УДК 539.3

Л.В. КУРПА, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Г.Н. ТИМЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
Н.А. БУДНИКОВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

Запропоновано метод дослідження динамічної поведінки багатошарових пологих оболонок несиметричної структури, що знаходяться під дією поперечного навантаження. Новий метод базується на застосуванні теорії R-функцій, методів Рітця і Бубнова-Гальоркіна. Особливістю даного підходу є метод дискретизації переміщень за часом. Для математичної постановки задачі використана класична геометрично нелінійна теорія. Виконана чисельна реалізація розробленого алгоритму в системі POLE-RL, побудовані резонансні криві для вимушених коливань двошарових ортогонально-армованих оболонок складної форми.

Предложен метод исследования динамического поведения многослойных пологих оболочек несимметричной структуры, находящихся под действием поперечной нагрузки. Новый метод базируется на применении теории R-функций, методов Ритца и Бубнова-Галёркина. Особенностью данного подхода является метод дискретизации перемещений по времени. Для математической постановки задачи использована классическая геометрически нелинейная теории. Выполнена численная реализация разработанного алгоритма в системе POLE-RL, построены резонансные кривые для вынужденных колебаний двухслойных ортогонально-армированных оболочек сложной формы.

The method for studying the dynamic behavior of the unsymmetrical laminated shallow shells under the transverse load is proposed. New method is based on the R-functions theory, Ritz and Bubnov-Galerkin method. A feature of this approach is the method of discretization of the displacements in time. Formulation is carried out in the classical geometrically nonlinear theory. The numerical implementation of the developed algorithm is fulfilled in the framework POLE-RL, the resonance curves are constructed for the forced vibrations of two-layered cross-ply shells of the complex shape.

Введение. Исследование динамического поведения композитных многослойных пологих оболочек со сложной формой плана и различными способами закрепления краёв является одной из актуальных проблем нелинейной динамики. В общем случае эта задача может быть решена только с помощью приближенных методов, к числу которых относится метод конечных элементов (МКЭ), как один из наиболее применяемых и универсальных методов.

В работах [1,2] был предложен альтернативный МКЭ численно-аналитический метод, существенным образом использующий теорию R-функций. Этот метод был разработан для исследования свободных геометрически нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек симметричного строения. В настоящей работе метод обобщен для решения задач о вынужденных колебаниях многослойных оболочек несимметричного строения. В этом случае выражения для усилий и моментов существенно усложняются и имеют вид:

$$\{N\} = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = [C]\cdot\{\varepsilon\} + [K]\cdot\{\chi\},$$
$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = [K]\cdot\{\varepsilon\} + [D]\cdot\{\chi\}.$$

Здесь:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \ [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix}, \ [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{12}\}^T, \ \{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T,$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Заметим, что для оболочек несимметричного строения матрица K не является нулевой.

Постановка задачи. В рамках классической теории рассматривается задача о вынужденных геометрически нелинейных колебаниях композитной оболочки постоянной толщины h, находящейся под действием поперечной периодической нагрузки $F(t) = P_0 \cos\Omega t$. В соответствии с этой теорией, уравнения движения многослойной пологой оболочки представляются в виде [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial N_{12}}{\partial y} = m_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \dfrac{\partial N_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial N_{22}}{\partial y} = m_1 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} + \\ + N_{11}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F(t) + m_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями.

Метод решения задачи. Следуя предложенному в работах [1,2] алгоритму, в случае многомодовой аппроксимации, неизвестные компоненты вектора перемещений u, v, w будем раскладывать в ряды по собственным функциям. Для оболочек несимметричного строения они представляются в виде:

$$\begin{cases} u(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)u_i^{(c)}(x,y)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} y_i(t)y_j(t)u_{ij}(x,y), \\ v(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)v_i^{(c)}(x,y)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} y_i(t)y_j(t)v_{ij}(x,y), \\ w(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)w_i^{(c)}(x,y), \end{cases} \qquad (2)$$

где $u_i^{(c)}(x,y)$, $v_i^{(c)}(x,y)$, $w_i^{(c)}(x,y)$ – собственные функции, которые находятся в ходе решения соответствующей линейной задачи о свободных колебаниях композитной оболочки с учетом сил инерции в плоскости [4]. Функции $u_{ij}(x,y)$ и $v_{ij}(x,y)$ являются решениями последовательности задач, математическая постановка которых сводится к системам *уравнений типа Ламе* с правой частью, зависящей от собственных функций. Решение вспомогательных задач осуществляется с помощью *вариационно-структурного метода* (RFM). При решении нелинейной задачи будем пренебрегать силами инерции в плоскости оболочки. Согласно такому представлению перемещений, первые два уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно. Применяя *процедуру Бубнова-Галёркина* к третьему уравнению системы (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{gathered} y_s''(t)+\omega_{Ls}^2 y_s(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}^{(s)} y_i(t)y_j(t)+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk}^{(s)} y_i(t)y_j(t)y_k(t)=\tilde{F}_s(t), \quad s=\overline{1,n}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Выражения для коэффициентов этой системы имеют вид:

$$\beta_{ij}^{(s)}=\frac{-1}{m_1\left\|w_s^{(c)}\right\|^2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 M_{11}^{(N)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{22}^{(N)}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}^{(N)}}{\partial x\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(N_{11}^{(L)}\frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2}+N_{22}^{(L)}\frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2}+2N_{12}^{(L)}\frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x\partial y}\right)-k_1 N_{11}^{(N)}-k_2 N_{22}^{(N)}\right]w_s^{(c)}d\Omega,$$

$$\gamma_{ijk}^{(s)}=-\frac{1}{m_1\left\|w_s^{(c)}\right\|^2}\iint_{\Omega}\left[N_{11}^{(N)}\frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x^2}+N_{22}^{(N)}\frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial y^2}+2N_{12}^{(N)}\frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x\partial y}\right]w_s^{(c)}d\Omega,$$

$$\tilde{F}_s(t)=P_s\cos\Omega t, \text{ где } P_s=\frac{P_0}{m_1\left\|w_s^{(c)}\right\|^2}\iint_{\Omega} w_s^{(c)}d\Omega,$$

$$N^{(L)}=\left\{N_{11}^{(L)};\, N_{22}^{(L)};\, N_{12}^{(L)}\right\}^T=[C]\left\{\varepsilon^{(L)}\right\}+[K]\{\chi\},$$

$$N^{(N)} = \left\{ N_{11}^{(N)};\, N_{22}^{(N)};\, N_{12}^{(N)} \right\}^T = [C]\left\{ \varepsilon^{(N)} \right\},$$

$$M^{(N)} = \left\{ M_{11}^{(N)};\, M_{22}^{(N)};\, M_{12}^{(N)} \right\}^T = [K]\left\{ \varepsilon^{(N)} \right\},$$

$$\left\{ \varepsilon^{(L)} \right\} = \left\{ \frac{\partial u_i^{(c)}}{\partial x} + k_1 w_i^{(c)};\, \frac{\partial v_i^{(c)}}{\partial y} + k_2 w_i^{(c)};\, \left(\frac{\partial u_i^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial v_i^{(c)}}{\partial x} \right) \right\}^T,$$

$$\left\{ \varepsilon^{(N)} \right\} = \left\{ \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x}; \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y}\frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial y}; \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x}\frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial y} \right\}^T,$$

$$\{\chi\} = \{\chi_{11};\, \chi_{22};\, \chi_{12}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w_i^{(c)}}{\partial x^2};\, -\frac{\partial^2 w_i^{(c)}}{\partial y^2};\, -2\frac{\partial^2 w_i^{(c)}}{\partial x \partial y} \right\}^T.$$

Для решения системы (3) с заданными начальными условиями могут быть использованы различные приближенные методы. Если ограничиться одномодовой аппроксимацией, система (3) сводится к одному уравнению:

$$y''(t) + \omega_L^2 y(t) + \beta y^2(t) + \gamma y^3(t) = \tilde{F}(t). \tag{4}$$

Начальные условия были приняты в виде:

$$w\big|_{t=0} = w_{\max},\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

Коэффициенты β и γ получены из соотношений для $\beta_{ij}^{(s)}$ и $\gamma_{ijk}^{(s)}$ при $i = j = k = 1$. В этом простейшем случае, применяя процедуру Бубнова-Галёркина, зависимость отношения $\nu = \Omega / \omega_L$ от амплитуды $A = w_{\max}/h$ колебаний оболочки может быть определена по формуле [5]:

$$\left(\Omega / \omega_L\right)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi}\beta A + \frac{3}{4}\gamma A^2 \pm \frac{P_1}{A}. \tag{6}$$

Численные результаты. Численная реализация предложенного подхода выполнена в рамках системы POLE-RL. Для проверки достоверности разработанного программного обеспечения было выполнено сравнение полученных результатов с известными в литературе для свободно опертой однослойной пологой оболочки, опирающейся на прямоугольный план [5]. Максимальное отличие полученных результатов от результатов работы [5] не превосходит 3%.

Для иллюстрации возможностей предложенного метода рассмотрим двухслойную ортогонально-армированную оболочку, $(0°/90°)$, изготовленную из стеклопластика ($E_1 / E_2 = 3$, $G_{1,2} / E_2 = 0.5$, $\nu_1 = 0.25$). Геометрические характеристики следующие: $b/a = 1$, $h/a = 0.01$, $d = R = 0.2a$. Форма оболочки представлена на рис. 1. Предполагается, что граничные условия моделируют условия неподвижного шарнира:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0\,. \qquad (7)$$

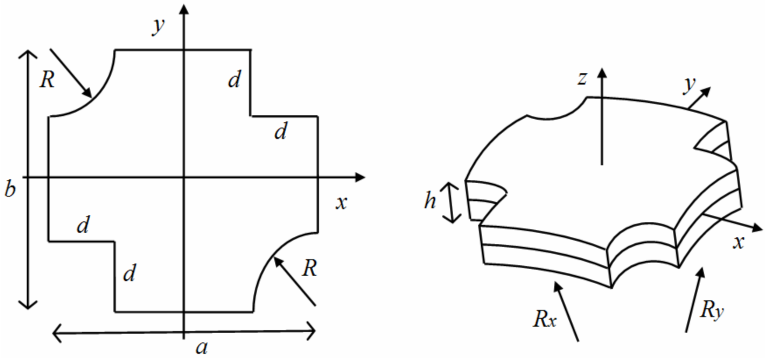


Рисунок 1 – Геометрия оболочки.

Структура решения для данной задачи, удовлетворяющая всем граничным условиям, имеет вид:

$$u = \omega\Phi_1,\ v = \omega\Phi_2,$$

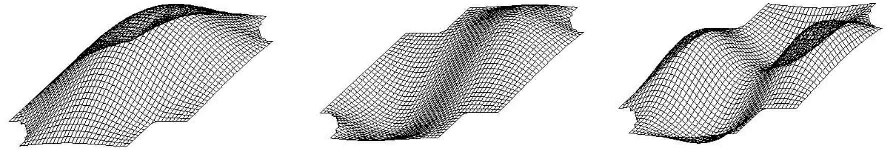
$$w = \omega\Phi_3 - \frac{\omega^2 A_1}{2(A_1^2+\omega^2)}\left[A_1(2D_1\Phi_3 + \Phi_3 D_2\omega) + 2A_2T_1\Phi_3 - \frac{1}{\rho}A_3\Phi_3\right].$$

Выражения для A_i, $i = \overline{1,3}$ имеют такой же вид, как и в [4], дифференциальные операторы D_1, D_2 и T_1 подробно описаны в монографии *В. Л. Рвачева* [6].

Здесь $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное [6] уравнение границы области, Φ_1, Φ_2, Φ_3 – неопределенные компоненты структуры решения. Построение границы области выполнено с помощью RFM.

Неопределенные компоненты в структурных формулах были аппроксимированы степенными полиномами до 7 степени для u и v, и до 8 степени для w. Это соответствует 36 координатным функциям для u и v, и 45 координатным функциям для w. Вычисление интегралов для *матрицы Ритца* выполнено с помощью 8-точечных *квадратурных формул Гаусса*, обобщенных на двумерный случай.

Первые три формы колебаний и соответствующие им линейные частоты $\Omega_i = \dfrac{\omega_{Li}a^2}{h}\sqrt{\dfrac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_2}}$ двухслойной сферической свободно опертой оболочки представлены на рис. 2.



$\Omega_1 = 70.5490$ $\Omega_2 = 82.1791$ $\Omega_3 = 91.1138$

Рисунок 2 – Формы и линейные частоты колебаний оболочки.

Резонансные кривые для свободных и вынужденных колебаний пластин, цилиндрических, сферических оболочек, а также оболочек с поверхностью гиперболического параболоида представлены на рис. 3. При этом поперечная нагрузка была выбрана в виде $\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t$.

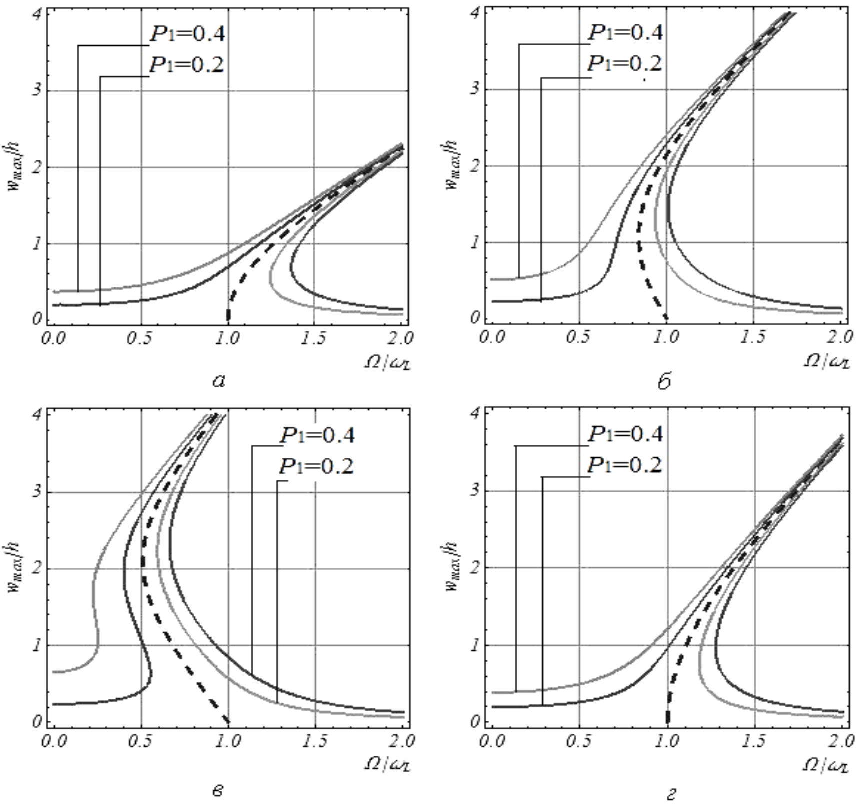


Рисунок 3 – Резонансные кривые колебаний двухслойной оболочки:
а) $R_x = R_y = \infty$ (пластина); б) $R_x = \infty$, $R_y / a = 10$;
в) $R_x / a = 10$, $R_x / R_y = 1$; г) $R_x / a = 10$, $R_x / R_y = -1$.

Как видно из рис. 3, скелетные кривые для цилиндрических и сферических оболочек имеют мягкий тип. При этом, чем больше нагрузка, тем резонансные кривые более удалены от соответствующей скелетной кривой.

Выводы. В статье предложен алгоритм исследования вынужденных колебаний многослойных пологих оболочек сложной формы в плане. Постановка задачи рассмотрена в рамках классической геометрически нелинейной теории многослойных пологих оболочек. С помощью предложенного подхода построены резонансные кривые для свободных и вынужденных колебаний многослойных пологих оболочек со сложной формой плана. Достоверность предложенного алгоритма подтверждена сравнением результатов, полученных в случае однослойных пологих оболочек прямоугольной формы с результатами, приведенными в литературе.

Список литературы: **1.** *Курпа Л.В., Будніков М.А.* Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – 51, №2. – С. 75-85. **2.** *Курпа Л.В.* Дослідження нелінійних вимушених коливань багатошарових пластин складної форми // Вісник НТУ «ХПІ», 13'2011. – с. 124–133. **3.** *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с. **4.** *Курпа Л.В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Х.: НТУ "ХПІ", 2009. – 408 с. **5.** *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. **6.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

Поступила в редколлегию 8.05.2012

УДК 519.2: 621.9.

Н.Ю. ЛАМНАУЭР, канд. техн. наук, доц., УИПА, Харьков

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ИЗДЕЛИЙ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ

Запропонована одномодальна чотирьохпараметрична модель розподілу розмірів виробів. Для цієї моделі одержані оцінки параметрів. Користуючись цією моделлю, розглянуто аналіз точності обробки виробів.

Предложена одномодальная четырёхпараметрическая модель распределения размеров изделий. Для этой модели получены оценки параметров. С использованием этой модели рассмотрен анализ точности обработки изделий.

The single-modal four-parameter model of the distribution of the sizes of articles is proposed. The estimations of the parameters are obtained for this model. With the use of this model the accuracy analysis of working articles is examined.