УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

НОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано метод наближеного розв'язання двоточкової крайової задачі для лінійного звичайного диференціального рівняння. Наближений розв'язок шукається у вигляді лінійної комбінації системи лінійно-незалежних функцій. Невідомі сталі у ньому знаходяться з умови найкращого наближення правої частини диференціального рівняння лінійною комбінацією функцій, що отримується застосуванням диференціального оператора крайової задачі до наближеного розв'язку. Наведено приклад.

Предложен метод приближенного решения двухточечных краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближенное решение в данном методе находятся из условия наилучшего приближения правой части дифференциального уравнения линейной комбинацией функций, получаемых применением дифференциального оператора краевой задачи к приближенному решению. Приведен пример.

The method approached solution of a two-dot boundary value problem for the linear differential equation is offered. The approached solution is searched in the form of a linear combination of system linearly-independent functions. Unknown constants are in him from a condition of the best approach of the right part of the differential equation a linear combination of the functions received by application of the differential operator of a boundary value problem to the approached solution. The example is resulted.

Вступ. Аналіз відомих методів розв'язання крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними дозволяє розділити їх на наступні типи:

- класичні методи [1], де наближений розв'язок крайової задачі отримується у вигляді скінченних або нескінченних сум відомих функцій (ортогональних поліномів, тригонометричних функцій, спеціальних функцій тощо), або у вигляді сингулярних інтегралів тощо;
- метод скінченних різниць [2], де наближений розв'язок крайової задачі отримується у вигляді таблиці значень у заданій системі точок області інтегрування;
- варіаційні та проекційні методи [3 – 7] та їх частинний випадок – метод скінченних елементів [8], де наближений розв'язок крайової задачі шукається у вигляді лінійної комбінації наперед вибраної системи лінійно-незалежних функцій, які точно задовольняють головним граничним умовам – алгебраїчних або тригонометричних поліномів, сплайнів, розв'язків однорідного рівняння [5] тощо, дивись також [8];
- метод скінченних елементів з оптимальним вибором базисних функцій, координат вузлів елементів та вузлових параметрів [9, 10] (в цьому випадку всі функції і всі параметри, що входять у структуру наближеного розв'язку,

не задаються наперед, а знаходяться з умови мінімізації відповідного критерію – функціоналу, відповідного поставленій крайовій задачі або якого-небудь іншого критерію);

- метод інтегральних співвідношень *А.О. Дородніцина* [11];
- метод зведення диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь – метод ДР *Л.В. Канторовича* [2];
- метод ЛІДР або метод НІДР – методи *О.М. Литвина* [9, 10] зведення диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь (лінійних або нелінійних, відповідно).

Останні три методи знаходять наближені розв'язки, що у все більшій мірі залежні від оператора крайової задачі і правої частини, причому метод ДР або метод інтегральних співвідношень А.О. Дородніцина можуть бути отримані як частинні випадки методу ЛІДР, метод ОМСЕ може розглядатися, як частинний випадок методу НІДР.

Згідно з відомим правилом обчислювальної математики, наближуючий оператор, що враховує більше властивостей наближуваної функції, може мати кращі апроксимативні характеристики. Це правило використовується, зокрема, при побудові алгоритмів без насичення [12, 13], при інтегруванні функцій з особливостями [14], у адаптивних схемах методу скінченних елементів [9, 10] (дивись також у роботі [15]), у яких базисні функції задаються, а вузли елементів згущуються навколо точок з особливостями за деяким законом тощо.

Постановка задачі. Задача полягає у розробці та дослідженні методу наближеного розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$Au\left(x\right)=f\left(x\right),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$u^{(s)}\left(0\right)=u^{(s)}\left(1\right),\quad s=\overline{0,n-1}, \tag{2}$$

$$Au\left(x\right):=\sum_{s=0}^{n}\left(-1\right)^{s}\frac{d^{s}}{dx^{s}}\left(p_{s}\left(x\right)\frac{d^{s}u}{dx^{s}}\right)=f\left(x\right)$$

у вигляді точного розв'язку крайової задачі (1) – (2) для наближеної правої частини, яка залежить від довільних сталих. А також передбачалося запропонувати метод знаходження вказаних довільних сталих.

Основні твердження роботи. Пропонується метод розв'язання крайової задачі для лінійних звичайних диференціальних рівнянь (1) – (2).

Метод полягає у виконанні наступних кроків:

Крок 1. Будуємо систему лінійно-незалежних функцій $\psi_k\left(x\right), s=\overline{0,N}$ з властивостями

$$\psi_k^{(s)}\left(0\right)=0, \psi_k^{(s)}\left(1\right)=0, s=\overline{0,n-1}, k=\overline{0,N}\ . \tag{3}$$

Крок 2. Знаходимо невідомий розв'язок задачі (1) – (2) у вигляді

$$u_N(x)=\sum_{k=0}^{N}C_k\psi_k(x)\,, \tag{4}$$

де невідомі сталі C_k, $k=\overline{0,N}$ знаходимо з умови найкращого наближення правої частини диференціального рівняння $f(x)$ лінійною комбінацією $\sum_{k=0}^{N}C_k\varphi_k(x)$ функцій

$$\varphi_k(x)=A\psi_k(x),k=\overline{0,N} \tag{5}$$

в нормі простору $L_2[0,1]:\|u\|_{L_2[0,1]}=\|u\|_2=\left(\int_0^1 u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$, або простору

$$W_2^q[0,1],1\le q\le n-1\,,\ W_2^q[0,1]=\left\{u(x):\sum_{s=0}^{q}\left\|u^{(s)}\right\|_2^2<\infty\right\},$$

тобто з умови

$$J_q(C)=\int_0^1\sum_{s=0}^{q}\left(f^{(s)}(x)-\sum_{k=0}^{N}C_k\varphi_k^{(s)}(x)\right)^2dx\to\min_C\,. \tag{5}$$

Теорема. *Наближений розв'язок $u_N(x)$ має такі властивості*:

1) *точно задовольняє граничні умови (2)*;
2) *точно задовольняє диференціальному рівнянню*

$$Au_N(x)=f_N(x),\ \textit{де}\ f_N(x)=\sum_{k=0}^{N}C_k\varphi_k(x)\,.$$

Доведення. Той факт, що формула (4) задовольняє граничним умовам (2) є наслідком того, що кожний доданок задовольняє умови (2), згідно з (3). Твердження 2) випливає з наступного ланцюжка тотожностей:

$$Au_N(x)=A\sum_{k=0}^{N}C_k\psi_k(x)=\sum_{k=0}^{N}C_kA\psi_k(x)=\sum_{k=0}^{N}C_k\varphi_k(x)=f_N(x)\,.$$

Теорема доведена.

Тобто, для похибки наближення $\left|u(x)-u_N(x)\right|$ маємо рівність $\left|u(x)-u_N(x)\right|=\left|f(x)-Au_N(x)\right|$ і її оцінка залежить від класу диференційованості функції $f(x)$ та від вибору функцій $\psi_k(x),s=\overline{0,N}$.

Приклад. Знайти запропонованим методом наближений розв'язок крайової задачі

$$\frac{d^2u}{dx^2}+a(x)u=f(x),\ 0<x<1;\ u(0)=0,\ u(1)=0,$$
$$a(x)=1+x(1-x),\quad f(x)=-2+\left[1+x(1-x)\right]x(1-x).$$

Точний розв'язок цієї крайової задачі: $u(x)=x(1-x)$.

Якщо використати функції $\psi_k(x)=x(1-x)x^k, k=0,1,...,N$, то метод дає $C_0=1,\ C_k=0,\ k=\overline{1,N}$.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому планується узагальнення методу на випадок розв'язання крайових задач для двовимірних областей складної форми.

Висновки. Запропоновано метод побудови наближених розв'язків крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь $Au(x)=f(x),\ 0<x<1$. У запропонованому методі $u(x)$ наближується у вигляді лінійної комбінації деякої лінійно-незалежної системи функцій $\psi_k(x),\ k=0,...,N$, що задовольняють граничним умовам крайової задачі. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації знаходяться з умови найкращого наближення (в нормі $L_2[0,1]$ або іншій нормі) правої частини $f(x)$ лінійною комбінацією функцій $\varphi_k(x)=A\psi_k(x),\ \ k=0,...,N$.

Список літератури: **1.** *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724с. **2.** *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с. **3.** *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 708 с. **4.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 510 с. **5.** *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в вычислительном анализе. Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 126 с. **6.** *Рвачев В.Л.* Метод R-функций и некоторые его приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 550 с. **7.** *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 349 с. **8.** *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с. **9.** *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – К.: Наук. думка, 2005. – 333 с. **10.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с. **11.** *Дородницин А.А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя//Журн. Прикладной механики и техн. Физики. – 1960. №3. С. 111-118. **12.** *Гаврилюк И.П., Макаров В.Л.* Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – К.: Ин-т матем. НАНУ, 2004. – 499 с. **13.** *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. – М.: Наука: Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1986. – 744 с. **14.** *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы высшей математики. Т.1. – Минск: Вышэйшая школа, 1972. – 584 с. **15.** *Diaz A.R., Kikuchi N., Taylor J.E.* A method of grid optimization for finite element method// Comp. methods in applied mechanics and engineering. V.41, 1983. P. 29-45.

Надійшла до редколегії 04.05.2012