) = 0,$$

Звідси

$$u(x, y) = \left\{ c_1 + \int_x^1 \frac{h_0(t, y)}{\lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)} dt \right\} e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}.$$

Оскільки  $u(1, y) = 0$ , то  $c_1 = 0$ .

$$f(x, y) = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{h_0(t, y)}{\lambda_1} - \frac{i}{\lambda_1} e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)} \int_x^1 \frac{h_0(t, y)}{\lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)} dt.$$

Таким чином,

$$\left( \widehat{A}_1^* - \lambda_1 I \right)^{-1} h_0 = \frac{h_0(t, y)}{\lambda_1} - \frac{i}{\lambda_1} e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)} \int_x^1 \frac{h_0(t, y)}{\lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)} dt = M_1(x, y, \lambda_1).$$

Аналогічно,

$$\left( \widehat{A}_2^* - \lambda_2 I \right)^{-1} h_0 = \frac{h_0(x, t)}{\lambda_2} - \frac{i}{\lambda_2} e^{-\frac{i}{\lambda_2}(1-y)} \int_y^1 \frac{h_0(x, t)}{\lambda_2} e^{\frac{i}{\lambda_2}(1-t)} dt = M_2(x, y, \lambda_2),$$

$$\varphi(n, m) = \left( -\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^m \left[ \int_D M_1(x, y, \lambda_1) \overline{M_2(x, y, \lambda_2)} dx dy \right] d\lambda_1 d\lambda_2.$$

**Розв'язання задачі для послідовності з дискретним біспектром.**

**Теорема 2.** Для того щоб  $V(n, m)$  була дилатацією першого порядку

поля  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$ , де  $A_1, A_2$  – несамоспряжені двічі переставні [4]

обмежені оператори з дискретним спектром, необхідно і достатньо щоб її кореляційна різниця другого порядку мала вигляд (3), до того ж  $\Phi_\alpha(n, m)$  – це лінійні функціонали від  $u(n, m)$ , а  $W_{UU}(n, m, p, q) = \varphi(n, m)\overline{\varphi(p, q)}$ ,

$$\varphi(n, m) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^m \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{(\beta_{m_1}^{(1)})^2}{\lambda_{m_1}^{(1)} - \lambda_1} \frac{(\beta_{m_2}^{(2)})^2}{\lambda_{m_2}^{(2)} - \lambda_2} \prod_{s=1}^{m_1-1} \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1 - \lambda_{m_1-s}^{(1)}} \prod_{r=1}^{m_2-1} \frac{\lambda_2 - \overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2 - \lambda_{m_2-r}^{(2)}} d\lambda_1 d\lambda_2.$$

*Доведення. Необхідність.*

Розглянемо випадок, коли послідовність  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$  має дискретний біспектр [7] та  $g_0(n, m)$  – каналовий елемент. У цьому випадку модельний простір  $\widehat{H}$  збігається з простором

$$l^2(\beta_1, \beta_2) = \left\{ f(m_1, m_2), m_1 = 1, \dots, N_1; m_2 = 1, \dots, N_2; \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} |f(m_1, m_2)|^2 (\beta_{m_1}^{(1)})^2 (\beta_{m_2}^{(2)})^2 < \infty \right\},$$

$N_1 N_2 < \infty$ , де  $\{\lambda_{m_1}^{(1)}\}_{m_1=1}^{N_1}$  – послідовність недійсних точок спектру  $A_1/H_2$ ,

$H_2 = \overline{2JmA_2H}$ ,  $\lambda_{m_1}^{(1)} = \alpha_{m_1}^{(1)} + i \frac{(\beta_{m_1}^{(1)})^2}{2}$ ,  $\{\lambda_{m_2}^{(2)}\}_{m_2=1}^{N_2}$  – послідовність недійсних то-

чок спектру  $A_2/H_1$ ,  $H_1 = \overline{2JmA_1H}$ ,  $\lambda_{m_2}^{(2)} = \alpha_{m_2}^{(2)} + i \frac{(\beta_{m_2}^{(2)})^2}{2}$ .

Оператори  $\widehat{A}_1$  та  $\widehat{A}_2$  задаються формулами

$$\widehat{A}_1 f(m_1, m_2) = \lambda_{m_1}^{(1)} f(m_1, m_2) + i \sum_{s=1}^{m_1-1} f(s, m_2) (\beta_s^{(1)})^2,$$

$$\widehat{A}_2 f(m_1, m_2) = \lambda_q^{(2)} f(m_1, m_2) + i \sum_{r=1}^{m_2-1} f(m_1, r) (\beta_r^{(2)})^2.$$

Оскільки переріз неермітових підпросторів операторів  $\widehat{A}_1$  та  $\widehat{A}_2$  збігається з підпростором функцій, що не залежать від аргументів, то  $g_0(n, m) = 1$ . Легко перевірити, що

$$(A_1 - \lambda_1 I)^{-1} (A_2 - \lambda_2 I)^{-1} g_0(m_1, m_2)^{-1} = \frac{\beta_{m_1}^{(1)}}{\lambda_{m_1}^{(1)} - \lambda_1} \frac{\beta_{m_2}^{(2)}}{\lambda_{m_2}^{(2)} - \lambda_2} \prod_{s=1}^{m_1-1} \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1 - \lambda_{m_1-s}^{(1)}} \prod_{r=1}^{m_2-1} \frac{\lambda_2 - \overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2 - \lambda_{m_2-r}^{(2)}}.$$

Тоді має місце зображення

$$\varphi(n, m) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^m \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{(\beta_{m_1}^{(1)})^2}{\lambda_{m_1}^{(1)} - \lambda_1} \frac{\overline{(\beta_{m_2}^{(2)})^2}}{\lambda_{m_2}^{(2)} - \lambda_2} \prod_{s=1}^{m_1-1} \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1 - \lambda_{m_1-s}^{(1)}} \prod_{r=1}^{m_2-1} \frac{\lambda_2 - \overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2 - \lambda_{m_2-r}^{(2)}} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

$$\varphi(n, m) = \varphi_1(n) \overline{\varphi_2(m)}, \quad \varphi_1(n) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \beta_{m_1}^{(1)} \Lambda_{m_1}^{(1)}(n), \quad \varphi_2(m) = \sum_{m_2=1}^{\infty} \beta_{m_2}^{(2)} \Lambda_{m_2}^{(2)}(m),$$

$$\Lambda_{m_1}^{(1)}(n) = -\frac{1}{2\pi i} \beta_{m_1}^{(1)} \oint_{\gamma_1} \lambda_1^n \frac{1}{\lambda_{m_1}^{(1)} - \lambda_1} \prod_{s=1}^{m_1-1} \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_{m_1-s}^{(1)}}}{\lambda_1 - \lambda_{m_1-s}^{(1)}} d\lambda_1,$$

$$\Lambda_{m_2}^{(2)}(m) = -\frac{1}{2\pi i} \beta_{m_2}^{(2)} \oint_{\gamma_2} \lambda_2^m \frac{1}{\lambda_{m_2}^{(2)} - \lambda_2} \prod_{r=1}^{m_2-1} \frac{\lambda_2 - \overline{\lambda_{m_2-r}^{(2)}}}{\lambda_2 - \lambda_{m_2-r}^{(2)}} d\lambda_2.$$

*Достатність.*

Відповідні міркування аналогічні доведенню теореми 1.

Теорема доведена.

**Розв'язання задачі для послідовності з мішаним біспектром.** Розглянемо випадок, коли послідовність  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$  має мішаний біспектр [7] та  $g_0$  – каналовий елемент.

**Теорема 3.** Для того щоб  $V(n, m)$  була дилатацією першого порядку поля  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$ , де  $A_1, A_2$  – несамоспряжені двічі переставні [4] обмежені оператори з мішаним спектром, необхідно і достатньо щоб її кореляційна різниця другого порядку мала вигляд (3), до того ж  $\Phi_\alpha(n, m)$  – лінійні функціонали від  $u(n, m)$ , а  $W_{UU}(n, m, p, q) = \varphi(n, m) \overline{\varphi(p, q)}$ ,

$$\varphi(n, m) = -\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Lambda_k(m) \frac{i^n l^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{де } \Lambda_k(m) = -\frac{1}{2\pi} \beta_k \oint_{\gamma} \lambda^m \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \prod_{s=1}^{k-1} \frac{\lambda - \overline{\lambda_{k-s}}}{\lambda - \lambda_{k-s}} d\lambda.$$

*Доведення. Необхідність.*

Нехай послідовність  $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$  має мішаний біспектр [7] та  $g_0$  – каналовий елемент. У цьому випадку модельний простір  $\widehat{H}$  є така сукупність:

$$\widehat{H} = \left\{ f_k(y), k \in N; y \in [0; l]: \sum_{k=1}^N \int_0^l |f_k(y)|^2 dy \right\} \beta_k^2 < \infty,$$

де  $\left\{ \lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2} \right\}_{k=1}^N$  – це послідовність недійсних точок спектра  $A_2/H_1$ .

Модельні оператори  $\hat{A}_1$  та  $\hat{A}_2$  задаються формулами:

$$\left( \hat{A}_1 f \right)_k (y) = i \int_0^y f_k(t) dt, \quad \left( \hat{A}_2 f \right)_k (y) = \lambda_k f_k(y) + i \sum_{s=1}^{k-1} f_s(y) \beta_s^2.$$

Легко бачити, що й у цьому випадку  $g_0 \equiv 1$ , тоді

$$\varphi(n, m) = - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Lambda_k(m) \frac{i^n 1^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{де } \Lambda_k(m) = - \frac{1}{2\pi} \beta_k \oint_{\gamma} \lambda^m \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \prod_{s=1}^{k-1} \frac{\lambda - \overline{\lambda_{k-s}}}{\lambda - \lambda_{k-s}} d\lambda.$$

*Достатність.* Міркування аналогічні доведенню теореми 1.

Теорема доведена.

**Висновки.** У статті розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. На відміну від стандартного підходу до лінійних перетворень полів у статті лінійні перетворення розглядалися над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

**Список літератури:** 1. *Рытов С.М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения / М.: Изд-во Академии наук СССР, 1953. – 232с. 2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика II ч / М.: Наука, 1967. – 720 с. 3. *Яглом А.М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. – Том 1. – Вып.5(51),– С.3-168. 4. *Золотарев В.А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм.ССР, –1979. – XII. – № 3. – С.136-140. 5. *Назирова З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А.* Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ“ХП”. – 2011. – №13.–С.146-153. 6. *Назирова З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А.* Лінійні перетворення дискретних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ“ХП”. – 2011. – №42.–С.144-154. 7. *Шаронова Н.В., Черемская Н.В.* Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета.– 2004. – №1(19). – С.343-348.

Надійшла до редколегії 27.12.11

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, ст. преп., НТУ «ХПИ»

## КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ЗЕРНОВОГО ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Описано коливання швидкості лінійно-неоднорідного кільцевого шару зернової суміші, які спричинені осевими вібраціями вертикального циліндричного решета. Амплітуди коливань швидкості в усталеному режимі руху виражено через функції Кельвіна індексів нуль та один.

Описаны колебания скорости линейно-неоднородного кольцевого слоя зерновой смеси, вызванные осевыми вибрациями вертикального цилиндрического решета. Амплитуды колебаний скорости в установившемся режиме движения выражены через функции Кельвина индексов нуль и единица.

The vibrations in linearly no uniform velocity annular layer of a mixture of grain, caused by the axial vibration of a vertical cylindrical sieve were describes. The amplitudes of velocity oscillations in the steady state of motion expressed in terms of Kelvin functions of indices zero and one.

**Постановка проблеми.** Колебания интенсифицируют виброрешётное разделение зерновой смеси на фракции. Поэтому анализ распространения колебаний в сепарируемой смеси, вызванных вибрациями решета, представляет научно-прикладной интерес.

**Обзор последних исследований и публикаций.** Колебания скорости однородного кольцевого слоя в вертикальном цилиндрическом виброрешете рассматривали в [1,2], где движение псевдооживленной зерновой смеси описывали уравнениями течения вязкой жидкости. Экспериментально установлено [3,4], что вибровязкость смеси во вращающемся цилиндрическом решете меняется по толщине слоя. Она увеличивается с удалением от свободной внутренней поверхности слоя в сторону поверхности решета, в связи с чем в [4] поставлена и решена задача колебаний линейно-неоднородного слоя. Её решение выражено с помощью *функций Бесселя и Неймана* комплексного аргумента. Отмечены затруднения с проведением вычислений по полученным формулам. Поэтому в [5] и [6] построены другие решения этой задачи в *функциях Кельвина*. Но, исследуя колебания неоднородного потока, в [4], [5] и [6] упрощали уравнение движения, отбрасывая в дифференциальном операторе Лапласа слагаемое, пропорциональное  $1/r$ , которым учитывается искривление рабочей поверхности решета. Фактически в этих публикациях, вместо колебаний скорости кольцевого слоя, моделировали колебания скорости неоднородного плоского слоя. В отличие от них, здесь решается задача колебаний в более точной постановке с учётом искривления рабочей поверхности решета.

**Целью работы** является вывод и апробация расчётами формулы колебаний скорости неоднородного кольцевого слоя зерна при движении его в вертикальном цилиндрическом виброрешете.

**Постановка и аналитическое решение краевой задачи.** За исходную принимаем расчётную схему на рис. 1.

Символами  $r$  и  $z$  обозначены радиальная и осевая координаты;  $R$  – радиус решета, которое совершает вертикальные осевые колебания с амплитудой  $A^*$  и круговой частотой  $\omega$ ;  $h$  – толщина зернового слоя, а  $R_0 = R - h$  – радиус его внутренней свободной поверхности.

Следуя [4], изменение эффективной кинематической вибровязкости смеси по радиальной координате описываем выражением

$$v = v(r) = v_0 + k(r - R_0). \quad (1)$$

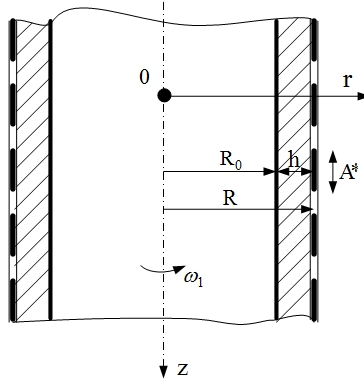


Рисунок 1 – Расчетная схема вертикального цилиндрического решета с сепарируемой зерновой смесью.

В нём  $v_0$  – вибровязкость смеси у свободной поверхности слоя;  $k$  – характеризует её возрастание с увеличением  $r$ .

Движение смеси в направлении оси  $Oz$  описываем дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{v}, \quad (2)$$

в котором  $u = u(r, t)$  – проекция скорости потока на ось  $Oz$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $t$  – время.

Уравнение (2) будем решать при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0; \quad u(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t). \quad (3)$$

Учитывая, что в производственных условиях работы решета  $h \ll R$ , заменим в (2) слагаемое  $1/r$  числом  $1/r_*$ , где  $r_* = R - 0,5h$ . Такая замена не влечёт существенных потерь точности, поскольку  $1/r$  изменяется на коротком промежутке. Например, когда  $R = 0,3075$  м;  $h = 0,01$  м, то  $r \in [3,2520; 3,3613]$ . Постоянная  $1/r_*$  при этом равна 3,3058, то есть незначительно отличается от крайних значений  $1/r$ . Эффективность указанного упрощения уравнения движения подтверждена расчётами колебаний скорости однородного кольцевого слоя в [7] и [8].

Итак, вместо (2), решаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r_*} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{v}. \quad (4)$$

Перейдём от переменной  $r$  к переменной  $v$ . В результате этого преобразования выражения (4) и (3) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \left( \frac{1}{kr_*} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{1}{vk^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{vk^2}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_{v=v_0} = 0; \quad u(a, t) = A^* \omega \cos(\omega t). \quad (6)$$

Здесь  $a = v_0 + kh$ .

По аналогии с [4], решение (5) представляем суммой

$$u(v, t) = v_{II}(v) + v_k(v, t). \quad (7)$$

Для определения слагаемых в (7), учитывая (5) и (6), получаем две краевые задачи:

$$\frac{d^2 v_{II}}{dv^2} + \left( \frac{1}{kr_*} + \frac{1}{v} \right) \frac{dv_{II}}{dv} = -\frac{g}{vk^2}; \quad (8)$$

$$\left. \frac{dv_{II}}{dv} \right|_{v=v_0} = 0; \quad v_{II}(a) = 0; \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial v^2} + \left( \frac{1}{kr_*} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial v_k}{\partial v} - \frac{1}{vk^2} \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial v_k}{\partial v} \right|_{v=v_0} = 0; \quad v_k(a, t) = A^* \omega \cos(\omega t). \quad (11)$$

Уравнение (8) решаем методом понижения порядка. Учитывая (9), находим:

$$\nu_{II}(\nu) = \frac{gr_*}{k} \left\{ \ln \frac{a}{\nu} + \exp\left(\frac{\nu_0}{kr_*}\right) \left[ Ei\left(-\frac{\nu}{kr_*}\right) - Ei\left(-\frac{a}{kr_*}\right) \right] \right\}. \quad (12)$$

Здесь  $Ei(-x)$  – интегральная показательная функция, таблицы которой есть в [9], [10] и других изданиях по специальным функциям.

В пределе, когда  $r_* \rightarrow \infty$ :

$$\exp\left(\frac{\nu_0}{kr_*}\right) \sim 1 + \frac{\nu_0}{kr_*}; \quad Ei\left(-\frac{\nu}{kr_*}\right) - Ei\left(-\frac{a}{kr_*}\right) \sim \ln \frac{\nu}{a} + \frac{a-\nu}{kr_*},$$

из (12) следует, что

$$\nu_{II}(\nu) = \frac{g}{k^2} \left( \nu_0 \ln \frac{\nu}{a} + a - \nu \right).$$

Такое выражение  $\nu_{II}(\nu)$  использовали для расчётов в [4] и [5], а формула (12) обобщает его.

Решение краевой задачи (10), (11) ищем в виде [4]:

$$\nu_k(\nu, t) = \operatorname{Re} \left[ w(\nu) e^{-i\omega t} \right] = \operatorname{Re} w(\nu) \cos(\omega t) + \operatorname{Im} w(\nu) \sin(\omega t), \quad (13)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , а комплексная функция  $w(\nu)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 w}{d\nu^2} + \left( \frac{1}{kr_*} + \frac{1}{\nu} \right) \frac{dw}{d\nu} + \frac{i\omega}{\nu k^2} w = 0 \quad (14)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(a) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(a) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\nu} \operatorname{Re} w(\nu) \Big|_{\nu=\nu_0} = \frac{d}{d\nu} \operatorname{Im} w(\nu) \Big|_{\nu=\nu_0} = 0.$$

Ведём вспомогательную функцию  $w_1(\nu)$  по формуле

$$w(\nu) = \nu^{-1/2} \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right) w_1(\nu). \quad (16)$$

Подставив (16) в (14), получаем:

$$\frac{d^2 w_1}{d\nu^2} + \frac{1}{k^2} \left( \frac{i\omega - k(2r_*)^{-1}}{\nu} + \frac{k^2}{4\nu^2} - \frac{1}{4r_*^2} \right) w_1 = 0. \quad (17)$$

Переходим к новой переменной  $\xi = \nu(kr_*)^{-1}$ , выражение (17) преобразуем в каноническое уравнение Уиттекера:

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \right) w_1 = 0, \quad (18)$$



где  $\alpha = i\omega r_* k^{-1} - 0,5$ .

Его фундаментальным решением являются функции  $M_{\alpha,0}(\xi)$  и  $W_{\alpha,0}(\xi)$ . В связи с тем, что первый индекс  $\alpha$  у функций Уиттекера комплексный, возникают затруднения с вычислением их значений.

Чтобы обойти их, вместо точного решения уравнения (18) будем использовать его приближённое решение.

Обычно, в производственных условиях сепарирования зерновых смесей значения расчётных параметров таковы, что

$$\frac{1}{4} \ll \left| \frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \right|.$$

Поэтому заменим (18) на упрощённое уравнение

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} + \left( \frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} \right) w_1 = 0,$$

фундаментальное решение которого выражается через функции Бесселя и Хенкеля комплексного аргумента:  $J_0(2\sqrt{\alpha\xi})$  и  $H_0^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi})$ . Используя эти функции и выражение (16), получаем приближённое решение уравнения (14):

$$w(v) = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \left[ (c_1 + ic_2) J_0(2\sqrt{\alpha\xi}) + (c_3 + ic_4) H_0^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \right], \quad (19)$$

с точностью до произвольных постоянных  $c_j, j = \overline{1;4}$ .

Учитывая, что  $\omega r_* k^{-1} \gg 0,5$ , при выделении вещественной и мнимой частей цилиндрических функций заменим их приращения, а также приращения квадратного корня в аргументах, соответствующими дифференциалами. Тогда

$$J_0(2\sqrt{\alpha\xi}) \approx f_1(v) - if_2(v); \quad H_0^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \approx -f_3(v) + if_4(v);$$

$$f_1(v) = ber(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}ber_1(\beta\sqrt{v}); \quad \beta = \frac{2\sqrt{\omega}}{k};$$

$$f_2(v) = bei(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}bei_1(\beta\sqrt{v}); \quad \gamma = \frac{1}{2r_*\sqrt{\omega}};$$

$$f_3(v) = her(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}her_1(\beta\sqrt{v});$$

$$f_4(v) = hei(\beta\sqrt{v}) - \gamma\sqrt{v}hei_1(\beta\sqrt{v});$$

$ber_s(x), bei_s(x), her_s(x), hei_s(x)$  – функции Кельвина, ( $s = \overline{0;1}$ ).

Используя (19) и (20) находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w(\nu) &= \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right) \left[ c_1 f_1(\nu) + c_2 f_2(\nu) - c_3 f_3(\nu) - c_4 f_4(\nu) \right]; \\ \operatorname{Im} w(\nu) &= \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right) \left[ -c_1 f_2(\nu) + c_2 f_1(\nu) + c_3 f_4(\nu) - c_4 f_3(\nu) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив (21) и их производные по  $\nu$  в (15), получаем систему четырёх уравнений, из которой находим  $c_j$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} \exp\left(\frac{a}{2kr_*}\right) \left[ f_1(a) - \delta_1 f_3(a) + \delta_2 f_4(a) \right]; \\ c_2 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} \exp\left(\frac{a}{2kr_*}\right) \left[ f_2(a) - \delta_1 f_4(a) - \delta_2 f_3(a) \right]; \\ c_3 &= \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = -\delta_2 c_1 + \delta_1 c_2; \\ \Delta &= \left[ f_1(a) - \delta_1 f_3(a) + \delta_2 f_4(a) \right]^2 + \left[ f_2(a) - \delta_1 f_4(a) + \delta_2 f_3(a) \right]^2; \\ \delta_1 &= \frac{F_1 F_3 + F_2 F_4}{F_3^2 + F_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{F_2 F_3 - F_1 F_4}{F_3^2 + F_4^2}; \\ F_1 &= \operatorname{ber}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[ \zeta \operatorname{ber}'_1(\zeta) + \operatorname{ber}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_1(\nu_0); \\ F_2 &= \operatorname{bei}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[ \zeta \operatorname{bei}'_1(\zeta) + \operatorname{bei}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_2(\nu_0); \\ F_3 &= \operatorname{her}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[ \zeta \operatorname{her}'_1(\zeta) + \operatorname{her}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_3(\nu_0); \\ F_4 &= \operatorname{hei}'(\zeta) - \frac{\gamma}{\beta} \left[ \zeta \operatorname{hei}'_1(\zeta) + \operatorname{hei}_1(\zeta) \right] - \frac{\lambda}{r_*} f_4(\nu_0); \\ \zeta &= \beta \sqrt{\nu_0}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{\nu_0}}{k\beta}. \end{aligned}$$

Штрихом обозначены производные функции Кельвина.

Определив множители  $c_j$ ,  $j = 1, 4$ , после подстановки (12), (13) и (21) в (7), получаем формулу скорости движения смеси по решетке

$$\begin{aligned} u(\nu, t) &= \frac{gr_*}{k} \left\{ \ln \frac{a}{\nu} + \exp\left(\frac{\nu_0}{kr_*}\right) \left[ \operatorname{Ei}\left(-\frac{\nu}{kr_*}\right) - \operatorname{Ei}\left(-\frac{a}{kr_*}\right) \right] \right\} + \\ &+ \left[ A_1(\nu) \cos(\omega t) + A_2(\nu) \sin(\omega t) \right] \exp\left(-\frac{\nu}{2kr_*}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

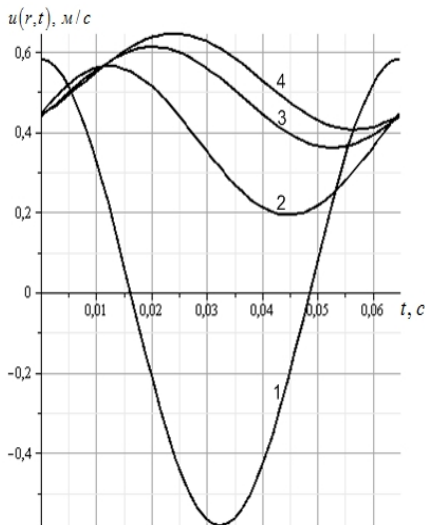


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных  $r : 1,2,3,4 -$   
 $= R; R_0 + \frac{h}{2}; R_0 + \frac{h}{4}; R_0$ .

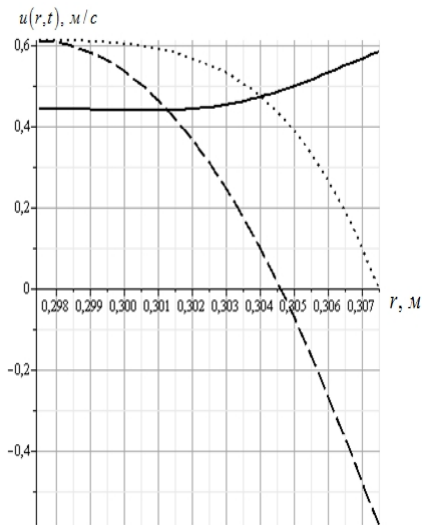


Рисунок 3 – Профили скорости потока зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени:  
 $— t = 0; \dots t = \frac{\pi}{2\omega}; - - - t = \frac{\pi}{\omega}$ .

Здесь  $A_1(v) = c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v) - c_3 f_3(v) - c_4 f_4(v);$   
 $A_2(v) = -c_1 f_2(v) + c_2 f_1(v) + c_3 f_4(v) - c_4 f_3(v).$

Если устремить  $r_* \rightarrow \infty$ , то в пределе:  $\gamma = 0$ ,

$$f_1(v) = ber(\beta\sqrt{v});$$

$$f_2(v) = bei(\beta\sqrt{v}); f_3(v) = her(\beta\sqrt{v}); f_4(v) = hei(\beta\sqrt{v});$$

$$F_1 = ber'(\zeta); F_2 = bei'(\zeta); F_3 = her'(\zeta); F_4 = hei'(\zeta).$$

Вычисление  $c_j$  сводится к формулам, которые опубликованы в [6], а решение (22) переходит в известное решение для скорости линейно-неоднородного плоского слоя.

Итак, формула (22) позволяет проводить расчёты колебаний скорости неоднородного кольцевого слоя в цилиндрическом виброрешете.

Проанализируем численные результаты. Для проведения расчётов при-

нимаем:  $A^* = 0,006$  м;  $\rho = 750$  кг/м<sup>3</sup>;  $R = 0,3075$  м;  $h = 0,01$  м;

$k = \frac{0,77 - 0,55}{h\rho}$  м/с;  $\omega = 96,9$  с<sup>-1</sup>, что соответствует зерновой смеси пшеницы.

Результаты компьютерных расчётов по формуле (22) графически представлены на рис. 2-3. На рис. 2 показано, что скорости и амплитуды её колебаний существенно изменяются с удалением от поверхности виброрешета.

Распределение скорости по толщине движущегося слоя также меняется с течением времени согласно графикам на рис. 3. Изменение профиля скорости во времени способствует сегрегации зерновой смеси.

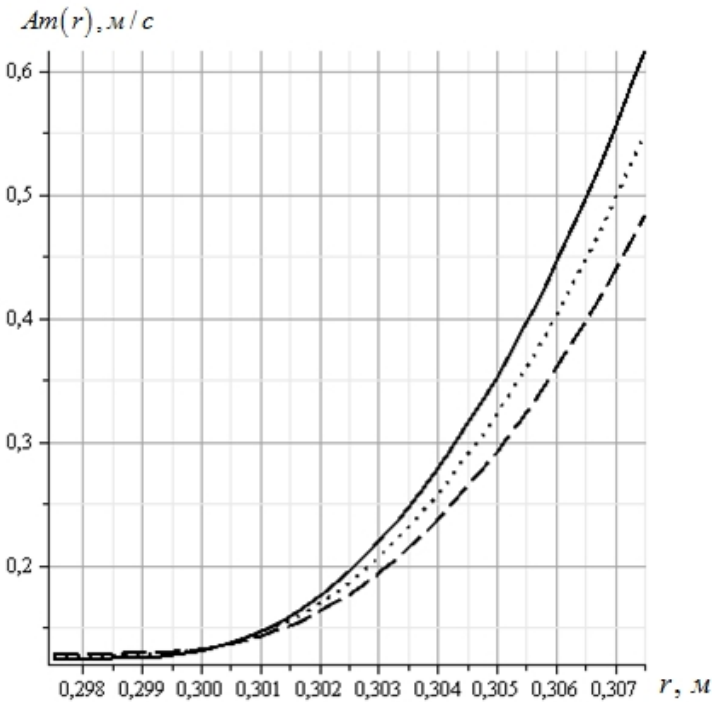


Рисунок 4 – Зависимость  $Am(r) = \sqrt{A_1^2(v) + A_2^2(v)}$  при различных значениях  $\omega$  :

—  $\omega = 96,9$  с<sup>-1</sup>; .....  $\omega = 86,4$  с<sup>-1</sup>; - - -  $\omega = 75,9$  с<sup>-1</sup>.

На рис. 4 представлены графики изменения амплитуд колебаний скорости для трёх значений  $\omega$ . Амплитуды колебаний наибольшие у поверхности

виброрешета и наименьшие – у свободной поверхности слоя. С увеличением  $\omega$  усиливается затухание вибрационного поля по толщине кольцевого слоя зерновой смеси.

**Выводы.** Изложенная теория позволяет проводить параметрический анализ влияния различных факторов на скорость потока зерна и её колебания в вертикальном цилиндрическом решете. Адекватность математической модели можно повысить путём идентификации значения коэффициента  $k$  по замеренным значениям вибровязкости смеси у свободной поверхности зернового слоя и у поверхности виброрешета.

**Список литературы:** 1. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Кинетика сепарируемых зерновых смесей в вертикальных цилиндрических виброрешётах // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. – № 1 (61). – С. 177-181. 2. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете // Динаміка та міцність машин: Вісник НТУ «ХПІ». – 2010. – Вып. 69. – С. 100-108. 3. Тищенко Л.Н., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В. Исследование закономерностей вибровязкости зерновой смеси при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решётами // Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вып. 88. – С. 34-44. 4. Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В. и др. Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харків: “Міськдрук”, 2010. – 360 с. 5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости потока зерна на решете виброцентробежного сепаратора // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва та переробки сільськогосподарської продукції. – Харків: ХНТУСГ, 2010. – Вып. 103. – С. 95-104. 6. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Математическая модель движения зерновых смесей по вертикальным решётам виброцентробежных сепараторов // Тракторы и сельськохозяйственные машины. – 2011. – №7. – С. 35-38. 7. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Приближённый расчёт колебаний зерновой смеси в цилиндрическом виброрешете // Вісник ХНТУСГ: Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні. – Харків: ХНТУСГ, 2011. – Вып. 115. – С. 48-54. 8. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гармонические колебания сепарируемой зерновой смеси при неравномерном вращении цилиндрического решета // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні Український міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2011. – №45. – С. 135-140. 9. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 10. Янке Е., Энде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редколлегию 15.12.2011

**О.Б. ПАНАМАРЬОВА**, аспірант, НТУ «ХП»

## **УЗАГАЛЬНЕНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ГІДРОАГРЕГАТУ ЖИВЛЕННЯ ГІДРОСИСТЕМ**

Розроблено методику розрахунку і проектування гідроагрегату живлення гідросистем, яка дозволяє покращити показники технічного рівня та підвищити ефективність його експлуатації.

Разработана методика расчета и проектирования гидроагрегата питания гидросистем, позволяющая улучшить показатели технического уровня и повысить эффективность его эксплуатации.

The method of calculation and design of hydraulic power unit of system, which improves the performance of technical level and efficiency of its operation.

**Вступ.** Проектування гідроагрегатів живлення гідросистем є складною і багатокритеріальною задачею. Перед розробниками ставиться мета розв'язання комплексу питань: проектування схемного рішення гідроагрегату живлення, вибору типів, взаємного розташування його елементів-складників та математичної моделі робочого процесу з визначенням крайових умов, розрахунку його конструктивних параметрів.

Технічний рівень і подальший розвиток гідроагрегатів живлення гідросистем пов'язано з покращенням його динамічних характеристик. На стадії проектування фактором, який підвищує ефективність розрахунку, є використання комп'ютерів. Це дозволяє значно скоротити час проектування, формалізувати значну частину розрахункових задач і провести оптимізацію розрахункових параметрів гідроагрегату живлення. Для цього необхідно розробити математичну модель робочого процесу гідроагрегату живлення, яка є основою для його проектування.

**Аналіз останніх досліджень.** Проведений огляд літературних джерел показав, що більшість розробників приділяє увагу принципам проектування, показникам технічного рівня окремих гідроелементів, які входять до складу гідроагрегату живлення. Частіш всього, дослідження методів розрахунку основних параметрів проводиться для насоса, як одного з головних елементів гідроагрегату живлення. Але неможливо нехтувати впливом інших гідроелементів, які входять до складу гідроагрегату живлення, на його вихідні параметри.

Дослідженню питань проектування гідроагрегатів живлення гідросистем технологічного обладнання і машин присвячено достатньо велика кількість робіт таких вчених, як: Т. М. Башти, В. К. Свешнікова, М. С. Гаминіна, Ю. А. Данилова, К. Л. Навроцького, Д. М. Попова, Г. А. Авруніна та інших. Аналіз літературних джерел дає підставу виділити ряд особливостей, без вра-

хування яких неможливо отримати гідроагрегат живлення зі значним поліпшенням статичних і динамічних характеристик, показників технічного рівня, а саме:

- нестационарних гідродинамічних процесів, які протікають в окремих елементах-складниках гідроагрегату живлення і взаємовпливають на його власні процеси;

- впливу параметрів навантаження виконавчого механізму гідросистеми технологічної машини на кожному переході циклограми роботи на вихідні параметри гідроагрегату живлення;

- параметрів робочої рідини, змінних в процесі функціонування гідроагрегату живлення (наприклад, газовмісту при розрахунку густини, в'язкості);

- проведення теплового розрахунку гідроагрегату живлення з урахуванням поелементного теплоутворення і тепловиділення, компонування та співвідношення сторін гідравлічного баку;

- обґрунтування методів для дослідження математичних моделей гідроагрегатів живлення;

- багатокритеріальний підхід до питань підвищення показників технічного рівня гідроагрегату живлення та покращення його динамічних характеристик.

На підставі проведеного аналізу літературних джерел, можна зробити висновок, що відсутня узагальнена методика розрахунку гідроагрегату живлення, яка б об'єднувала існуючі методики розрахунку гідроелементів, тих що входять до його складу. Розглянуті питання в основному базуються на лінійаризованих математичних моделях, які зазвичай застосовують при розгляданні та аналізу слідкуючих гідроагрегатів. Проте, якщо гідроагрегат живлення працює циклічно, то параметри змінюються в достатньо великому діапазоні, і застосування лінійаризованих математичних моделей стає неправомірним.

**Мета статті.** Метою даної статті є розробка узагальненої методики розрахунку і проектування гідроагрегату живлення.

**Методика розрахунку і проектування гідроагрегату живлення.** Розроблено узагальнену методику розрахунку та проектування гідроагрегату живлення, структурна схема якої наведена на рис. Її подано у вигляді загальної послідовності розрахунку конструктивних та робочих параметрів елементів гідроагрегату живлення з наступною перевіркою динамічних властивостей та показників технічного рівня. Розроблена методика містить вихідні дані та усі операції, які необхідно виконати в процесі розрахунку та проектування, з вказанням взаємозв'язки між ними.

На першому етапі проводять аналіз схемних рішень гідроагрегату живлення гідросистеми машини, визначають його схемну реалізацію, обирають

типи насоса, розподільчої та регулюючої апаратури, розміри трубопроводів. Це виконують згідно методики, яка наведена в роботі [1] та ін.

На другому етапі проводять попередній розрахунок робочих параметрів насоса, запобіжного клапана з осциляцією, гідророзподільника, дільника потоку, гасителя пульсацій, гідрозамку, трубопроводу, визначають тип робочої рідини і її робочі параметри (густина, газовміст) [2]. Враховують, що усі елементи гідроагрегату живлення повинні мати стандартні з'єднувальні розміри та працювати у визначеному діапазоні тиску. Виконують аналіз вимог щодо статичних та динамічних характеристик елементів гідроагрегату живлення. При проведенні цього етапу використовують дані, отримані при аналітичних дослідженнях параметрів гідроагрегату живлення, які більш детально описані в статті [3].

Також, під час виконання цього етапу визначають межу квазістаціонарності гідродинамічних процесів, що враховують при обчисленні коефіцієнтів витрат та втрат, гідравлічного опору, сил тертя.

На третьому етапі проводять розрахунок статичних та динамічних характеристик гідроагрегату живлення [3], використовуючи математичні моделі робочих процесів насоса, запобіжного клапана з осциляцією, гідророзподільника, гідрозамку, дільника потоку, гасителя пульсацій, трубопроводів, виконавчих механізмів (ці математичні моделі більш детально розглянуті в статтях [4, 5]), та їх відповідність заданим. Виконують вибір гідравлічного баку, проводять тепловий розрахунок гідроагрегату живлення. Якщо отримані результати розрахунків не задовольняють заданим умовам, то корегують конструктивні та робочі параметри гідроагрегату живлення.

На четвертому етапі, користуючись математичною моделлю робочого процесу гідроагрегату живлення, проводять оптимізацію його конструктивних і робочих параметрів.

П'ятий етап передбачає перевірку вимог щодо статичних і динамічних характеристик гідроагрегату живлення, показників його технічного рівня. Також проводять розрахунок надійності та визначають економічну ефективність гідроагрегату живлення [6]. Відзначимо, що цей крок етапу не вказано на схемі. Якщо ці вимоги виконані не в повному обсязі, то повертаються до виконання оптимізації параметрів гідроагрегату живлення та проводять її повторно.

На шостому етапі переходять до розробки схемного рішення гідроагрегату живлення [7], креслень його загального вигляду та гідроелементів-складників, при виконанні вимог попереднього етапу проектування.

При проектуванні гідроагрегату живлення технологічних машин необхідно враховувати наступні особливості:

– для усунення резонансу в гідроагрегаті живлення необхідно, щоб частота власних коливань трубопроводу, яка залежить від тиску в ньому та швидкості робочої рідини в трубопроводі і розраховується за методикою роботи [8], не співпадала з частотою вимушених коливань. Для цього необхідно



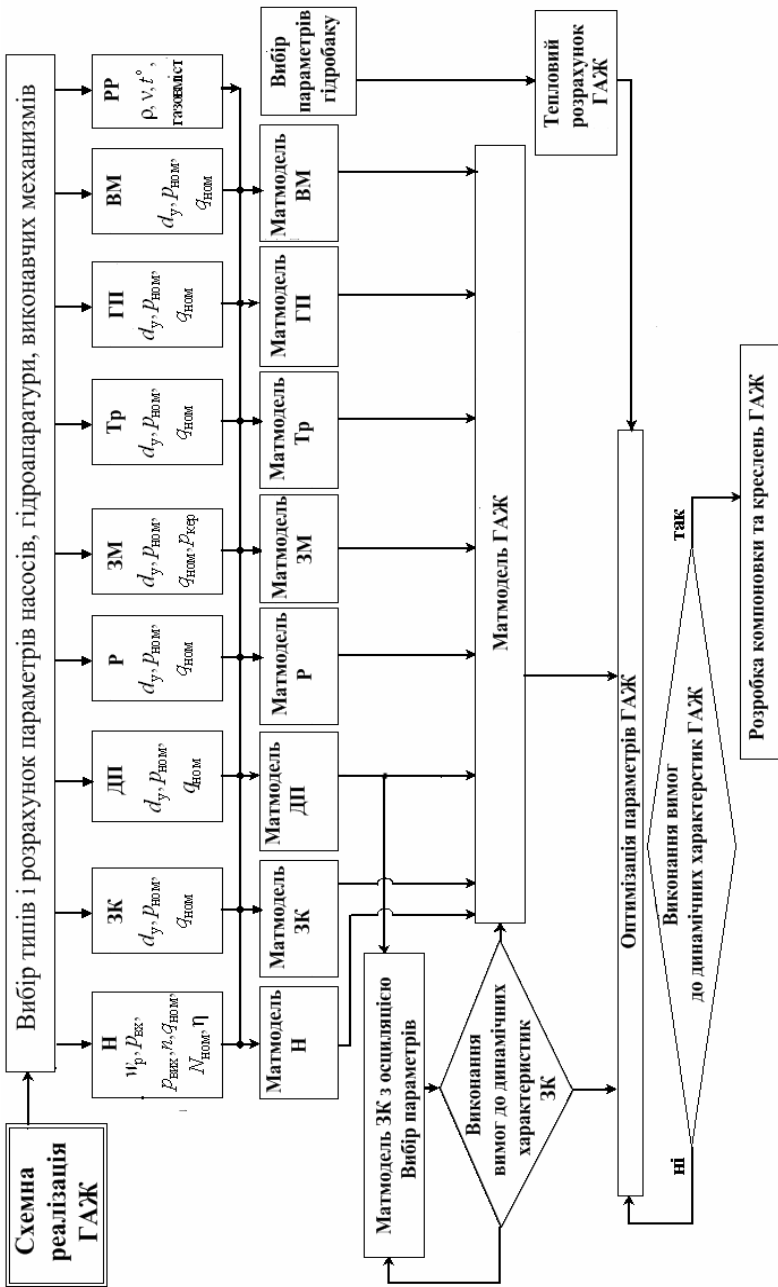


Рисунок – Структурна схема методики розрахунку і проектування гідроагрегату живлення гідросистем:  
 ГАЖ – гідроагрегат живлення; Н – насос; ДП – дільник потоку; ЗК – запобіжний клапан; Р – гідророзподільник;  
 ЗМ – гідрозамок; Тр – трубопровід; ГП – гасник пульсацій; ВМ – виконавчі механізми; РР – робоча рідина.

використовувати блочно-модульний монтаж гідроапаратури, а кріплення трубопроводу повинно бути достатньо жорстким;

– для запобігання виникнення гідравлічних ударів та руйнування трубопроводів у гідроагрегаті живлення необхідно:

- не допускати великих швидкостей робочої рідини в трубопроводах та з'єднувальних каналах;
- обмежити час спрацювання розподільчих пристроїв;
- з урахуванням часу спрацювання розподільчих пристроїв вибирати відповідну довжину каналу чи трубопроводу;
- встановлювати у гідроагрегаті живлення гасителі пульсацій тиску.

**Висновки.** Розроблено узагальнену інженерну методику розрахунку та проектування гідроагрегату живлення, яка суттєво доповнює існуючі та, на відміну від них, враховує змінні характеристики робочої рідини, нестационарні гідродинамічні процеси в гідроапаратах, які входять до складу гідроагрегату живлення, що дозволяє отримати його робочі характеристики, адекватні натурному зразку. Завдяки чому покращуються показники його технічного рівня та підвищується ефективність експлуатації. Розроблена методика дозволяє прискорити створення і впровадження нових і модернізованих зразків гідроагрегату живлення.

**Список літератури:** 1. *Навроцкий К.Л.* Теория и проектирование гидро- и пневмоприводов: учебник для вузов / К.Л. Навроцкий. – М.: Машиностроение, 1991. –384 с. 2. *Андренко П.М.* Визначення параметрів робочої рідини в процесі функціонування об'ємного гідроагрегата / П.М. Андренко, О.Б. Панамарьова // К.: Промислова гідравліка і пневматика. – 2011. №1 (31). – С. 99 – 102. 3. *Андренко П.М.* Дослідження динамічних характеристик гідроагрегату живлення / П.М. Андренко, В.В. Клітної, О.Б. Панамарьова // Вестник ХНАДУ. – 2007 – Вып. 38. – С. 221–224. 4. *Андренко П.М.* Математична модель малогабаритного гідроагрегату живлення/ П.М. Андренко, В.В. Клітної, О.Б. Панамарьова // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – 2007. –№ 3(109). Ч. 2. – С. 13-17. 5. *Панамарьова О.Б.* Математична модель підйомного механізму стрілочного крану з автоматичним регулятором швидкості / О.Б. Панамарьова // Вісник НТУ “ХП”. – 2008. – № 4. – С. 46 – 52. 6. *Панамарьова О.Б.* Надійність гідросистеми підйомного механізму стрілочного крану з автоматичним регулятором швидкості та її вплив на економічну ефективність / О.Б. Панамарьова // Вісник НТУ “ХП”. – 2008. – № 23. – С. 32 – 42. 7. *Панамарьова О.Б.* Підвищення ефективності гідроагрегату живлення гідросистем, шляхом удосконалення його схеми / О.Б. Панамарьова // Вісник НТУ “ХП”. – 2009. – № 37. – С. 62 – 65.

*Надійшла до редколегії 16.01.2012*

**А.О. ПРОХОРЕНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГІДРАВЛІЧНО РОЗВАНТАЖЕНОГО КЕРУЮЧОГО КЛАПАНА ДЛЯ ДИЗЕЛЬНОЇ ПАЛИВНОЇ АПАРАТУРИ

Показано, що при роботі “гідравлічно зрівноваженого” грибоквого клапана виникає діюча на нього неуврівноважена додаткова гідравлічна сила. Для розрахунку додаткової гідравлічної сили запропонований метод визначення значення тиску, що діє в каналі між клапаном і його сідлом. Розроблено конструкцію “розвантаженого” клапана.

Показано, что при работе “гидравлически уравновешенного” грибоквого клапана возникает действующая на него неувравновешенная дополнительная гидравлическая сила. Для расчета дополнительной гидравлической силы предложен метод определения значения давления, действующего в канале между клапаном и его седлом. Разработана конструкция “разгруженного” клапана.

It is shown that when using "hydraulically balanced" arises fungal valve acting on it more unbalanced hydraulic force. For the calculation of additional hydraulic force proposed a method for determining the value of the pressure of the live in the channel between the valve and its seat. The design "unloaded" valve.

**Вступ.** Швидкодіючий керуючий клапан є найбільш складним елементом насос-форсунок і ПНВТ паливної апаратури (ПА) з електромагнітним керуванням подачею палива дизелів [1]. Найчастіше, при розробці такої ПА дослідники зіштовхуються із проблемою недостатнього зусилля електромагніта для закриття керуючого клапана. Причому, як правило, форсування електромагніта по силі струму не дає позитивного результату.

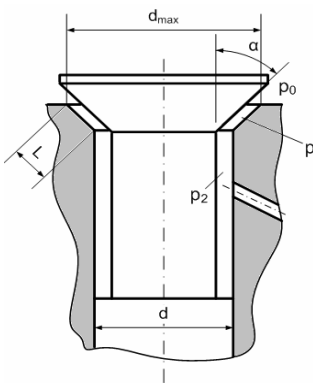


Рисунок 1 – Грибоквий клапан.

**Постановка задачі.** На наш погляд, проблема полягає у використанні як керуючого клапана “грибоквої” конструкції, зображеного на рис. 1. Уважається, що такий клапан гідравлічно зрівноважений від сил тиску палива [1]. Однак, це не цілком так.

Неуврівноваженість виникає після відкриття клапана й викликана впливом змінного тиску на горизонтальну проекцію площі бічної поверхні конуса клапана, рівну площі фаски сідла (у вигляді кільця):

$$F_{кол} = \pi \frac{d_{max}^2 - d^2}{4}. \quad (1)$$

Очевидно, що максимальний діаметр фаски сідла клапана  $d_{\max} = d + 2L \sin \alpha$ , і тоді

$$F_{\text{кол}} = \frac{\pi}{4} (d^2 + 4Ld \sin \alpha + 4L^2 \sin^2 \alpha - d^2) = \pi L \sin \alpha (d + L \sin \alpha), \quad (2)$$

де  $L$  – ширина фаски запірного конуса,  $\alpha$  – кут фаски запірного конуса,  $d$  – діаметр напрямного клапана.

Прийнявши, що  $l$  – поточна незалежна координата (поточна ширина фаски), можна записати зміну площі кільця по координаті  $l$ :

$$F = \pi l \sin \alpha (d + l \sin \alpha). \quad (3)$$

На зазначену змінну площу діє змінний тиск, що створює додаткову гідравлічну силу. Її можна визначити в такий спосіб:

$$P = \text{sign}(x) \int_0^{F_{\text{кол}}} (p - p_0) dF. \quad (4)$$

Тут  $p$  – тиск, що діє в каналі,  $x$  – поточний хід клапана. Функція  $\text{sign}(x)$  означає, що дія сили має місце тільки при піднятому клапані.

Для переходу до інтеграла по незалежній змінній  $l$  продиференціюємо вираз (3):

$$\frac{dF}{dl} = \pi \sin \alpha (d + 2l \sin \alpha). \quad (5)$$

Тоді вираз (4) перетвориться до виду:

$$P = \text{sign}(x) \pi \sin \alpha \int_0^L [(p - p_0)(d + 2l \sin \alpha)] dl. \quad (6)$$

Для обчислення інтеграла (6) необхідно визначити закон розподілу тиску по незалежній координаті  $l$  у каналі між клапаном і його сідлом, тобто знайти функцію  $p = f(l)$ .

Безсумнівно, що для оцінки розподілу тиску палива в каналі прохідного перетину клапана необхідно розглядати ламінарний двовимірний плин рідини в щілині, що розширюється, з урахуванням прикордонного шару [1]. Але для інженерних гідродинамічних розрахунків у першому наближенні можна прийняти, що зміна тиску підкоряється лінійному закону  $p = p_0 + A(p_2 - p_0)l$ , де  $A$  – коефіцієнт пропорційності (якась константа).

Підставимо прийнятий закон  $p = f(l)$  у вираз (6) та знайдемо отриманий визначений інтеграл аналітичним методом:

$$P = \text{sign}(x) \pi \sin \alpha \int_0^L [(p_0 + A(p_2 - p_0)l - p_0)(d + 2l \sin \alpha)] dl = \pi A(p_2 - p_0) \times \sin \alpha \left[ d \int_0^L dl + 2 \sin \alpha \int_0^L l^2 dl \right] \text{sign}(x) = \pi A(p_2 - p_0) l^2 \sin \alpha \left[ \frac{d}{2} + \frac{2}{3} l \sin \alpha \right] \text{sign}(x). \quad (7)$$

Приклад розрахунку додаткової гідравлічної сили за виразом (7) у клапані діаметром  $d = 10$  мм при тиску  $p_2 = 100$  МПа й підйомі  $x = 0,25$  мм залежно від довжини каналу (фаски)  $L$  і кута запірного конуса  $\alpha$  наведений на рис. 2. Як видно з рисунка, ця сила має значну величину, порівнянну, а в деяких випадках перевищуючу силу електромагніта, що й викликає порушення нормальної роботи вузла.

Більш точно закон зміни тиску в каналі прохідного перетину грибоквого клапана можна визначити виходячи з наступних міркувань.

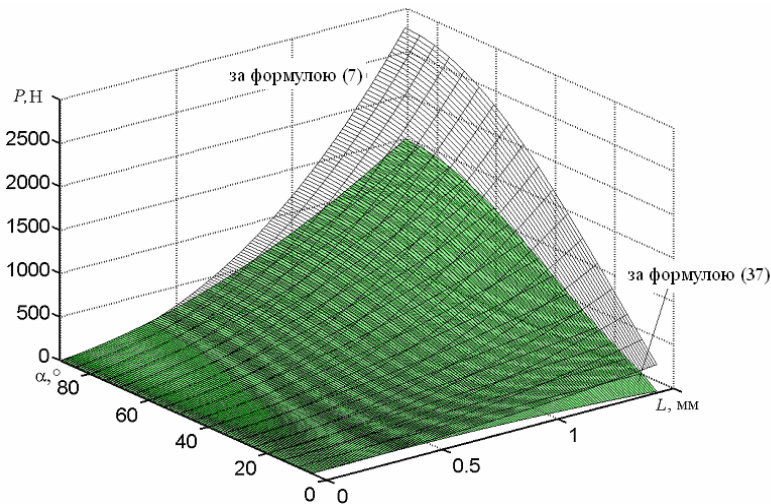


Рисунок 2 – Додаткова гідравлічна сила.

**Математична модель.** Вважаємо, що додаткова гідравлічна сила визначається як:

$$P = \left( \int_0^{F_{\text{кол}}} (p - p_0) dF + P_{mp} \right) \text{sign}(x). \quad (8)$$

$P_{mp}$  – сила, що виникає в результаті дії дотичних напружень грузлого тертя на поверхню запірного конуса грибка клапана.

Зневажаючи гідравлічним напором запишемо закон Бернуллі для прохі-

дною перетину каналу [2]:

$$p = p_2 - \frac{\rho v_2^2}{2} - \Delta h_{\Sigma}. \quad (9)$$

Тут  $p$  й  $p_2$  – відповідно тиск палива в каналі й у порожнині клапана (потенційна енергія системи), див. рис. 1;  $\rho v_2^2/2$  – кінетична енергія системи (динамічний напір);  $\Delta h_{\Sigma}$  – сумарні втрати енергії (напору), пов'язані з перетіканням палива в каналі.

Виходячи із принципу лінійної суперпозиції, розглянемо визначення складових рівняння (9) окремо.

1. Вважаємо, що масова витрата палива через канал між клапаном і сідлом і далі до виходу із цього каналу не змінюється ( $\dot{m} = const$ ), і визначається мінімальною площею його прохідного перетину  $f_{\min}$ :

$$\dot{m} = \mu f_{\min} \sqrt{2\rho_2(p_2 - p_0)}. \quad (10)$$

Внаслідок стискальності палива, що має місце, його об'ємна витрата по довжині каналу змінна і визначається поточним значенням щільності палива:

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho}. \quad (11)$$

Тоді, з огляду на те, що  $v = Q/f$ , де  $f$  – поточна по довжині площа прохідного перетину клапана, можемо записати:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho Q^2}{2f^2} = \frac{\rho Q \dot{m}}{2f^2 \rho} = \frac{Q \dot{m}}{2f^2}. \quad (12)$$

Зміна об'ємної витрати по довжині каналу пов'язана зі зміною тиску рівнянням:

$$\frac{dQ}{dl} = \alpha_{сж} Q \frac{dp}{dl}, \quad (13)$$

звідки

$$\frac{dQ}{Q} = \alpha_{сж} dp. \quad (14)$$

Тут  $\alpha_{сж}$  – коефіцієнт стискальності палива.

Рішенням отриманого диференціального рівняння (14) є залежність:

$$Q = e^{\alpha_{сж} p + C} = C_1 e^{\alpha_{сж} p}. \quad (15)$$

Константа інтегрування  $C_1$  визначається з умов на вході в канал, де тиск  $p = p_2$ , а щільність  $\rho = \rho_2$  з рівняння (11). При цьому:

$$\rho_2 = \frac{\dot{m}}{Q} = \frac{\dot{m}}{C_1 e^{\alpha_{сж} p_2}}, \quad (16)$$

або

$$C_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 e^{\alpha_{сж} p_2}} . \quad (17)$$

З урахуванням отриманого рішення (17) і формули (10) для визначення  $\dot{m}$  вираз (12) запишеться у вигляді:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\mu^2 f_{\min}^2 2\rho_2 (p_2 - p_0)}{2f^2 \rho_2} e^{\alpha_{сж}(p-p_2)} = \mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0) e^{\alpha_{сж}(p-p_2)} . \quad (18)$$

В отриманому виразі множник  $e^{\alpha_{сж}(p-p_2)}$  по фізичному змісті є виправленням на зміну кінетичної енергії системи внаслідок стискальності реальної рідини. Для дизельного палива в розглянутих умовах коефіцієнт стискальності має величину  $\alpha_{сж} \approx 800 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$ . При діючих тисках  $p_2 = 100 \text{ МПа}$  й  $p = 0,25 \text{ МПа}$ , значення цього множника складе величину  $e^{\alpha_{сж}(p-p_2)} \approx 0,92$ , що відповідає помилці 8% при обчисленні динамічного напору рідини без обліку її стискальності.

Множник  $e^{\alpha_{сж}(p-p_2)}$  може бути розкладений у степеневий ряд  $e^{\alpha_{сж}(p-p_2)} = 1 + \alpha_{сж}(p-p_2) + \alpha_{сж}^2 (p-p_2)^2 / 4 + \dots$ , а через малість величини показника ступеня, в увагу можуть бути прийняті тільки перші два члени цього ряду. У такий спосіб:

$$e^{\alpha_{сж}(p-p_2)} \approx 1 + \alpha_{сж}(p-p_2) . \quad (19)$$

З урахуванням вищевикладеного, зміна тиску в каналі внаслідок переходу від гідростатичного напору в динамічний описується виразом:

$$p = p_2 - \frac{\mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)}{1 + \alpha \mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)} . \quad (20)$$

Поточна по довжині площа прохідного перетину клапана  $f$  визначається з геометрії клапана:

$$f = \pi (d + 2l \sin \alpha + x \sin \alpha \cos \alpha) x \sin \alpha . \quad (21)$$

При  $l = 0$  маємо  $f = f_{\min} = \pi (d + x \sin \alpha \cos \alpha) x \sin \alpha$  – мінімальну площу прохідного перетину каналу.

2. Сумарні енергетичні втрати (втрати напору) у каналі можуть бути визначені в такий спосіб [2]:

$$\Delta h_{\Sigma} = \Delta h_{\text{вх}} + \Delta h_{\text{диф}} + \Delta h_l , \quad (22)$$

де  $\Delta h_{\text{вх}}$  – втрати напору на вході в канал (раптове звуження),  $\Delta h_{\text{диф}}$  – втрати, викликані дифузійністю прохідного перетину,  $\Delta h_l$  – втрати напору в потоці

палива по довжині каналу.

Якщо зневажити першою ( $\Delta h_{ex}$ ) і другою ( $\Delta h_{ouf}$ ) складовими виразу (22) через їхню малість, то

$$\Delta h_{\Sigma} \approx \Delta h_l. \quad (23)$$

Коректність такого спрощення обґрунтовується залежністю  $\Delta h_{ex}$  й  $\Delta h_{ouf}$  від швидкості потоку [2], що у розглянутих перетинах невелика, і, крім того, також мало виражена дифузорність каналу (кут конуса дифузора становить приблизно  $4^\circ$ ).

У вузькій щілині каналу між клапаном і сідлом має місце ламінарна течія [3, 4], а значить втрати напору по довжині:

$$\Delta h_l = \lambda \frac{l}{H} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (24)$$

де  $\lambda = 24/Re$  – коефіцієнт опору руху грузлої рідини в щілині між площинами [4, стор. 380],  $H = x \cdot \sin \alpha$  – висота каналу,  $Re$  – число Рейнольдса.

У свою чергу,  $Re = vH/\nu$ , де  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини. В'язкість палива залежить від тиску. Цю залежність можна представити виразом [5]:

$$\nu = \nu_0 (1 + \alpha' (p - p_0)), \quad (25)$$

де  $\nu_0$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості при атмосферному тиску,  $\alpha' \approx 0,001$  – коефіцієнт пропорційності [5].

Для спрощення наступних виразів із достатньою точністю можна прийняти, що в каналі паливо має середню в'язкість, яка характеризується постійним усередненим коефіцієнтом кінематичної в'язкості:

$$\nu_{cp} = \nu_0 \left( 1 + \frac{\alpha'}{2} (p_2 - p_0) \right). \quad (26)$$

Тоді вираз (24) можна записати у вигляді:

$$\Delta h_l = \frac{24\nu_{cp}}{vx \sin \alpha} \frac{l}{x \sin \alpha} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{12\nu_{cp} l \rho v}{x^2 \sin^2 \alpha}. \quad (27)$$

Оскільки, як було показано вище, з урахуванням стискальності швидкість потоку в довільному перетині каналу (виходячи з рівнянь (18) і (19)) має вигляд:

$$v = \mu \frac{f_{\min}}{f} \sqrt{\frac{2/\rho (p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{сж} \mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)}}, \quad (28)$$

то отримуємо остаточний вираз для визначення гідравлічних втрат по довжині каналу:



$$\Delta h_l = \Delta h_\Sigma = \frac{12\nu_{cp}\mu}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{f_{\min}}{f} l \sqrt{\frac{2\rho(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{сжс}\mu^2 \left(\frac{f_{\min}}{f}\right)^2 (p_2 - p_0)}}. \quad (29)$$

3. Дотичні напруження біля стінки каналу  $\tau_0$  залежать від в'язкості  $\nu$ , швидкості рідини  $\nu$ , висоти каналу  $H$  і можуть бути визначені за формулою [3, стор. 31]:

$$\tau_0 = \frac{8\nu_{cp}\rho\nu}{H}. \quad (30)$$

Після підстановки наведених вище виразів для швидкості потоку  $\nu$  (28) і висоти каналу  $H$  (24) отримаємо:

$$\tau_0 = \frac{8\nu_{cp}\mu}{x \sin \alpha} \frac{f_{\min}}{f} \sqrt{\frac{2\rho(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{сжс}\mu^2 \left(\frac{f_{\min}}{f}\right)^2 (p_2 - p_0)}}. \quad (31)$$

Сила тертя, викликана дією дотичних напружень на площу бічної поверхні усіченого конуса грибка клапана й спрямована уздовж цієї поверхні, дорівнює:

$$P'_{mp} = \bar{\tau}_0 S_{бок} = \bar{\tau}_0 F_{кол} / \sin \alpha. \quad (32)$$

Тут  $S_{бок} = F_{кол} / \sin \alpha$  – площа бічної поверхні усіченого конуса грибка клапана,  $\bar{\tau}_0$  – середнє по довжині каналу значення дотичних напружень.

Піднімальною ж є вертикальна проекція цієї сили:

$$P_{mp} = P'_{mp} \cos \alpha. \quad (33)$$

З огляду на це, з виразів (32) і (33) отримуємо рівняння для сили  $P_{mp}$ , яка входить у вираз (8):

$$P_{mp} = \bar{\tau}_0 F_{кол} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (34)$$

Таким чином, можна ввести величину умовного середнього тиску в каналі, викликаного грузлим тертям, рівну:

$$\bar{P}_{mp} = \frac{P_{mp}}{F_{кол}} = \bar{\tau}_0 \operatorname{ctg} \alpha, \quad (35)$$

а з обліком (31) перейти від середніх до діючих величин:

$$P_{mp} = \tau_0 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{8\nu_{cp}\mu \cos \alpha}{x \sin^2 \alpha} \frac{f_{\min}}{f} \sqrt{\frac{2\rho(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{сжс}\mu^2 \left(\frac{f_{\min}}{f}\right)^2 (p_2 - p_0)}}. \quad (36)$$

З огляду на отримані вирази (28), (34) і (36), вираз (8) можна записати у

вигляді:

$$P = \text{sign}(x) \int_0^F (p + p_{mp} - p_0) dF. \quad (37)$$

Скориставшись виразами (20), (29) і (36), зміну поточного тиску, з урахуванням дії дотичних напружень, по довжині каналу можна визначити в такий спосіб:

$$p + p_{mp} = p_2 - \frac{\mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{\text{сж}} \mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)} - \frac{12\nu_{\text{ср}} \mu}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{f_{\min}}{f} l \times$$

$$\sqrt{\frac{2\rho(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{\text{сж}} \mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)}} + \frac{8\nu_{\text{ср}} \mu \cos \alpha}{x \sin^2 \alpha} \frac{f_{\min}}{f} \times \quad (38)$$

$$\sqrt{\frac{2\rho(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_{\text{сж}} \mu^2 \left( \frac{f_{\min}}{f} \right)^2 (p_2 - p_0)}}.$$

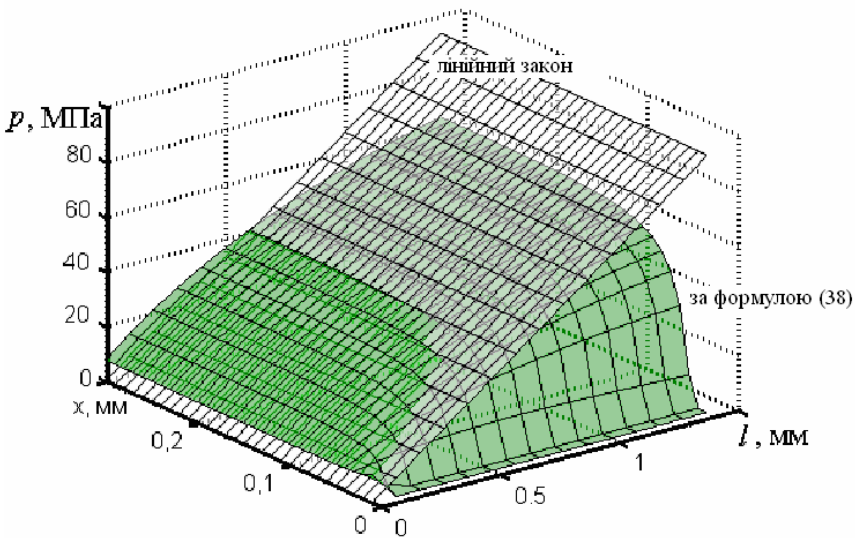


Рисунок 3 – Розподіл тиску в каналі клапана.

**Аналіз отриманих результатів.** Аналіз виразу (38) показує, що  $p$  є функцією 8-ми змінних, серед яких основні  $l$ ,  $\alpha$  і  $x$ . Причому, у цьому випадку  $l$  може інтерпретуватися і як поточна координата по довжині каналу, і як повна довжина фаски. Також, легко помітити, що при відсутності в'язкості вираз (38) приймає вид виразу (20).

Залежність розподілу тиску по довжині каналу від ходу клапана діаметром  $d = 10$  мм при тиску в клапані  $p_2 = 100$  МПа, куті запірного конуса  $\alpha = 45^\circ$  і в'язкості палива  $\lambda = 6$  мм<sup>2</sup>/с наведена на рис. 3. Результати розрахунку показують, що величина тиску по довжині каналу залежить від підйому клапана, тобто ширини щілини в прохідному перетині. Особливо істотно це проявляється при малих значеннях  $x$  – менш 0,015 мм. Такий факт має тривіальне пояснення – вплив в'язкості палива.

Розподіл тиску в каналі між сідлом і клапаном при його підйомі  $x = 0,25$  мм наведено на рис. 4. Розрахунок виконаний при умовах, наведених вище. Аналіз результатів цього розрахунку показує, що дійсний закон зміни тиску в каналі значно відрізняється від прийнятого в першому наближенні лінійного закону. Різниця між кривими, отриманими по формулах (20) і (9) – втрати напору по довжині каналу – становить близько 30% від отриманого значення тиску. У той же час, величина умовного тиску тертя  $p_{mp}$  становить близько 1% від отриманого результату, що проілюстровано на рис. 5. Таким чином, у принципі, при проведенні інженерних розрахунків досліджуваного вузла, цю складову –  $p_{mp}$  – можна не враховувати.

Рівняння (37) з урахуванням рівнянь (38) і (5) може бути вирішене аналітично. Однак, через громіздкість одержуваних виразів рішення простіше застосувати чисельне інтегрування цього рівняння з малим кроком по незалежній координаті  $l$ .

Приклад розрахунку додаткової гідравлічної сили за формулами (7), (37), (38) у клапані діаметром  $d = 10$  мм при тиску  $p_2 = 100$  МПа, в'язкості палива  $\lambda = 6$  мм<sup>2</sup>/с і підйомі клапана  $x = 0,25$  мм залежно від довжини каналу (фаски)  $l$  і кута запірного конуса  $\alpha$  наведений на рис. 2. Розрахунок виконаний чисельним методом трапецій із кроком інтегрування  $\Delta l = 0,01$  мм. Як видно із зіставлення даних на рис. 2, значення сили, отримані за виразом (7), є завищеними в порівнянні зі значеннями, отриманими з використанням рівняння (38). Однак у діапазоні малих  $L$  відрізняються незначно. Виходячи з отриманих результатів, можна укласти, що відповідно до логічного закону достатньої підстави при виконанні інженерних гідродинамічних розрахунків можна користуватися більше простою формулою (7), яка дає трохи завищені значення.

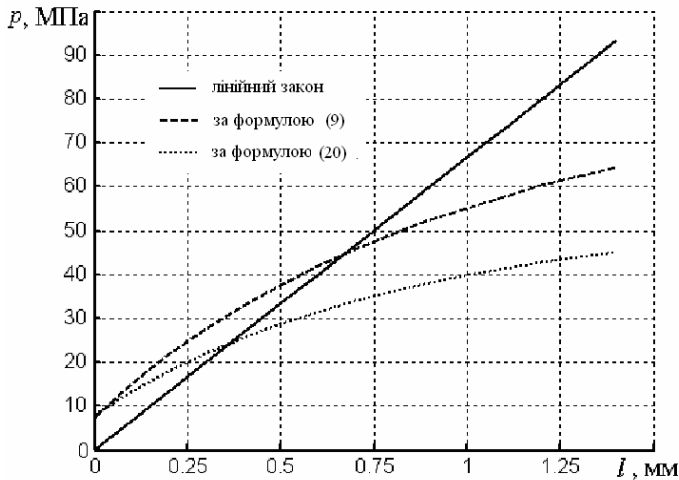


Рисунок 4 – Розподіл тиску в каналі клапана при  $x = 0,25$  мм.

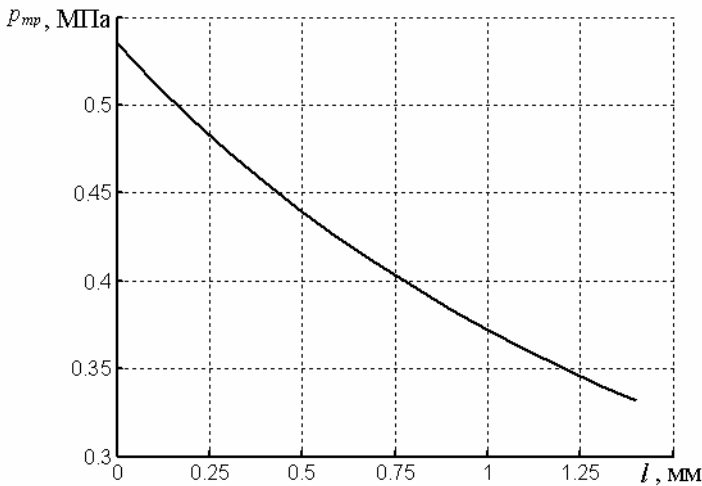


Рисунок 5 – Розподіл умовного тиску тертя в каналі при  $x = 0,25$  мм.

Окремий вплив  $L$  й  $\alpha$  на силу  $P$  проілюстроване на рис. 6. Розрахунок виконаний при тих же вихідних даних. З рисунка видно, що збільшення як довжини каналу  $L$  так і кута запірного конуса  $\alpha$  приводить до значного зростання додаткової гідравлічної сили. І, навпаки, для зменшення впливу цієї сили у вузлі варто прагнути до зменшення кута й довжини фаски клапана.

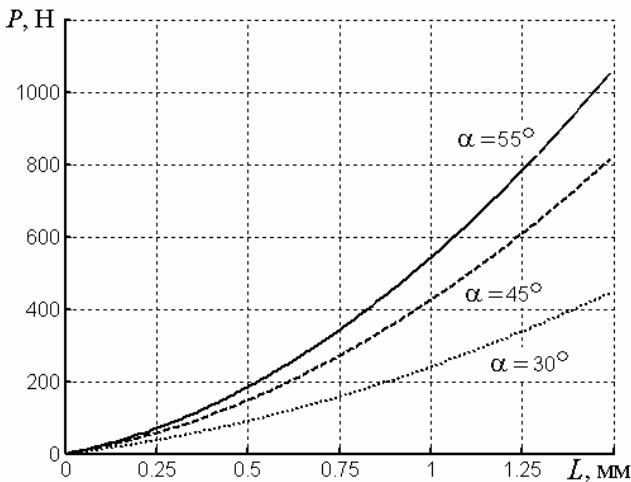


Рисунок 6 – Залежність додаткової гідравлічної сили від довжини фаски.

“Граничні” конструкції керуючого клапана, засновані на отриманих аналітичних виводах, наведені на рис. 7. Природно, ці конструкції є непрацевдатними. Так, конструкція на рис. 7,а має загублений хід клапана й не забезпечує надійного ущільнення при посадці. Конструкція клапана на рис. 7,б буде мати знос гострої запірної кромки сідла й значний знос бічної поверхні конуса клапана, що призведе до втрати його гідроцильності в закритому стані.

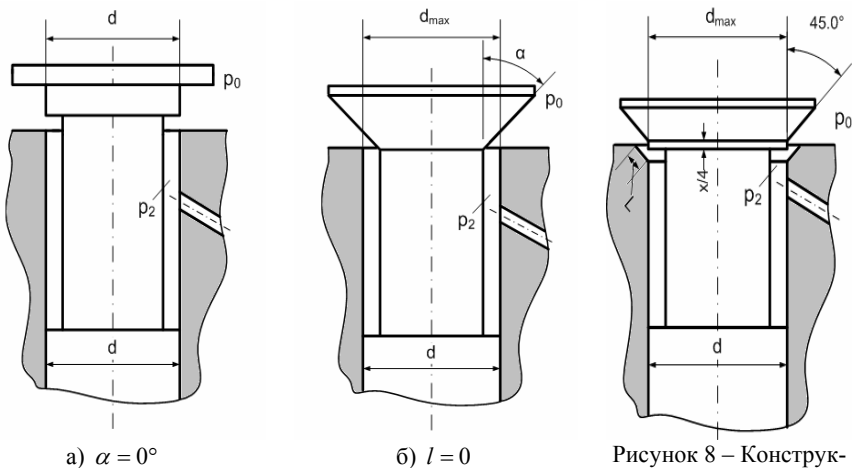


Рисунок 7 – “Граничні” конструкції клапана.

Рисунок 8 – Конструкція “розвантаженого” клапана.

Альтернативою є конструкція клапана, наведена на рис. 8. Його особливості: наявність циліндричного ущільнюючого пояска під конусом клапана, що створює умову  $L = 0$  й, отже,  $F_{кол} = 0$ , а кут фаски  $45^\circ$  забезпечує достатню гідросільність у закритому стані. Причому, циліндричний поясок повинен мати малу висоту (до чверті ходу клапана) для мінімізації втрат ходу клапана при його відкритті. Зменшення ж мінімальної площі прохідного перетину, що має місце при цьому, можна компенсувати незначним збільшенням діаметра клапана.

Таким чином, використання керуючого клапана описаної конструкції в ТА з електромагнітним керуванням дозволить значно зменшити гідравлічну силу, що діє на запірний конус при відкритому клапані, що забезпечить працездатність вузла при невисоких значеннях сили електромагніта.

### **Висновки.**

1. При відриві від сідла “гідравлічно врівноваженого” грибоквого клапана виникає діюча на нього додаткова гідравлічна сила. Ця сила є невривно-важеною, досягає значної величини й порушує нормальну роботу даного вузла (перешкоджає закриттю клапана).

2. Величина цієї додаткової гідравлічної сили залежить від площі запірного конуса, а також від закону розподілу тиску в каналі між конусом клапана й сідлом. Для розрахунку додаткової гідравлічної сили отримані аналітичні залежності закону розподілу тиску, що діє в каналі між сідлом і замикаючим конусом клапана.

3. Аналіз впливу конструктивних параметрів клапана на величину виникаючої в ньому додаткової гідравлічної сили показав, що для її зниження необхідно зменшувати ширину фаски сідла. Запропоновано конструкцію “розвантаженого” клапана, що дозволяє значно знизити вплив додаткової гідравлічної сили.

**Список літератури:** 1. Грехов Л.В., Иващенко Н.А., Марков В.А. Топливная аппаратура и системы управления дизелей // Учебник для вузов. - М.: Легион-Автодата, 2004. – 344 с. 2. Справочник по гидравлике / Под ред. В.А.Большакова.- 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Вища шк. Головне изд-во, 1984. – 343 с. 3. Розенблит Г.Б., Григорьев А.Л., Зонов В.Д. Анализ причин и определение условий, обеспечивающих герметичность плоского дифференциального клапана форсунки // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. - Харьков: ХГПУ, 1999. - Вып.58. – С.82-91. 4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, перераб.- М.: Наука, 1978. – 736 с. 5. Дубовкин Н.Ф. Справочник по углеводородным топливам и их продуктам сгорания. М.: Госэнергоиздат, 1962. – 288 с.

*Надійшла до редколегії 14.12.2011*

**О.С. РЕДЧЕНКО**, асистент, НТУ «ХПІ»

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ У КРИВИХ ШВИДКІСНИХ ПОТЯГІВ З КУЗОВАМИ, ЩО НАХИЛЯЮТЬСЯ**

Розроблені математичні моделі, що дозволяють визначити потрібний кут нахилу кузова та досліджувати коливання надресорної будови екіпажу під дією відцентрової сили інерції у кривих.

Разработаны математические модели, которые позволяют определить необходимый угол наклона кузова и исследовать колебания наддресорного строения экипажа под действием центробежной силы инерции в кривых.

The mathematical models which allow determining necessary tilt angle of the car body and allow investigating the oscillations of the train over leaf suspension under inertial centrifugal force at the curve.

**Вступ та постановка задачі.** Державна програма по впровадженню на залізницях України швидкісного руху передбачає зростання швидкості пасажирських потягів до 200 км/год на лініях загальною протяжністю 2600 км [1]. В рамках цієї програми розглядається використання потягів зарубіжного виробництва з кузовами, що нахилиються. Введення в експлуатацію таких потягів дозволяє збільшити швидкість руху на існуючих залізничних лініях, які характеризуються великою кількістю кривих малих радіусів, що підтверджується позитивним досвідом низки європейських держав [2,3]. В нашій країні досвіду проектування та експлуатації таких потягів фактично не має, що, напевне, і призвело до відсутності у науково-технічній періодиці робіт, присвячених теоретичним дослідженням руху потягів з кузовами, що нахилиються, у кривих ділянках колії.

Тому, метою даної статті є створення математичних моделей що дозволяють визначити потрібний кут нахилу кузова та досліджувати коливання надресорної будови під дією відцентрової сили інерції.

**Математична модель для визначення потрібного кута нахилу кузова та відцентрової сили інерції.** Рух екіпажу у кривій характеризується виникненням відцентрової сили інерції, величина якої залежить від швидкості руху та радіусу кривої. Вона визначається формулою:

$$F_c = m \cdot V^2 / R, \quad (1)$$

де  $m$  – маса екіпажу;  $V$  – швидкість руху;  $R$  – радіус кривої.

Для зменшення її впливу на екіпаж у кривих зовнішню рейку встановлюють із підвищенням відносно внутрішньої рейки. При організації швидкісного руху на існуючих лініях підвищення зовнішньої рейки стає недостатньо для компенсації дії відцентрової сили інерції. Це призводить до необхідності примусово «довертати» кузов усередину кривої на певний кут,

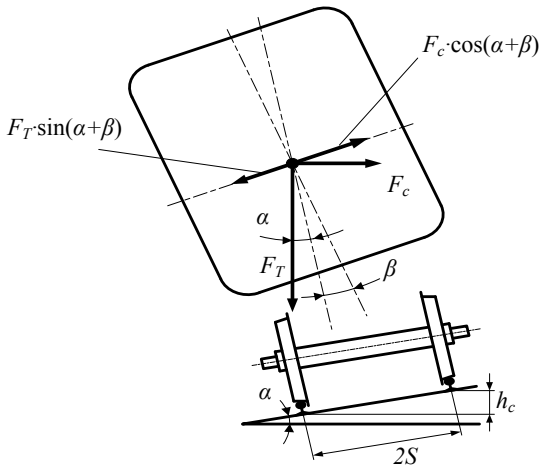


Рисунок 1 – Схема діючих на екіпаж сил при русі у кривій.

що значно розширює діапазон швидкостей руху по кривим малого радіусу. Значення цього додаткового кута повороту кузова може бути знайдено із наступних міркувань (див. рис. 1).

Кузов вагона при русі по кривій повернутий на певний кут усередину кривої. Цей кут представляє собою суму кутів від підвищення зовнішньої рейки –  $\alpha$  та додаткового кута повороту кузова –  $\beta$ . Повна компенсація відцентрової сили інерції настане при рівності проєкцій відцентрової сили інерції і сили тяжіння на вісь, паралельну площині підлоги вагона:

$$F_c \cdot \cos(\alpha + \beta) = F_T \cdot \sin(\alpha + \beta). \quad (2)$$

Підставляючи (1) у (2), та враховуючи, що  $F_T = m \cdot g$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння, отримаємо:

$$m \cdot V^2 / R \cdot \cos(\alpha + \beta) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha + \beta). \quad (3)$$

Далі із (3) отримуємо вираз для додаткового кута нахилу кузова:

$$\beta = \arctan(V^2 / (R \cdot g)) - \alpha. \quad (4)$$

Як видно на рис. 1, величина кута підвищення зовнішньої рейки складає:

$$\alpha = \arctan(h_c / 2S), \quad (5)$$

де  $h_c$  – підвищення зовнішньої рейки;  $2S$  – ширина колії по кругам катання.

У кривих улаштування шляху має три характерні ділянки: вхід – рух екіпажу по першій перехідній кривій зі змінним радіусом, який зменшується від безкінечного до радіусу  $R$  кругової кривої; рух екіпажу по круговій кривій із



постійним радіусом; вихід – рух екіпажу по другій перехідній кривій зі змінним радіусом, який збільшується від радіусу  $R$  кругової кривої до нескінченності. Розбивка перехідних кривих виконується по радіоїдальній спіралі.

При русі у кривій змінюється і величина підвищення зовнішньої рейки. Так, при вході у криву ця величина змінюється від нуля до підвищення  $h_c$  у круговій кривій. При виході – плавно зменшується від значення  $h_c$  до нуля.

У перехідній кривій величина миттєвого радіусу визначається формулою:

$$r(t) = A/L_t(t), \quad (6)$$

де  $A = R \cdot L_t$  – параметр кривої,  $L_t$  – довжина перехідної кривої,  $L_t(t)$  – точна координата екіпажу у перехідній кривій.

Після диференціювання по часу виразів (4) і (6) отримаємо:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} - \frac{V^2 (dr/dt)}{g \cdot r^2(t) \cdot \left(1 + V^4 / \left(g^2 \cdot r^2(t)\right)\right)}. \quad (7)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{R \cdot L_t \cdot V}{L_t^2(t)}. \quad (8)$$

Величина  $d\alpha/dt$  являє собою швидкість зміни кута підвищення зовнішньої рейки при русі по перехідній кривій і може бути визначена наступним чином.

Час руху по перехідній кривій становитиме  $t_t = L_t/V$ . При цьому швидкість зміни величини підвищення дорівнюватиме  $V_h = h_c/t_t$ . Таким чином, отримаємо:

$$V_h = \frac{dh_c}{dt} = \frac{h_c \cdot V}{L_t}. \quad (9)$$

Замінюючи у виразі (9)  $h_c$  величиною кута підвищення (5), маємо:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\arctan(h_c/2S) \cdot V}{L_t}. \quad (10)$$

Об'єднуючи (1), (7), (8) і (10), та враховуючи, що  $dL_t/dt = V$ , оскільки швидкість руху постійна, отримаємо систему алгебро-диференціальних рівнянь, що встановлюють зв'язок між координатою потяга у кривій, величиною миттєвого радіуса, кутом підвищення зовнішньої рейки та кутом додаткового нахилу кузова. Також ця система рівнянь дозволяє визначити миттєві значення відцентрової сили інерції, що діє на екіпаж.

Слід зауважити, що система рівнянь (11) відповідає руху потяга по першій перехідній кривій. При русі потяга по круговій кривій величини радіусу кривої, підвищення зовнішньої рейки та додаткового кута нахилу кузова ва-

гона матимуть незмінні значення. Тому праві частини відповідних виразів будуть дорівнювати нулю. При русі по другій перехідній кривій структура системи рівнянь (11) не зміниться. Відмінність полягатиме тільки у знаках правих частин виразів радіусу кривої та підвищення зовнішньої рейки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL_t}{dt} = V; \\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\arctan\left(\frac{h_c}{2S}\right) \cdot V}{L_t}; \\ \frac{dr}{dt} = -\frac{R \cdot L_t \cdot V}{L^2(t)}; \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} - \frac{V^2 (dr/dt)}{g \cdot r^2(t) \cdot \left(1 + \frac{V^4}{g^2 \cdot r^2(t)}\right)}; \\ F_c = \frac{m \cdot V^2}{r(t)}. \end{array} \right. \quad (11)$$

**Математична модель для опису коливань кузова.** Як показує практика проектування і експлуатації потягів з кузовами, що нахилиються, повна компенсація відцентрової сили інерції є небажаною з точки зору негативного впливу на самопочуття пасажирів [4]. Тому, у більшості випадків ступінь компенсації обмежується величиною 0,7...0,75 від повної компенсації. Наявність некомпенсованої відцентрової сили інерції призводить до деформації елементів ресорного підвішування та поперечних зв'язків екіпажа.

Для встановлення зв'язку між величиною відцентрової сили інерції і деформаціями пружних елементів екіпажної частини використовується розрахункова схема, яка приведена на рис. 2. Прийнята розрахункова схема має чотири ступені свободи: поперечне переміщення кузова  $y_k$ , поперечне переміщення рами візка  $y_t$ , повороти кузова  $\theta_k$  і рами візка  $\theta_t$  навколо вісі, що проходить через їх центри мас.

Побудова математичної моделі базується на наступних допущеннях [5,6]:

- система, що розглядається, складається із абсолютно жорстких тіл, які з'єднані пружними елементами, паралельно до яких включені гасителі коливань;
- у коливаннях приймають участь половина маси кузова і маса візка;
- коливання по всім ступеням свободи розглядаються як малі;
- нерівності шляху у плані і вертикальні нерівності не розглядаються.

У якості вихідних обрані рівняння Лагранжа другого порядку [7].

Кінетична енергія системи:

$$T = 1/2 \cdot m_k \cdot \dot{y}_k^2 + 1/2 \cdot J_k \cdot \dot{\theta}_k^2 + 1/2 \cdot m_t \cdot \dot{y}_t^2 + 1/2 \cdot J_t \cdot \dot{\theta}_t^2, \quad (12)$$

де  $m_k, J_k$  – половина маси і моменту інерції кузова,  $m_t, J_t$  – маса і момент інерції візка.

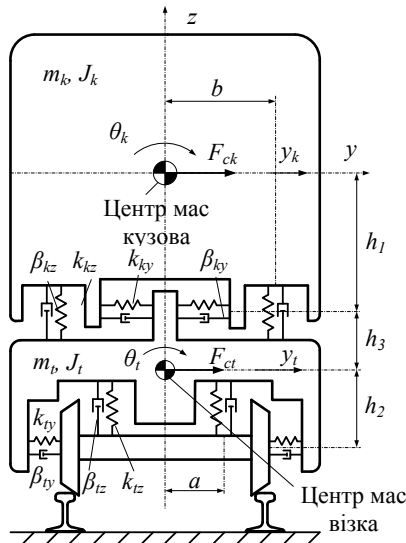


Рисунок 2 – Розрахункова схема.

Потенційна енергія системи:

$$\begin{aligned} \Pi = & 1/2 \cdot 2 \cdot k_{ty} \cdot (y_t + h_2 \cdot \theta_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t)^2 + \\ & + 1/2 \cdot 2 \cdot k_{tz} \cdot (a \cdot \theta_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot k_{kz} \cdot (b \cdot \theta_k - a \cdot \theta_t)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $k_{tz}, k_{kz}$  – коефіцієнти жорсткості ресорного підвішування першої та другої ступені;  $k_{ty}, k_{ky}$  – коефіцієнти жорсткості поперечних зв'язків екіпажу;  $h_1$  – відстань від центра мас кузова до вісі поперечних зв'язків кузова;  $h_2$  – відстань від центра мас візка до поперечних зв'язків візка;  $h_3$  – відстань від центра мас візка до вісі поперечних зв'язків кузова;  $a$  – відстань від вертикальної вісі кузова до вісі ресорного підвішування першої ступені;  $b$  – відстань від вісі кузова до вісі ресорного підвішування другої ступені.

Оскільки гасителі коливань включені паралельно пружним елементам, вираз дисипативної енергії має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi = & 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{ty} \cdot (\dot{y}_t + h_2 \cdot \dot{\theta}_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t)^2 + \\ & + 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{tz} \cdot (a \cdot \dot{\theta}_t)^2 + 1/2 \cdot 2 \cdot \beta_{kz} \cdot (b \cdot \dot{\theta}_k - a \cdot \dot{\theta}_t)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $\beta_{tz}, \beta_{kz}$  – коефіцієнти демпфування ресорного підвішування першої та другої ступені;  $\beta_{ty}, \beta_{ky}$  – коефіцієнти демпфування поперечних зв'язків екіпажу.

Після виконання необхідних операцій диференціювання згідно вихідних рівнянь, отримаємо у розгорнутому вигляді систему рівнянь, яка дозволить визначити деформації пружних елементів екіпажної частини під дією непогашеної відцентрової сили інерції при русі по кривій:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_k \cdot \ddot{y}_k + 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) + \\ + 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) = \frac{m_k \cdot V}{r(t)}; \\ m_t \cdot \ddot{y}_t + 2 \cdot k_{ty} \cdot (y_t + h_2 \cdot \theta_t) - 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) + \\ + 2 \cdot \beta_{ty} \cdot (\dot{y}_t + h_2 \cdot \dot{\theta}_t) - 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) = \frac{m_t \cdot V}{r(t)}; \\ I_k \cdot \ddot{\theta}_k - 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) \cdot h_1 + 2 \cdot k_{kz} \cdot (b \cdot \theta_k - a \cdot \theta_t) \cdot b - \\ - 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) \cdot h_1 + 2 \cdot \beta_{kz} \cdot (b \cdot \dot{\theta}_k - a \cdot \dot{\theta}_t) \cdot b = 0; \\ I_t \cdot \ddot{\theta}_t + 2 \cdot k_{ty} \cdot (y_t + h_2 \cdot \theta_t) \cdot h_2 - 2 \cdot k_{ky} \cdot (y_k - y_t - h_1 \cdot \theta_k - h_3 \cdot \theta_t) \cdot h_3 + \\ + 2 \cdot k_{tz} \cdot a^2 \cdot \theta_t - 2 \cdot k_{kz} \cdot (b \cdot \theta_k - a \cdot \theta_t) \cdot a + 2 \cdot \beta_{ty} \cdot (\dot{y}_t + h_2 \cdot \dot{\theta}_t) \cdot h_2 - \\ - 2 \cdot \beta_{ky} \cdot (\dot{y}_k - \dot{y}_t - h_1 \cdot \dot{\theta}_k - h_3 \cdot \dot{\theta}_t) \cdot h_3 + 2 \cdot \beta_{tz} \cdot a^2 \cdot \dot{\theta}_t - \\ - 2 \cdot \beta_{kz} \cdot (b \cdot \dot{\theta}_k - a \cdot \dot{\theta}_t) \cdot a = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Об'єднуючи систему рівнянь (15) з системою (11), отримаємо математичну модель, що описує поведінку екіпажної частини при русі у кривій і встановлює зв'язок між параметрами шляху, величиною непогашеної відцентрової сили інерції і деформаціями пружних елементів екіпажної частини.

**Висновки.** Отримано математичні моделі, які дозволяють визначати потрібний кут нахилу кузова та досліджувати коливання надресорної будови під дією відцентрової сили інерції. Отримано об'єднану математичну модель що встановлює зв'язок між величиною відцентрової сили інерції, переміщеннями елементів екіпажної частини, параметрами шляху та рухомого складу. Ця модель може бути використана при виборі параметрів систем електромеханічного перетворення енергії для випробувальних каткових стендів.

**Список літератури:** 1. Корниченко В.В., Омеляненко В.И. Высокоскоростной электрический транспорт. Мировой опыт. – Харьков, НТУ «ХПИ», 2007. – 159 с. 2. Омеляненко В.И., Кривякин Г.В., Якунин Д.И., Редченко Е.С. Поезда с наклоняемыми кузовами для скоростного пассажирского движения. // Локомотив-информ. – 2008. - №5. – С.12-17. 3. Persson R. Tilting trains. Description and analysis of the present situation. Literature study. – Stockholm, КТН. – 2006. – 94 p. 4. Forstberg J. Ride comfort and motion sickness in tilting trains: Doctoral thesis. – Stockholm, КТН. – 2000. – p. 5. Масшев В.Г., Ананьев А.Д. Математическая модель движения по рельсовому пути колесно-моторного блока с упругим опорно-центровым приводом // Вестник ХПИ. Локомотивостроение. – Харьков, 1997. – №134., Вып.3. – С.8-13. 6. Блейхер А.И., Куценко С.М. неустановившееся движение локомотива в кривой с неровностями в плане // Вестник ХПИ. Локомотивостроение. – Харьков, 1972. – №65., Вып.2. – С.12-24. 7. Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Часть вторая. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 484с.

Надійшла до редколегії 15.12.11

**М.С. СТЕПАНОВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**С.М. ШЕВЧЕНКО**, ассистент, НТУ «ХПИ»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЫ РЕЗАНИЯ ПРИ ШЛИФОВАНИИ В РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

У статті проведено аналіз існуючих математичних залежностей для визначення сили різання у різних умовах шліфування. Отримано математичну модель сили різання круглого зовнішнього шліфування периферією кола.

В статье проведен анализ существующих математических зависимостей для определения силы резания при разных условиях шлифования. Получена математическая модель силы резания круглого наружного шлифования периферией круга.

In the article the analysis of mathematical dependences is conducted for opreleniya force of cutting at different terms of polishing. The mathematical model of force of cutting of the round outward polishing of periphery circle is got.

**Вступление.** Значение действующей при шлифовании силы резания является важнейшей характеристикой процесса обработки. От нее зависят условия работы станка, инструмента и уровень точности получаемой детали. В настоящее время существует достаточно большое количество схем шлифования [1]. Определение силы резания в каждом конкретном случае требует привлечения значительных дополнительных ресурсов.

**Анализ математических моделей.** Можно выделить несколько подходов для определения силы резания при разных условиях шлифования. Первый, при котором в результате проведения эксперимента и его обработки получают зависимость вида [2], приводит к уравнению регрессии

$$P_z = C_p \cdot V_3^x \cdot S_{np}^y \cdot t^z \quad (1)$$

где  $C_p, x, y, z$  – постоянные эмпирические коэффициенты  $V_3, S_{np}, t$  – режимные параметры обработки.

Известны более сложные зависимости для определения составляющих силы резания, которые могут учитывать и ряд других параметров [3]:

$$P_z = C_p \cdot V_3^{x_1} \cdot S_{np.n}^{y_1} \cdot t_{np.n}^{z_1} \cdot V_{вр}^\alpha \cdot H_k^{\beta_1} \cdot z_k^{\gamma_1} \cdot k_{сож} \quad (2)$$

где  $V_{вр}$  – врезная подача;  $S_{np.n}$  и  $t_{np.n}$  – скорость продольной подачи и глубина правки;  $H_k$  и  $z_k$  – параметры, характеризующие шлифовальный круг;  $k_{сож}$  – коэффициент, учитывающий давление подачи смазывающе-охлаждающей жидкости (СОЖ) в зону резания.

Второй подход предполагает определение составляющей силы резания расчетным путем (с учетом экспериментального определения эффективной мощности шлифования) и имеет целью определения зависимости вида [4]:

$$P_z = \frac{N_{эф}}{V_k}, \quad (3)$$

где  $V_k$  – скорость шлифовального круга.

Эффективную мощность шлифования определяют для различных условий обработки по формуле [5]:

$$N_{эф} = C_N \cdot V_3^r \cdot t^x \cdot S^y \cdot d_3^q, \quad (4)$$

где  $d_3$  и  $V_3$  – диаметр, и скорость заготовки, а  $C_N, r, x, y, q$  – эмпирические коэффициенты.

При третьем подходе составляющую силы резания определяют, основываясь на производительности обработки. В качестве примера можно привести известную математическую модель силы резания, учитывающую номинальную производительность  $Q_0$ , жесткость технологической системы  $C$ , удельную интенсивность съема  $\lambda$  [6]:

$$P_z = \frac{K_{ш} \cdot Q_0}{\lambda + (l_{dem} \cdot V_\delta) / C}, \quad (5)$$

где  $K_{ш}$  – коэффициент шлифования.

Четвертый подход предполагает учет силы резания от единичного зерна с дальнейшим переходом к массовому резанию всеми зернами, расположенными в пределах площади контакта инструмента и заготовки.

Для определения силы резания, создаваемой единичным зерном, известны ряд моделей, которые учитывают параметры зерна, свойства обрабатываемого материала и так далее.

Среди них можно выделить *модель С.Н. Корчака* [7], которая предполагает находить тангенциальную составляющую силы резания  $P_z$  сложением двух сил – тангенциальной силы от напряжений пластического сдвига  $P_{z_S}$  и тангенциальной силы от трения металла о заднюю грань  $P_{z_{mp}}$ .

Математическая запись выше изложенного имеет вид:

$$P_z^I = P_{z_S} + P_{z_{mp}} = \left( \frac{\sqrt{3,25} \cdot a \cdot \cos \beta}{\sin \beta_I} + 0,5 \cdot \mu \cdot l_3 \right) \cdot \tau_S, \quad (6)$$

где  $l_3$  – длина площадки затупления зерна;  $a$  – толщина среза;  $\mu$  – коэффициент трения;  $\tau_S$  – касательные напряжения, при которых происходит сдвиг в зоне деформации;  $\beta_I$  – угол, сформированный плоскостью сдвига, учитывающий трение стружки по передней грани зерна.

Известна математическая модель силы микрорезания при скоростном шлифовании, учитывающая радиус режущей кромки зерна  $\rho$  и  $\rho_M$  – плотность обрабатываемого материала [8]:

$$P_z^I = \frac{\tau_S \cdot a_z \sqrt{2\rho \cdot a_z} \cdot \sin(\beta + \varphi_S)}{\sin \beta \cdot \sin \varphi_S} + \frac{2\pi \cdot \tau_S \cdot a_S \cdot \rho \cdot \mu}{3\mu_S + 10^{-4} a_z \cdot \sqrt{2\rho \cdot a_z} \cdot \rho_M \cdot V^2} \cdot \frac{1 - \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\cos(\beta - \gamma)}. \quad (7)$$

Данная зависимость силы микрорезания не учитывает инерционную составляющую.

Некоторые модели учитывают действие дополнительных факторов, действующих в зоне резания. Например, *В.В. Ефимов* [9] считает, что фактическая составляющая силы резания будет меньше ее номинального значения на величину гидродинамической силы в контакте, возникающей в результате попадания СОЖ. Эту силу можно представить двумя составляющими: гидродинамической составляющей силы в контакте поверхности круга с поверхностью заготовки и гидродинамической составляющей силы в контакте зерно – материал заготовки:

$$P_{\Gamma} = 2,45\mu \cdot V_{\kappa} \cdot H \cdot \left( \frac{\xi \cdot R_0}{n_0} + \frac{2\rho_d^2 \cdot n_0 \cdot R_k}{b \cdot c \cdot \rho} \right). \quad (8)$$

**Постановка задачи.** Учитывая большое разнообразие схем обработки режимов резания, шлифуемых материалов и характеристик инструмента, универсальной зависимости для определения силы резания при шлифовании не существует. Однако часто бывает, что для обработки известна зависимость для одной схемы шлифования и неизвестна для другой, которую предстоит найти расчётным методом.

**Математическая модель.** Для определения неизвестной силы резания для схемы шлифования 1, с учетом известной силы резания для схемы шлифования 2, запишем зависимости для  $P_z$ .

Для схемы 1:

$$P_{Z1} = P_z^I \cdot S_{k1} \cdot n_p^I, \quad (9)$$

где  $P_z^I$  – составляющая силы микрорезания для схемы 1;  $S_{k1}$  – площадь контакта круга и заготовки для схемы 1;  $n_p^I$  – количество контактирующих зерен в пределах площади контакта для схемы 1 (на 1 мм<sup>2</sup>).

Для схемы 2:

$$P_{Z2} = P_z^{II} \cdot S_{k2} \cdot n_p^{II}, \quad (10)$$

где  $P_z^{II}$  – составляющая силы микрорезания для схемы 2;  $S_{k2}$  – площадь контакта круга и заготовки для схемы 2;  $n_p^{II}$  – количество контактирующих зерен в пределах площади контакта для схемы 2 (на 1 мм<sup>2</sup>).

Разделим (9) на (10):

$$\frac{P_{Z1}}{P_{Z2}} = \frac{P_z^I \cdot S_{k1} \cdot n_p^I}{P_z^{II} \cdot S_{k2} \cdot n_p^{II}} \quad (11)$$

и, решая уравнение относительно  $P_{Z1}$ , получим:

$$P_{Z1} = P_{Z2} \cdot \frac{P_z^I}{P_z^{II}} \cdot \frac{S_{k1}}{S_{k2}} \cdot \frac{n_p^I}{n_p^{II}}. \quad (12)$$

Если сила микрорезания и количество контактирующих зерен в пределах площади контакта не зависят от схемы шлифования, то можно записать:

$$P_{Z1} = P_{Z2} \cdot \frac{S_{k1}}{S_{k2}} \quad \text{или} \quad P_{Z2} = P_{Z1} \cdot \frac{S_{k2}}{S_{k1}}. \quad (13)$$

**Конкретный пример решения задачи.** Анализируя формулы (13) можем сделать вывод, что при обработке шлифованием по различным схемам, сила резания будет отличаться в зависимости от величины соотношения площадей контакта круга и заготовки.

Рассмотрим это положение на конкретном примере, сравнив две схемы обработки: круглое наружное шлифование с продольной подачей и плоское, торцевое шлифование с продольной подачей (рис. 1).

Подставим в формулу (13) значения сил и площадей зон контакта для двух выше приведенных схем шлифования. Площадь зоны контакта для продольного шлифования с учетом длины дуги контакта  $L_{k2}$  (рис. 1, а).

$$S_{k2} = L_{k2} \cdot H_{k2} = M(V_k, V_s, V_n) \sqrt{\frac{D_k \cdot d_s \cdot t}{D_k \pm d_s}} \cdot H_{k2}, \quad (14)$$

где  $H_{k2}$  – ширина шлифования.

Ширину зоны контакта определяем, зная зависимость:

$$H_{k2} = K_k \cdot H_k, \quad (15)$$

где  $H_k$  – высота шлифовального круга;  $K_k$  – коэффициент, определяющий долю высоты круга на оборот заготовки.



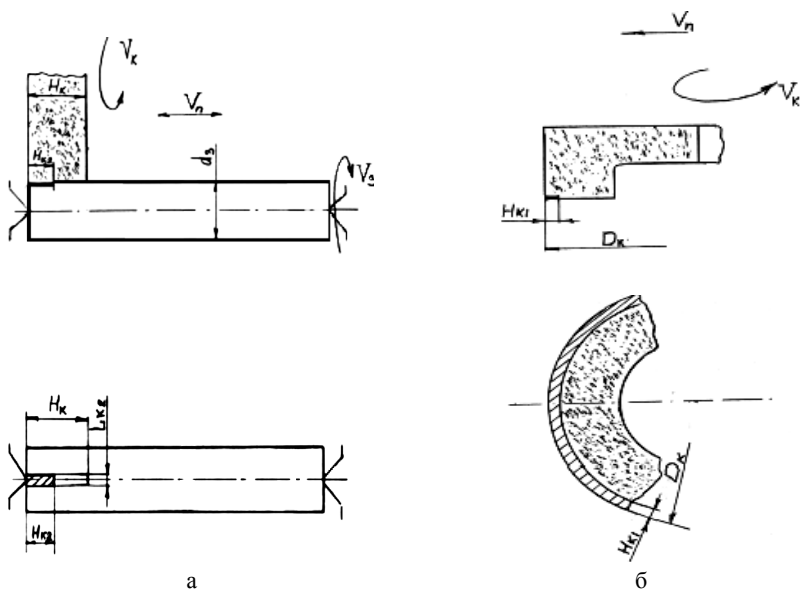


Рисунок 1 – Схема определения площади контакта.  
(а – круглое наружное шлифование; б – плоское торцевое шлифование.)

Таким образом, за один оборот заготовки круг переместится вдоль оси на расстояние, равное  $K_k \cdot H_k$ . За одну минуту круг переместится на величину:

$$H_{мин} = V_n = K_k \cdot H_k \cdot n = \frac{1000 \cdot K_k \cdot H_k \cdot V_3}{\pi \cdot d_3} \quad (16)$$

Разрешая относительно  $K_k \cdot H_k$ , можно определить ширину зоны контакта в зависимости от продольной подачи  $V_n$  [мм/мин]:

$$H_{k2} = K_k \cdot H_k = \frac{V_n \cdot \pi \cdot d_3}{1000 \cdot V_3} \quad (17)$$

где  $d_3$  – диаметр заготовки, мм;  $V_3$  – скорость заготовки, м/мин; а ширина зоны контакта  $H_{k2}$ , мм.

Подставляя выражение (17) в формулу (14) получим:

$$S_{k2} = M(V_k, V_3, V_n) \cdot \frac{V_n \cdot \pi \cdot d_3}{1000 \cdot V_3} \sqrt{\frac{D_k \cdot d_3 \cdot t}{D_k \pm d_3}} \cdot H_{k2} \quad (18)$$

Длина дуги контакта для плоского торцевого шлифования при симметричном расположении круга и заготовки (рис. 1, б):

$$L_{k1} = \frac{D_k}{2} \cdot \left( \arcsin \frac{B_3}{D_k} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{V_3^2}{(60 \cdot V_k)^2}}, \quad (19)$$

где  $B_3$  – половина ширины обрабатываемой заготовки.

Ширину шлифования при плоском торцевом шлифовании можно определить по формуле:

$$H_{k1} = K_{k1} \cdot D_k.$$

За один оборот круга, круг переместится относительно заготовки на величину  $K_{k1} \cdot D_k$ ; за минуту это перемещение составит:

$$H_{k1} = \frac{K_{k1} \cdot D_k \cdot 1000 \cdot V_k}{\pi \cdot D_k} = V_n = \frac{1000 \cdot K_{k1} \cdot D_k \cdot V_k}{\pi \cdot D_k}. \quad (20)$$

Разрешая относительно  $K_{k1} \cdot D_k$ , можно определить ширину зоны шлифования:

$$H_{k1} = K_{k1} \cdot D_k = \frac{\pi \cdot V_n \cdot D_k}{1000 \cdot V_k}. \quad (21)$$

Ширину зоны контакта при шлифовании торцом круга можно определить и по-другому. В данном случае припуск удаляется периферийной его частью. При этих условиях тепловой поток, идущий в заготовку, имеет максимальную интенсивность на цилиндрическом пояске шириной 3 – 4 мм. Поэтому это значение можно принять в качестве ширины зоны контакта круга с заготовкой.

Умножая выражение (21) на длину дуги контакта, получим площадь зоны контакта при торцевом шлифовании:

$$S_{k1} = L_{k1} \cdot H_{k1} = \frac{D_k^2}{2000} \cdot \arcsin \frac{B_3}{D_k} \cdot \frac{\pi \cdot V_n}{V_k} \sqrt{1 + \frac{V_3^2}{(60 \cdot V_k)^2}}. \quad (22)$$

Таким образом, силу резания  $P_{Z2}$  для круглого наружного шлифования периферией круга получаем через известное выражение (13) для силы резания  $P_{Z1}$  при плоском шлифовании торцом круга:

$$P_{Z2} = 2P_{Z1} \cdot \frac{M(V_k, V_3, V_n) \cdot d_3 \cdot V_k \cdot \sqrt{\frac{D_k \cdot d_3 \cdot t}{D_k \pm d_3}}}{D_k^2 \cdot \left( \arcsin \frac{B_3}{D_k} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{V_3^2}{(60 \cdot V_k)^2}}}. \quad (23)$$

**Выводы.** Проведен анализ существующих математических зависимостей для определения силы резания при разных схемах шлифования. При использовании известных математических соотношений для силы резания при плоском шлифовании торцом круга, получена формула силы резания для

круглого наружного шлифования периферией.

**Список литературы:** 1. Мазур М.П., Внуков Ю.М., Доброскок В.Л., та ін. Основи теорії різання матеріалів. Львів: Новий світ-2000, – 2010. – 424 с., 2. Беззубенко Н.К. Повышение эффективности алмазного шлифования путем введения в зону обработки дополнительной энергии в форме электрических разрядов. Дисс. Харьков: ХГПУ, – 1995. – 200 с., 3. Сизый Ю.А., Степанов М.С. Влияние давления подачи СОЖ на нагрев заготовки при врезном шлифовании // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, освіта, здоров'я». – Харків: НТУ «ХПІ», 2005. С. 210 – 214., 4. Маслов Е.Н. Теория шлифования материалов. – М.: Машиностроение, – 1974. – 320 с., 5. Справочник технолога-машиностроителя. Под ред. А.Г. Косиловой и Р.К. Мещерякова. – М.: Машиностроение т.П, – 1989. – 496 с., 6. Якимов А.В. и др. Качество и производительность абразивно-алмазной обработки. – Одесса: ОГПУ, – 1999. – 212 с., 7. Корчак С.Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей. М.: Машиностроение, – 1971. – 279 с., 8. Филимонов Л.Н. Высокоскоростное шлифование. Л.: Машиностроение, – 1979. – 248 с., 9. Ефимов В.В. Модель процесса шлифования с применением СОЖ. – Саратов. Саратовский ун-т, – 1992. – 132 с.

*Поступила в редколлегию 18.01.2012.*

УДК 539.3

**Е.Г. ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;  
**С.И. ПОВАЛЯЕВ**, канд. техн. наук, доц., ХНАДУ, Харьков

### **ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОНИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ**

Запропоновано спосіб відновлення динамічних навантажень, що діють на конічні оболонки, заснований на використанні методу скінчених різниць. Наведено приклади відновлення рівномірно розподілених і зосереджених динамічних навантажень за значеннями одного з параметрів напружено-деформованого стану (переміщення або деформації).

Предложен способ восстановления динамических нагрузок, действующих на конические оболочки, основанный на использовании метода конечных разностей. Приведены примеры восстановления равномерно распределенных и сосредоточенных динамических нагрузок по значениям одного из параметров напряженно-деформированного состояния (перемещения или деформации)

A method for recovery of dynamic loads acting on the conical shells, based on the method of finite differences, is proposed. Examples of the reconstruction of uniformly distributed and point dynamic loads on the values of the one deflected mode parameter (displacement or deformation) are given.

**Введение.** Метод конечных разностей (МКР) является одним из наиболее известных численных методов, которые используются при расчете различных элементов конструкций. Несомненным его преимуществом как численного метода является возможность применения для ряда задач, в которых использование аналитических методов связано с преодолением значительных трудностей даже при решении прямых задач по исследованию параметров напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при известных внешних нагрузках.

**Аналитический обзор.** Исследованию процессов деформирования с применением метода конечных разностей посвящено большое количество научных работ. В работах [1-4] рассмотрены отдельные математические модели и методы анализа, применяемые для описания процессов, возникающих при нагружении оболочек различной конфигурации, в том числе конических. Особо следует отметить разнообразие краевых условий в задачах, в которых был использован МКР. Область применения данного метода для решения обратных задач, к числу которых относятся задачи восстановления (идентификации) нагрузок, действующих на элементы конструкций, мало изучена.

**Цель и постановка задачи.** Исходя из вышесказанного, целью данной работы является создание методов численного решения обратных задач по восстановлению динамических нагрузок, действующих на конические оболочки, на основе метода конечных разностей.

**Восстановление нагрузок, действующих на конические оболочки.** Рассмотрим задачу о численной идентификации осесимметричной нестационарной нагрузки, воздействующей на коническую оболочку, жестко защемленную на торцах, (рис. 1).

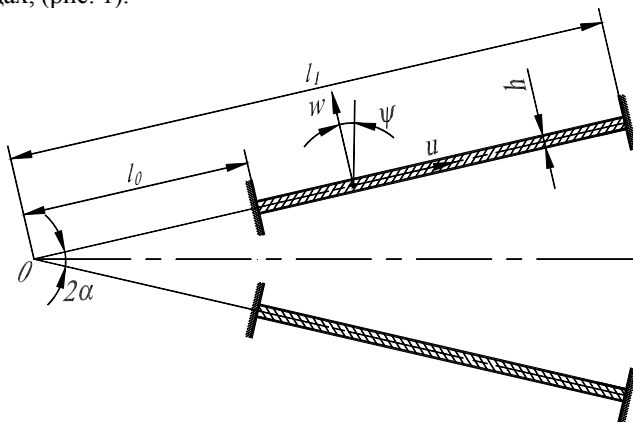


Рисунок 1 – Исследуемая механическая система.

Реакция оболочки средней толщины типа теории Тимошенко на осесимметричную нормальную нагрузку моделируется системой линейных дифференциальных уравнений [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$c_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{w}{r^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{u}{r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c_2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{(1-\nu^2) l_0^2}{Eh} q(\xi, t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} - c_3 \frac{\partial w}{\partial r} - c_4 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

где  $c_1 = (1-\nu)k/2$ ;  $c_2 = l_0(1-\nu)k/2$ ;  $c_3 = 6l_0(1-\nu)k/h^2$ ;  $c_4 = 6l_0^2(1-\nu)k/h^2$ ;  $r = l/l_0$ ;  $t = t_p\sqrt{E}/[l_0\sqrt{\rho(1-\nu^2)}]$ ;  $t$  – безразмерное время;  $t_p$  – размерное время;  $u, w$  – перемещения точек срединной поверхности в тангенциальном и нормальном направлениях, соответственно;  $\psi$  – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;  $\nu, E$  – упругие постоянные материала оболочки;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $2\alpha$  – угол при вершине срединной поверхности оболочки;  $q(\xi, t)$  – заданная поперечная нестационарная нагрузка.

*Граничные условия* для рассматриваемой механической системы (рис. 1) имеют вид:

$$w(\xi, t)|_{\xi=0} = 0; \quad u(\xi, t)|_{\xi=0} = 0; \quad \psi(\xi, t)|_{\xi=1} = 0. \quad (2)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (1) запишем ее аппроксимацию в конечно-разностной форме [6]:

$$\begin{aligned} u_p^{m+1} &= \frac{\Delta t^2}{\Delta r^2}(u_{p+1}^m - 2u_p^m + u_{p-1}^m) + \frac{\Delta t^2}{2p\Delta r^2}(u_{p+1}^m - u_{p-1}^m) - \frac{\Delta t^2}{p^2\Delta r^2}u_p^m + \\ &+ \frac{\nu\Delta t^2}{2p\Delta r^2}(w_{p+1}^m - w_{p-1}^m)\operatorname{ctg}(\alpha) - \frac{\Delta t^2}{p^2\Delta r^2}w_p^m\operatorname{ctg}(\alpha) + 2u_p^m - u_p^{m-1}; \\ w_p^{m+1} &= \frac{c_1\Delta t^2}{\Delta r^2}(w_{p+1}^m - 2w_p^m + w_{p-1}^m) + \frac{c_1\Delta t^2}{2p\Delta r^2}(w_{p+1}^m - w_{p-1}^m) - \frac{\Delta t^2}{p^2\Delta r^2}w_p^m\operatorname{ctg}^2(\alpha) - \\ &- \frac{\Delta t^2}{p\Delta r}u_p^m\operatorname{ctg}(\alpha) + \frac{\nu\Delta t^2}{2p\Delta r^2}(u_{p+1}^m - u_{p-1}^m)\operatorname{ctg}(\alpha) + \frac{c_2\Delta t^2}{2\Delta r}(w_{p+1}^m - w_{p-1}^m) + \\ &+ 2\frac{c_2\Delta t^2}{p\Delta r}w_p^m + w_p^m - w_p^{m-1} - \frac{(1-\nu^2)l_0^2\Delta t^2}{Eh}q_p^m; \\ \psi_p^{m+1} &= \frac{\Delta t^2}{\Delta r^2}(\psi_{p+1}^m - 2\psi_p^m + \psi_{p-1}^m) + \frac{\Delta t^2}{2p\Delta r^2}(\psi_{p+1}^m - \psi_{p-1}^m) - \frac{\Delta t^2}{p^2\Delta r^2}\psi_p^m - \\ &- \frac{c_3\Delta t^2}{2\Delta r}(w_{p+1}^m - w_{p-1}^m) - c_4\Delta t^2\psi_p^m + 2\psi_p^m - \psi_p^{m-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

*Начальные и граничные условия в конечно-разностной форме* имеют вид:

$$u_p^0 = w_p^0 = \psi_p^0 = 0; \quad w_0^m = u_0^m = \psi_0^m = w_p^m = u_p^m = \psi_p^m = 0. \quad (4)$$

Для получения решения задачи идентификации нестационарной равномерно распределенной нагрузки уравнения (3) необходимо дополнить выражением, вытекающим из 2-го соотношения (3):

$$q_{p1}^{m+1} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)t_0^2\Delta t^2} \left[ \frac{c_1\Delta t^2}{\Delta r^2} (w_{p1+1}^{m+1} - 2w_{p1}^{m+1} + w_{p1-1}^{m+1}) + \frac{c_1\Delta t^2}{2p1\Delta r^2} (w_{p1+1}^{m+1} - w_{p1-1}^{m+1}) - \right. \\ \left. - \frac{\Delta t^2}{p1^2\Delta r^2} w_{p1}^{m+1} \operatorname{ctg}^2(\alpha) - \frac{\Delta t^2}{p1\Delta r} u_{p1}^{m+1} \operatorname{ctg}(\alpha) + \frac{\nu\Delta t^2}{2p1\Delta r^2} (u_{p1+1}^{m+1} - u_{p1-1}^{m+1}) \operatorname{ctg}(\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{c_2\Delta t^2}{2\Delta r} (\psi_{p1+1}^{m+1} - \psi_{p1-1}^{m+1}) + \frac{c_2\Delta t^2}{p1\Delta r} \psi_{p1}^{m+1} + 2w_{p1}^{m+1} - w_{p1}^m - w_{p1}^{m+2} \right], \quad (5)$$

где  $p1$  – номер точки регистрации перемещения  $w$ , по которому осуществляется идентификация внешней нагрузки.

При идентификации равномерно распределенной нагрузки принималось, что во всех точках действует нагрузка, равная  $q_{p1}^{m+1}$ . Идентификации равномерно распределенной нагрузки производится на основе задания перемещения в любой точке оболочки.

Идентификации сосредоточенной нагрузки производилась на основе задания перемещения в точке приложения нагрузки. В силу необходимости моделирования сосредоточенного воздействия на оболочку, нагрузка задавалась как распределенная по поверхности оболочки согласно формуле [7]:

$$q(r, t) = \frac{q_0(t)}{\pi} \frac{\lambda}{(r - r_0)^2 + \lambda^2}, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – константа (при  $\lambda \rightarrow 0$  дельта-образующая последовательность в (6) стремится к дельта-функции).

Отметим, что параметр  $\lambda$ , входящий в выражение (6), по существу определяет закон распределения воздействующей на оболочку нагрузки вдоль ее длины. В дальнейшем при решении задачи идентификации этот параметр определялся на основе параметрического анализа задачи идентификации с применением вводимого критерия, характеризующего точность получаемого решения.

Форма сосредоточенной нагрузки, представленной нагрузкой, распределенной согласно (6), имеет вид (рис. 2):

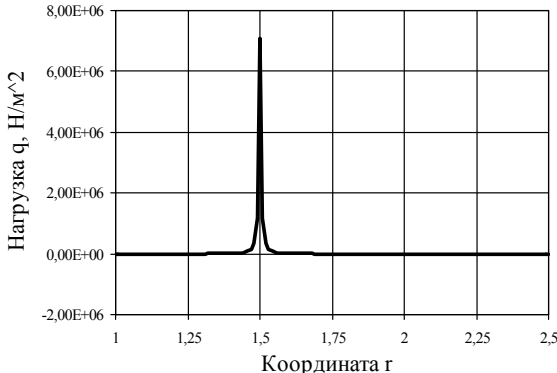
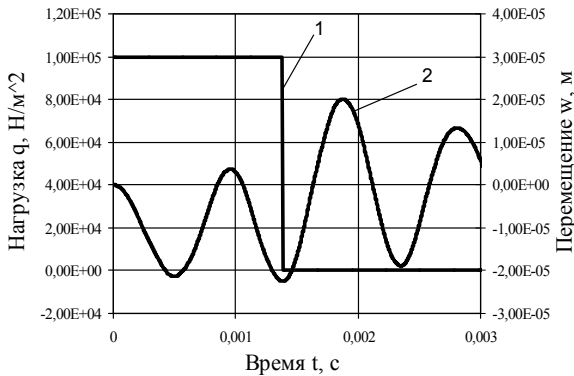


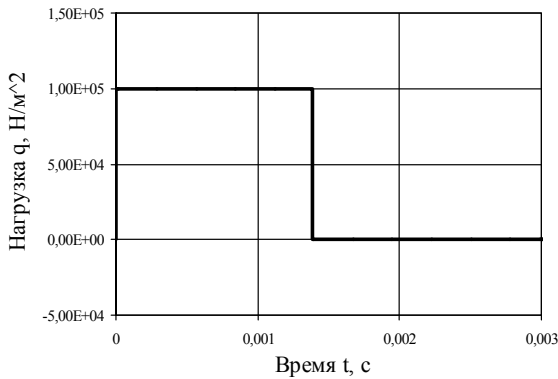
Рисунок 2 – Распределение нагрузки вдоль оси оболочки.

**Числовой эксперимент.** При расчетах была рассмотрена стальная коническая оболочка, имеющая следующие характеристики:  $l_0 = 1$  м,  $l_1 = 2,5$  м,  $\alpha = 0,5$  рад,  $h = 0,03$  м, модуль Юнга  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Идентификация внешней нагрузки производилась на основе значений нормальных перемещений, полученных в результате решения прямой задачи. Точка регистрации перемещения  $r_0 = 1,5$ . Результаты идентификации равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузки, соответственно, представлены на рис. 3 и 4 (на рис. 3, а и 4, а приведены: 1 – график изменения во времени нагрузки, действующей на оболочку; 2 – перемещение оболочки, вызываемое этой нагрузкой; на рис. 3, б и 4, б показана нагрузка, идентифицированная по соответствующему перемещению).

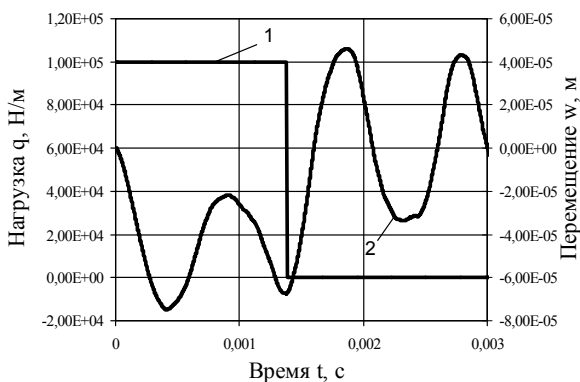


а

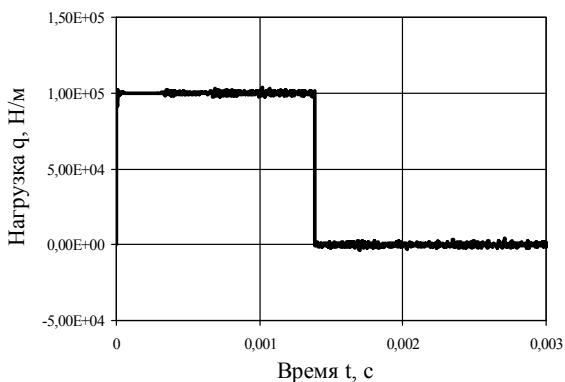


б

Рисунок 3 – Результаты идентификации равномерно распределенной нагрузки.



а



б

Рисунок 4 – Результаты идентификации сосредоточенной нагрузки.

Результаты числового эксперимента позволяют судить об эффективности применения МКР при восстановлении динамических нагрузок, действующих на конические оболочки.

**Выводы.** В заключение следует отметить, что при решении задач восстановления внешних нагрузок методом конечных разностей имеются как преимущества, так и недостатки.

К преимуществам следует отнести простоту метода и численного алгоритма, а также возможность решения ряда обратных задач, которые трудно решить аналитическими методами.

Основным недостатком МКР является проблема устойчивости для определенного круга задач, а также достаточно высокая чувствительность алгоритма к “зашумлению” исходных данных, что свойственно результатам экс-



периментов. Последнее приводит к необходимости предварительной обработки исходных данных (сглаживанию).

**Список литературы:** 1 *Гегелавили Т. А.* Численное исследование переходных процессов в составной цилиндрической конструкции при осевом нагружении // Науч. тр. Груз. политехнического ин-та. – 1983. – № 5. – С. 66–73. 2 *Маиштакос Н. М.* Кинематика и динамика тел цилиндрической формы при нестационарном нагружении. – Харьков : ИПМаш. – 1985. – 20 с. 3 *Jiang Song-qing, Li Yong-chi, Chen Zheng-Xoang.* Динамическая реакция подкрепленных кольцами цилиндрических оболочек при неравномерном боковом ударе // Chin. J. Comput. Mech. – 2001. – Vol. 18, № 4. – P. 443–448. 4 *Шульга Н. А., Богданов С. Ю.* О вынужденных осесимметричных нелинейных колебаниях подкрепленных конических оболочек // Прикл. мех. (Киев). – 2003. – Vol. 39, №12. – С. 100–106. 5 *Martin M. T., Doyle J. F.* Impact force location in frame structures // Int. J. Impact Eng. – 1996. – Vol. 18, № 1. – P. 79–97. 6 *Самарский А. А.* Теория разностных схем. 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1989. – 616 с. 7 *Данилов В. Л., Иванова А. Н.* и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). – М : физматгиз. – 1961. – 439 с.

*Поступила в редколлегию 24.11.2011*

## ЗМІСТ

<b>АНДРЕНКО П.М., ГРЕЧКА І.П., ЛЕБЕДЕВ А.Ю.</b> Математична модель розподільника потоку . . . . .	3
<b>АНИЩЕНКО Г.О., РОМАШОВ Ю.В.</b> Построение численных решений задач теории ползучести . . . . .	10
<b>АРТЮХ М.В., ЛИТВИН О.М.</b> Деякі теореми про виробничі функції від двох змінних зі змінними коефіцієнтами еластичності та їх застосування	23
<b>БЄЛОВ І.С.</b> Правий зсув невід’ємних косинус – многочленів . . . . .	30
<b>БОРИСЕНКО А.М., ЄНІКЄЄВ О.Ф., ЗИКОВ І.С.</b> Аналіз динаміки дорівнюєвої системи підвищення ефективності алмазного шліфування	34
<b>БУРЛАСНКО В.М., МОРАЧКОВСЬКИЙ О.К.</b> Скінченноеlementна модель нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують	44
<b>ВАНИН В.А., ГРИГОРЬЕВ А.А.</b> Критический анализ некоторых современных моделей физического пространства . . . . .	51
<b>ГРИГОРЬЕВ А.Л., ГЕВОРКЯН Ю.Л.</b> Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов . . . . .	74
<b>ГРИГОРЬЕВ А.Л., ГЕВОРКЯН Ю.Л.</b> Абсолютная и относительная динамическая устойчивость гидромеханических узлов . . . . .	88
<b>ІВАНІЦЬКАЯ О.П.</b> Про моделювання гідравлічних модулів з горизонтальним одноштоковим гідравлічним циліндром . . . . .	107
<b>КУЛИК С.І., ЛИТВИН О.М.</b> Мішана вейвлет-апроксимація Хаара функцій трьох змінних . . . . .	115
<b>ЛИТВИН О.М., ЛОБАНОВА Л.С., НЕФЬОДОВА І.В.</b> Про аналітичне представлення структури наближеного розв’язку в методі скінченних елементів (прямокутні елементи) з вибором координат вузлів елементів	123
<b>ЛИТВИН О.М., НЕЧУЙВИТЕР О.П.</b> 2D - коефіцієнти Фур’є на класі Ліпшиця та оператори кусково-сталої сплайн-інтерлінації . . . . .	132
<b>ЛИТВИН О.М., ПЕРШИНА Ю.І.</b> Побудова розривних інтерполяційних, апроксимаційних та інтерлінаційних сплайнів з використанням трапецевидних елементів . . . . .	141

<b>МЕЖУЄВ В.І., ЛИТВИН О.М., ЛИТВИН О.О.</b> Метод розробки мета-моделей на основі логічних моделей предметних областей . . . . .	153
<b>НАЗАРЕНКО О.М., КАРПУША М.В.</b> Моделювання та прогнозування нестационарних часових рядів . . . . .	162
<b>НАЗИРОВ З.Ф., ЧЕРЕМСЬКА Н.В.</b> Дилатації випадкових полів . . . . .	172
<b>ОЛЬШАНСКИЙ В.П., ОЛЬШАНСКИЙ С.В.</b> Колебания линейного неоднородного зернового потока в цилиндрическом виброрешете . . . . .	180
<b>ПАНАМАРЬОВА О.Б.</b> Узагальнена методика розрахунку та проектування гідроагрегату живлення гідросистем . . . . .	189
<b>ПРОХОРЕНКО А.О.</b> Математична модель гідравлічно розвантаженого керуючого клапана для дизельної паливної апаратури . . . . .	194
<b>РЕДЧЕНКО О.С.</b> Математична модель руху у кривих швидкісних потягів з кузовами, що нахилиються . . . . .	206
<b>СТЕПАНОВ М.С., ШЕВЧЕНКО С.М.</b> Математическое моделирование силы резания при шлифовании в различных условиях . . . . .	212
<b>ЯНЮТИН Е.Г., ПОВАЛЯЕВ С.И.</b> Восстановление динамических нагрузок, действующих на конические оболочки . . . . .	218

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«Харківський політехнічний інститут»**

Тематичний випуск  
«Математичне моделювання в техніці та технологіях»  
Випуск 2

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін  
Технічний редактор: С. Д. Нижник  
Відповідальний за випуск: к. т. н. Г. Б. Обухова

Обл. вид. № 15-12

Підп. до друку 10.02.2012 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Хегох WC 275. Умов. друк. арк. 10. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 2498. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, пл. Повстання, 7/8

---