УДК 519.6

О.О. ЛИТВИН, канд. фіз.-мат. наук, доц., УІПА, Харків;
С.І. КУЛИК, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.В. ТКАЧЕНКО, нач. відділу, ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя;
С.Ю. МАТВЄЄВА, аспірант, УІПА, Харків;
О.О. ЧЕРНЯК, аспірант, УІПА, Харків

ОПЕРАТОРИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЩО ЗБІГАЮТЬСЯ З НЕЮ НА ЗАДАНИХ ВІДРІЗКАХ ОБЛАСТІ НАБЛИЖЕННЯ

Запропоновано метод побудови оператора $s(f;x)$, що інтерполює функцію $f(x)$ однієї змінної і збігається з нею на заданих відрізках області наближення. Він може бути використаний для відновлення поверхонь між системою перетинних смуг. Досліджено його властивості.

Предложен метод построения оператора $s(f;x)$, который интерполирует функцию $f(x)$ одной переменной и совпадает с ней на заданных отрезках области приближения. Он может использоваться для восстановления поверхностей между системой пересекающихся полос. Сформулирована и доказана теорема о свойствах этого оператора.

The method of the building an operator $s(f;x)$, which interpolate $f(x)$ in given points and equal given functions on given sub internals is proposed. This method can be used to restore surfaces between a systems of intersecting bands. Formulate and prove a theorem about the properties of this operator.

Вступ. В працях [1] – [7] досліджувались оператори відновлення поверхні між смугами, якщо інформація про наближувану функцію задається на системі смуг (взагалі кажучи перетинних смуг). Цей метод наближення функцій двох змінних називається *методом інтерстрипації* (inter – між, stripe – смуга) і є частинним випадком *методу інтерлокації* [8] – [15]. У випадку, коли товщина смуг дорівнює нулю, тобто якщо $\beta_k = \alpha_k$, то смуги перетворюються в лінії. Таким чином, отримувана інформація про наближувану функцію задається її слідами на системі ліній, а між лініями потрібно відновити саму функцію.

На практиці часто виникають ситуації, коли деяка лінія задається дискретним набором точок (x_k, y_k), $k = \overline{1,m}$, і крім того відомо, що наближуюча лінія на деякому відрізку повинна мати наперед задану форму (наприклад, бути частиною кола, параболи тощо), а також мати неперервні похідні до деякого порядку $r \ge 0$. Така ситуація виникає, наприклад, при описі ліній поверхні деяких деталей авіадвигунів (лопаток турбін тощо).

Тому актуальною є задача побудови операторів наближення функцій $s(f;x)$, які на заданих відрізках мають задані аналітичні вирази, а між цими відрізками інтерполюють наближувану функцію у заданій системі точок.

Постановка задачі. Вважаємо, що функція однієї змінної $y = f(x)$, $f(x) \in C^r[0,1]$, $r \geq 0$, задається в точках $x = x_i$, $x = x_i$, $i = 1,2,...n$ $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$, а також припустимо, що функція $y = f(x)$ задана точно відповідними аналітичними виразами $\varphi_p(x)$, $p = \overline{1,n}$ на деяких інтервалах, що не включають вказані вузли інтерполяції. Задача полягає у побудові оператора $s(x) = s(f;x)$ з наступними властивостями:

$$s(x_i) = f(x_i), \ \ i = 0,1,....,n, \tag{1}$$

і, крім того, $s(x)$ збігається з функціями $\varphi_p(x), p = 1,...,m$ на кожному з інтервалів $\left[\alpha_p, \beta_p\right] \subset [0,1]$, $p = 1,...,n$, тобто:

$$s(x) = \varphi_p(x), \quad x \in \left[\alpha_p, \beta_p\right], \quad p = 1,...,n. \tag{2}$$

Для цього узагальнено метод інтерстрипації функцій [1–3].

Основні твердження роботи. Оператор, що розв'язує поставлену задачу, будемо шукати у вигляді

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x), x \in [0, \alpha_1), \\ \varphi_1(x), x \in [\alpha_1, \beta_1], \\ s_1(x), x \in [\beta_1, \alpha_2), \\ ... \\ s_{k-1}(x), x \in [\beta_{k-1}, \alpha_k), \\ s(x) = \varphi_k(x), x \in [\alpha_k, \beta_k], \\ s_k(x), x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}], \\ ... \\ s(x) = \varphi_n(x), x \in [\alpha_n, \beta_n], \\ s_n(x), x \in (\beta_n, 1], \end{cases} \tag{3}$$

де функції $s_p(x), p = \overline{0,n},$ – поліноми або сплайни, які визначаються з наступних умов.

Якщо $0 = x_0 < x_1 < ... < x_{i_0} < \alpha_1$ то $s_0(x)$ повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями:

$$\begin{aligned} & s_0(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, i_0}; \\ & s_0^{(p)}(\alpha_1) = \varphi_1^{(p)}(\alpha_1), p = \overline{0, r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Якщо $\beta_1 < x_{i_0+1} < x_{i_0+2} < ... < x_{i_1} < \alpha_2$ то $s_1(x)$ повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями

$$\begin{aligned}
&s_1^{(p)}(\beta_1)=\varphi_1^{(p)}(\beta_1),\, p=\overline{0,r},\\
&s_1(x_i)=f(x_i),i=\overline{i_0+1,i_1},\\
&s_1^{(p)}(\alpha_2)=\varphi_1^{(p)}(\alpha_2),\, p=\overline{0,r}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Аналогічним чином можна записати умови для побудови відповідних поліномів (або сплайнів) на інтервалах $[\beta_2,\alpha_3]$, $[\beta_3,\alpha_4],...,[\beta_{n-1},\alpha_n]$.

Якщо $\beta_{k-1}<x_{i_{k-1}+1}<x_{i_{k-1}+2}<...<x_{i_k}<\alpha_{i_k}$, поліном $S_k(x)$ $x\in[\beta_k,\alpha_{k+1}]$ буде визначатися з умов

$$\begin{aligned}
&s_k(x_i)=f(x_i),i=\overline{i_k+1,i_{k+1}},\\
&s_k^{(p)}(\beta_k)=\varphi_k^{(p)}(\beta_k),\, p=\overline{0,r},\\
&s_k^{(p)}(\alpha_{k+1})=\varphi_k^{(p)}(\alpha_{k+1}),\, p=\overline{0,r.}
\end{aligned} \tag{6}$$

На кінець запишемо відповідну формулу на інтервалі $[\beta_n,1]$.

Якщо $x_{i_n}<x_{i_n+1}<...<x_m=1$, то $s_n(x)$ повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями

$$\begin{aligned}
&s_n^{(p)}(\beta_n)=\varphi_1^{(p)}(\beta_n),\, p=\overline{0,r};\\
&s_n(x_i)=f(x_i),i=\overline{i_n,m}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Теорема. *Для кожної* $f(x)\in C^r[0,1]$ *функція* $s(x)$, *що визначена у вигляді формули (3)*, *в якій* $s_0(x),s_1(x),...,s_n(x)$ *визначаються формулами (4) – (7)*, *задовольняє властивостям (1)*, *(2) і є* r *раз диференційовною функцією*: $s(x)\in C^r[0,1]$.

Доведення. Згідно з означенням сплайну (3) доведення властивостей (1) та (2) витікає з алгоритму побудови функцій $s_0(x),s_1(x),...,s_n(x)$. Тому доведемо лише те, що $s(x)\in C^r[0,1]$. Для доведення цієї властивості слід довести, що

$$\begin{aligned}
&s^{(p)}(\alpha_j-0)=s^{(p)}(\alpha_j+0)=s^{(p)}(\alpha_j),\, p=\overline{0,r},\, j=\overline{1,n},\\
&s^{(p)}(\beta_j-0)=s^{(p)}(\beta_j+0)=s^{(p)}(\beta_j),\, p=\overline{0,r},\, j=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Якщо врахувати, що

$$s^{(p)}(\alpha_j-0)=s_{j-1}^{(p)}(\alpha_j),\;\; s^{(p)}(\alpha_j+0)=s^{(p)}(\alpha_j)=f^{(p)}(\alpha_j),\; p=\overline{0,r},\; j=\overline{1,n},$$

$$s^{(p)}(\beta_j-0)=s_{j+1}^{(p)}(\beta_j)=f^{(p)}(\beta_j),\;\; s^{(p)}(\beta_j+0)=s_j^{(p)}(\beta_j),\; p=\overline{0,r},\; j=\overline{1,n},$$

то рівності (8) стають очевидними.

Теорема доведена.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому планується виконати узагальнення запропонованого методу на випадок наближення функцій багатьох змінних.

Висновки. Запропоновано метод побудови операторів $s(f;x)$, що інтерполюють функції $f(x) \in C[a,b]$ у заданій системі точок і збігаються з $f(x)$ на заданій системі підінтервалів інтервалу $[a,b]$. Такі оператори можуть бути використані для наближення поверхонь в методі інтерстрипації функцій, заданих на системі паралельних або перетинних смуг, при описі поверхонь деяких лопаток авіадвигунів тощо. Досліджено їх властивості.

Список літератури **1**. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с. **2.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544с. **3.** *Литвин О.М. Матвєєва С.Ю.* Метод восстановления поверхности между полосами при помощи информации о поверхности на взаимно перпендикулярных полосах //Международный научный журнал Управляющие системы и машины информационные технологии. № 1 – 2011 с. 33-40. **4.** *Литвин О.М., Матвєєва С.Ю.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій багатьох змінних та її застосування у картографії // Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: 36. наук. пр. – К.: ДНВП «Картографія», 2005. – 2. – С. 22-24. **5.** *Литвин О.М., Матвєєва С.Ю., Межуєв В.І.* Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // УСиМ. – 2010. – №3. – С. 33-47. **6.** *Матвєєва С.Ю.* Метод побудови цифрових карт за допомогою інтерлінації та інтерфлетації функцій // Питання оптимізації обчислень, 2005. – 145 с. **7.** *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – № 4. – С. 61-82. **8.** *Рвачев В.Л., Толок А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций // Вісн. Запоріз. д. ун-ту. – Запроріжжя, 2000. – №2. – С. 119-130. **9.** *Рвачев В.Л., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Построение уравнений локусов в 3D с помощью R-функций //Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – №2. – С. 158-164. **10.** *Рвачев В.Л., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Интерлокационные формулы при моделировании задач Плато и Софи Жермен // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №3. – С. 126-128. **11.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В.* Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрий // Мат. методы и физ.-мех.поля. – 1988. – 41, №1. – С 146-159. **12.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.Н., Шапиро В.* Обобщенные интерполяционные формулы Лагранжа - Эрмита на произвольных локусах (интерлокационные операторы теории R-функций) // Пробл. машиностроения. – 1998. – т. 1, №3-4. – С. 150-166. **13.** *Рвачев В.Л., Шапиро В., Шейко Т.И.* Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией // Электромагниты, волны и электронные системы. – 1999. – т.4, № 4. – С. 4-20. **14.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И.* Введение в теорию R-функций // Пробл. машиностроения. – 2001. – т.4, №1-2. – С. 46-58. **15.** *Максименко-Шейко К.В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей .// монография. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

Надійшла до редколегії 27.03.2012