

М.В. МАКСИМОВ, д-р техн. наук, проф., ОНПУ, Одесса;
А.И. БРУНЕТКИН, канд. техн. наук, ст. преп., ОНПУ, Одесса;
Т.С. ДОБРОВОЛЬСКАЯ, аспирант, ОНПУ, Одесса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ЕМКОСТЯХ СЛОЖНЫХ ФОРМ

Наведено простий (алгебраїчний) вираз, який було отримано за допомогою методу інтегральних коефіцієнтів, для визначення власної частоти коливань рідини з вільною поверхнею в ємностях складних форм. На прикладі циліндричної вертикальної ємності наведено збіжність структури отриманого виразу та коефіцієнтів, що входять у нього, із відповідними величинами при рішенні аналогічної задачі в варіаційній постановці. Для випадку коливань рідини між коаксіальними циліндрами визначена в загальному вигляді величина заповнення, при якій перестає оказувати вплив нижнє днище. Виконано порівняння отриманих результатів з рішенням варіаційної задачі. Визначено вплив нижнього днища ємностей на власну частоту коливань рідини.

Приведено простое (алгебраическое) выражение, полученное с помощью метода интегральных коэффициентов, для определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях сложных форм. На примере цилиндрической вертикальной емкости показано совпадение структуры полученного выражения и коэффициентов, входящих в него, с соответствующими величинами при решении аналогичной задачи в вариационной постановке. Для случая колебаний жидкости между коаксиальными цилиндрами определена в общем виде величина заполнения, начиная с которой перестает оказывать влияние нижнее днище. Выполнено сравнение полученных результатов с решением вариационной задачи. Определено влияние нижнего днища емкостей на собственную частоту колебаний жидкости.

The simple (algebraic) expression received with the help of a method of integrated factors for definition of own frequency of fluctuations of a liquid with a free surface in capacities of complex forms is resulted. By the example of cylindrical vertical capacity concurrence of structure of the received expression and the factors which are included in it with corresponding sizes is shown at the decision of a similar task in variation statement. In case of fluctuations of a liquid between coaxial cylinders, the size of filling from which the low bottom ceases to influence is determined in a general view. Comparison of the received results with the decision of a variation task is executed. Influence of the low bottom of capacities on own frequency of fluctuations of a liquid is determined.

Введение. Задачи, связанные с определением собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм, остаются актуальными на протяжении уже длительного времени. Проблеме стоячих волн в ограниченном объеме жидкости со свободной поверхностью внутри неподвижного бассейна одной из первых была посвящена работа М.В. Остроградского [1], представленная им Парижской Академии наук в 1826 г. Работа [2] Крылова А.Н., о которой в 1913 году он прочел доклад «О цистернах Фрама для умерения качки судов» в Русском физико-химическом обществе, лежит в основе теории успокоителей качки корабля. Решение целого ряда задач опубликовано в связи с другими вопросами теории корабля и

гидростроительства [3,4]. Проблемы, связанные с движением жидкости со свободной поверхностью освещались и при решении задач транспортировки жидкостных грузов [5-7], при действии на емкости сейсмических нагрузок [8-10]. Особо большое внимание на решении подобных задач было сосредоточено при проектировании авиационной и ракетной техники [11-18]. Большое количество результатов исследований опубликовано в трудах Всесоюзных конференции по теории оболочек и пластин, семинаров («Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью», Томск), симпозиумов («Колебания упругих конструкций с жидкостью», Новосибирск). Исследовалось движение жидкости в емкостях в виде прямоугольных параллелепипедов, цилиндрических, конических, торообразных емкостях, при наличии центральных тел, в емкостях вращения произвольной формы и т.д. Использовались аналитические, численно-аналитические, численные, экспериментальные методы решения. Не потерял интерес к этим вопросам и в настоящее время, что проявляется в продолжающейся публикации статей [7], [18-20], защите диссертаций [21-23], книг [15]. Столь пристальное и длительное внимание свидетельствует о важности исследуемых явлений. Изобилие же публикаций говорит о сложности решаемых задач и отсутствии до настоящего времени ответов на ряд, в первую очередь практически важных, вопросов.

Во многих работах описывается лишь метод, с помощью которого задача может быть решена. При появлении необходимости в результатах такого решения потребитель (исследователь, проектировщик) вынужден самостоятельно решать задачу, используя непростые методы. Если же задача доведена до решения, то, зачастую, результаты выступают лишь в качестве иллюстрации возможностей метода или не выполнено сравнение полученных результатов и экспериментальных данных. В ряде работ сравнение результатов расчетов и экспериментальных данных проводится на качественном уровне без количественной оценки их адекватности.

К редкому исключению можно отнести результаты экспериментальной работы [24], в которой указан метод проведения эксперимента, записана аппроксимационная зависимость для обрабатываемых экспериментальных данных, указано среднее квадратичное отклонение экспериментальных значений от рассчитываемых по предлагаемой зависимости. К сожалению, в этой работе исследовалась только одна форма емкости и одно ее расположение. Кроме того, в основе аппроксимационной зависимости лежит статистическая модель, что затрудняет ее использование в экспериментальных исследованиях для других форм емкостей.

При проектировании технических систем в ряде случаев достаточно выполнить лишь оценочные расчеты с использованием выражений типа приведенных в [24] не прибегая к точному, дорогостоящему решению. В тоже время величина вносимой при таком подходе погрешности должна быть оценена. В первую очередь это относится к начальным стадиям проектирования. Кроме того, в проектно-конструкторских, поверочных расчетах используе-

мые исходные данные всегда получены с определенной погрешностью. Если собственные частоты колебаний жидкости в этих расчетах являются не единственными исходными данными и погрешность их определения не превосходит погрешности других данных, то и в этом случае использование упрощенных выражений для их вычисления будет обосновано.

При таком подходе для описания процессов используются математические модели, относящиеся к верхним уровням иерархической структуры модели [25], на которых законы сохранения, переноса, состояния, а также замыкающие соотношения и краевые условия входят в интегральной форме. Для решения записанных в интегральной форме уравнений может быть применен метод интегральных коэффициентов (МИК) [26].

Интегральный коэффициент (ИК) $\xi_{P_i, Q}$ некоторой искомой переменной P_i в пространстве Q (геометрические размеры – время) определяется соотношением

$$\zeta_{P_i, Q} = \frac{\delta \tilde{P}_i}{P_i^\Delta} \in [0, 1]; \quad \delta \tilde{P}_i = \frac{1}{V_{эф}} \cdot \int_{Q_{эф}} \delta P_i(q) \cdot dq; \quad (1)$$

$$\delta P_i = P_i - P_{i \min}; \quad P_i^\Delta = P_{i \max} - P_{i \min}; \quad Q_{эф} \in Q;$$

где \tilde{P}_i – среднеинтегральная величина в пространстве Q ; $V_{эф}$ – объем подпространства $Q_{эф}$, в котором δP_i имеет существенное значение; $P_{i \min}$, $P_{i \max}$ – минимальное и максимальное значения величины P_i соответственно.

Интегральный коэффициент пространства или отдельных его подпространств определяется следующим образом

$$\xi_{Q_{эф}} = \frac{V_{эф}}{\prod_j q_{j \Delta}^\Delta} \in [0, 1]; \quad q_j^\Delta = q_{j \Delta \min}^\Delta; \quad (2)$$

где $V_{эф}$ – объем эффективного пространства; $\prod_j q_{j \Delta}^\Delta$ – объем куба, охватывающего эффективное пространство.

Из записанного выше следует, что интегральные коэффициенты ζ и ξ являются нормированными величинами, характеризующими полноту переменной P_i в пространстве $V_{эф}$ и полноту эффективного пространства в пространстве куба с гранями $q_{j \Delta}^\Delta$.

Используя ИК, уравнения сохранения для любой области пространства Q можно записать в форме алгебраических уравнений относительно масштабов переменных P_i^Δ и координат q_j^Δ .

$$\sum_i P_i^\Delta \cdot \zeta_{PQ} \cdot \xi_Q \cdot \prod_j q_j^\Delta = 0. \quad (3)$$

Через эти масштабы можно выразить любой интеграл, входящий в рассматриваемую ММ.

Для предварительных результатов ИК могут быть оценены на интуитивном уровне или методом экспертных оценок. Для более точных результатов ИК (а точнее их комплексы) могут быть определены из немногочисленных экспериментов.

Описание расчётного метода. Рассмотрим движение жидкости со свободной поверхностью. В качестве примера на рис. 1 представлена картина движения жидкости в вертикальной цилиндрической емкости, а так же характерные размеры и соотношения, значимые для рассматриваемого процесса. Как показывают экспериментальные исследования и расчеты, существует $h \geq h_{эф}$, при которой величина заполнения емкости (глубина) перестает оказывать влияние на характер движения свободной поверхности (частоту колебаний). Если, например, рассматривать колебания свободной поверхности жидкости без ее разрушения в вертикальной цилиндрической емкости (соответствует отклонению поверхности от положения равновесия до 400), $h_{эф}$ приблизительно равно радиусу емкости. Тогда в обезразмеренном виде можно считать, что

$$\bar{h}_{эф} = \frac{h_{эф}}{l_2} = \begin{cases} \bar{h}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1, \end{cases} \quad (4)$$

η^Δ , v^Δ – масштабы амплитуды и скорости колебаний жидкости; $V_{эф}$, $h_{эф}$ – эффективные объем и глубина колебаний жидкости; l_2 , l_3 – характерные размеры свободной поверхности в направлении осей x2 и x3 (перпендикулярно плоскости чертежа) соответственно; Σ , Σ' – следы свободной поверхности при движении и невозмущенном положении жидкости; М – след меридиональной плоскости.

Пренебрегая диссипацией энергии при колебании жидкости, можно получить верхнюю оценку частоты колебаний. Закон сохранения энергии для колебаний можно записать в виде

$$\Delta K = \Delta U, \quad (5)$$

где ΔK – изменение кинетической энергии; ΔU – изменение потенциальной энергии.

Полагая минимум потенциальной энергии при $\eta = 0$, а минимум кинетической

тической при $\nu = 0$, получим

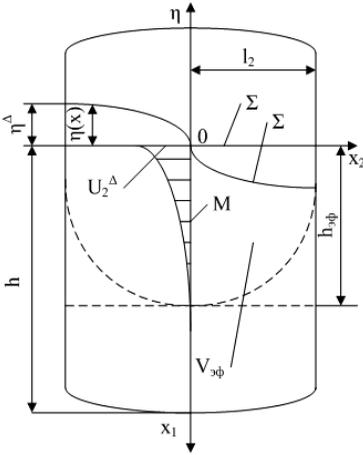


Рисунок 1 – Характерная картина колебаний жидкости в емкости.

$$\Delta K = \rho \cdot \int_V \frac{\nu^2}{2} dV; \quad (6)$$

$$\Delta U = \rho \cdot ng \iint_{S_\Sigma} \frac{\eta^2}{2} dx_2 dx_3;$$

С учетом (1) и (2) выражения (6) записываются в виде

$$\rho \cdot \int_V \frac{\nu^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \left(\nu^\Delta \cdot \zeta_{\nu_2 V_{эф}} \right)^2 \times \zeta_{\nu_{эф}}^\xi \cdot h_{эф} \cdot 2l_2 \cdot 2l_3; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{ng}{2} \iint_{S_\Sigma} \eta^2 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = \\ = \frac{\rho \cdot n_1 g}{2} \left(\eta^\Delta \cdot \zeta_{\eta S_\Sigma} \right)^2 \cdot \zeta_{S_\Sigma}^\xi \cdot 2l_2 \cdot 2l_3; \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь g – ускорение свободного падения; n – перегрузка.

В уравнении (7) учтено, что интегрировать практически нужно не по всему объему жидкости, а только по его части – $V_{эф}$, где скорость жидкости имеет существенное значение.

Приравняв уравнения (7) и (8) в соответствии с (5), получим

$$\left(\frac{\eta^\Delta}{\nu^\Delta} \right)^2 = \frac{\zeta_{\nu_2 V_{эф}}^2 \cdot \zeta_{\nu_{эф}}^\xi \cdot h_{эф}}{ng \cdot \zeta_{\eta S_\Sigma}^2 \cdot \zeta_{S_\Sigma}^\xi} \Rightarrow \frac{\eta^\Delta}{\nu^\Delta} = \frac{\zeta_{\nu_2 V_{эф}}}{\zeta_{\eta S_\Sigma}} \cdot \sqrt{\frac{\zeta_{\nu_{эф}}^\xi \cdot h_{эф}}{\zeta_{S_\Sigma}^\xi \cdot ng}}. \quad (9)$$

Закон сохранения массы может быть записан в виде

$$\int_t^{t+T/4} \iint_S \nu \cdot dt \cdot dx_1 \cdot dx_3 = \frac{1}{2} \iint_{S_\Sigma} |\eta| \cdot dx_2 \cdot dx_3. \quad (10)$$

Последнее уравнение выражает то положение, что за четверть периода колебаний через контрольную поверхность S_m (сечение массы жидкости меридиональной плоскостью) пройдет объем жидкости, равный половине суммы увеличения объема ее, с одной стороны, и уменьшения с другой. С использованием ИК это уравнение можно записать в виде:

$$\nu_2^\Delta \cdot \zeta_{\nu_2 S_m T/4} \cdot \frac{T}{4} \cdot \zeta_{S_m}^\xi \cdot h_{эф} \cdot 2l_3 = \frac{1}{2} \eta^\Delta \cdot \zeta_{\eta S_m} \cdot \zeta_{S_\Sigma}^\xi \cdot 2l_2 \cdot 2l_3 \quad (11)$$

или

$$\frac{\eta^\Delta}{\nu_2^\Delta} = \frac{\zeta_{\nu_2 S_M T/4} \cdot T \cdot \xi_{S_M} \cdot h_{\text{эф}} \cdot l_3}{4 \cdot \zeta_{\eta S_M} \cdot \xi_{S_\Sigma} \cdot l_2 \cdot l_3}. \quad (12)$$

Здесь T – период колебаний свободной поверхности жидкости.

Учитывая (9) из (12) следует:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{ng}{l_2}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{l_2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta_{\nu_2 S_M T/4}}{\zeta_{\nu V_{\text{эф}}}} \cdot \frac{\xi_{S_M}}{\sqrt{\xi_{V_{\text{эф}}} \xi_{S_\Sigma}}}$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{l_2}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{l_2}} \cdot k_\omega, \quad (13)$$

$$k_\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta_{\nu_2 S_M T/4}}{\zeta_{\nu V_{\text{эф}}}} \cdot \frac{\xi_{S_M}}{\sqrt{\xi_{V_{\text{эф}}} \xi_{S_\Sigma}}}. \quad (14)$$

Если в выражении (11) учесть, что $\xi_{S_\Sigma} \cdot 2l_2 \cdot 2l_3$ отображает площадь сечения и для цилиндрической емкости может быть записано в виде $\pi \cdot R^2$, а составляющая $h_{\text{эф}} \cdot 2l_3 = h_{\text{эф}} \cdot 2R$, то выполнив преобразования (11), (12), (13), (14) получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{R}} \cdot k_\omega \quad (15)$$

с таким же выражением для k_ω , как и в (14). Здесь R – радиус емкости.

Как отмечалось выше (4) при $h_{\text{эф}} \geq R$ в выражении (15) можно положить $h_{\text{эф}} / R = 1$. В противном случае $h_{\text{эф}} / R$ может быть аппроксимировано выражением $1 - e^{-k_\phi \bar{h}}$, где $\bar{h} = h_{\text{эф}} / R$, k_ϕ – коэффициент формы емкости

Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{\bar{h}_{\text{эф}}} \cdot k_\omega, \quad (16)$$

где

$$\bar{h}_{\text{эф}} = \begin{cases} 1 - e^{-k_\phi \bar{h}}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1. \end{cases} \quad (17)$$

Такой подход может быть применен для емкостей различных форм. Коэффициент k_ω может быть определен путем оценки каждой из входящих в его выражение составляющих величин. Но проще и точнее определить k_ω и

k_ϕ , если провести немногочисленные эксперименты и обработать их результаты с помощью выражения (16). Соответствующие результаты приведены в таблице.

Для сравнения рассмотрим результаты расчета для вертикального цилиндра, полученные с помощью вариационного метода [15], и с помощью выражения (16). Из [15] следует

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{th\left(\varepsilon_i \cdot \frac{h}{R}\right)} \cdot \sqrt{\varepsilon_i}. \quad (18)$$

Здесь ε_i — коэффициенты, входящие в функцию Бесселя 1-го рода 1-го порядка, являющуюся составной частью решения исходного дифференциального уравнения; i — номер тона колебаний.

Для первых четырех тонов приведены следующие значения:

$$\varepsilon_1 = 1.84, \quad \varepsilon_2 = 5.33, \quad \varepsilon_3 = 8.54, \quad \varepsilon_4 = 11.71. \quad (19)$$

Сравнение выражений (16) и (18) показывает, что структура их одинакова. Первый множитель одинаков для обоих выражений. Третий множитель является коэффициентом формы и для первого тона колебаний

$$\sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{1.84} = 1.356,$$

что практически совпадает с $k_\omega = 1.36$ (это величина из второго пункта таблицы). Второй множитель зависит от величины относительного заполнения и при увеличении его, начиная с некоторого значения, становится равен 1. Как видно из рис. 1 оба метода дают для этой величины практически равные значения $\bar{h} = h/R = 1$. Но при $\bar{h} < 1$ результаты решения с использованием вариационных методов (18) оказываются меньшими, чем результаты, получаемые с помощью метода интегральных коэффициентов (16). Учитывая, что (16) является аппроксимацией экспериментальных данных, можно говорить о том, что решение вариационной задачи для рассматриваемого случая дает заниженные результаты. Так в рабочем диапазоне для выражения (16) максимальное отклонение при $\bar{h} = 0.4$ составляет 14%.

Пример использования метода. Для демонстрации возможностей МИК определим с его помощью собственные частоты колебаний свободной поверхности жидкости в емкости более сложной формы — между коаксиальными цилиндрами.

Положим R — радиус наружной емкости, r — радиус внутренней емкости, h — глубина заполнения. Также как и для вертикальной цилиндрической емкости, в (11) заменим комплекс $\xi_{S_\Sigma} \cdot 2l_2 \cdot 2l_3$, отображающий площадь се-

чения области движения жидкости, на $\pi(R^2 - r^2)$ – площадь сечения горизонтальной плоскостью области между коаксиальными цилиндрами, а $h_{\text{эф}} \cdot 2l_3$ на $h_{\text{эф}} \cdot 2(R-r)$ – площадь сечения вертикальной плоскостью области между коаксиальными цилиндрами до эффективной глубины. Выполнив преобразования (12), (13), (14), получим выражение, по структуре аналогичное (15):

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{(R+r)}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{(R+r)}} \cdot k_{\omega}. \quad (20)$$

По аналогии с вертикальной цилиндрической емкостью можно предположить, что

$$\bar{h}_{\text{эф}} = \frac{h_{\text{эф}}}{R+r} = \begin{cases} \bar{h}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1. \end{cases} \quad (21)$$

что на качественном уровне подтверждается результатами расчета с помощью вариационного метода, представленными в графическом виде (рис.2) [15] для емкости $R = 1$ м, $r = 0.4$ м.

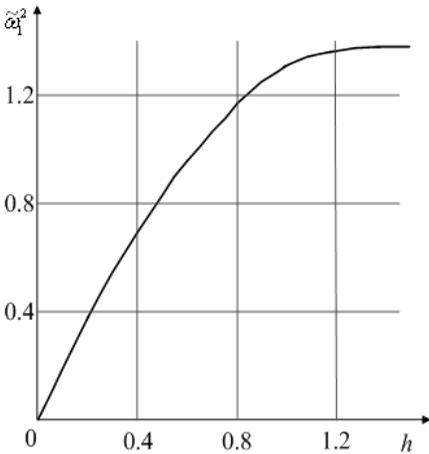


Рисунок 2 – Влияние глубины заполнения на частоту собственных колебаний жидкости между коаксиальными цилиндрами.

При выводе (20) не делалось никаких дополнительных допущений по сравнению с расчетами для вертикальной цилиндрической емкости. Более того при $r \rightarrow 0$ выражение (20) должно переходить в (15) и (16). Следовательно, можно предположить, что при расчете частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости между коаксиальными цилиндрами с помощью (17) и (20), коэффициенты k_{ϕ} и k_{ω} совпадают с аналогичными величинами для емкости в виде вертикального цилиндра. Сравнение данных позиций 2 и 7 таблицы подтверждает это предположение. Расхождение в величине

k_{ω} ($\sim 2\%$) можно отнести на счет точности экспериментальных исследований.

Таблица

Значение коэффициентов для расчета собственных частот колебаний жидкости
в емкостях.

№	Форма емкости, положение и направление воздействий	k_ϕ	k_ω	Закон распределения нормированного отклонения расчетных результатов от экспериментальных
1	Прямоугольный прямой параллелепипед, боковые грани вертикальны, вдоль боковой грани, $\bar{h} \geq 0.3$	3,67	1,26	(0,011; 0,00042)
2	Круговой цилиндр, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,29	1,36	(0; 0,00064)
3	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, вдоль оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 3$	3,5	1,6	(0; 0,0028)
4	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, поперек оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 1.8$	2,43	1,29	(0; 0,00037)
5	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора 20° , поперек оси	5	1,21	(0; 0,000676)
6	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора 50° , поперек оси	7,57	0,905	(0; 0,000525)
7	Коаксиальные круговые цилиндры, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,3	1,39	(0,02; 0,001)

Выводы. С помощью метода интегральных коэффициентов (МИК) получено выражение для расчета собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм. Необходимые для его использования коэффициенты определяются из немногочисленных экспериментов.

Структуры выражений, полученных с помощью МИК и вариационного метода, совпадают. Сравнение результатов расчетов на примере емкости в виде вертикального цилиндра показывает их совпадение для больших заполнений и занижение результатов решения вариационной задачи по сравнению с МИК (и с экспериментальными данными).

Список литературы: 1. *Остроградский М.В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне. – В книге: Избранные труды. 1958. 2. *Крылов А.Н.* О боковой качке корабля – М. –

Л.:Военмориздат, 1942. – 172 с. **3. Мусеев Н.Н.** Динамика корабля, имеющего жидкие грузы – Изв. АН СССР, ОТН, – N 7, – 1954. **4. Мархаиов Л.М.** Колебания и устойчивость твердой оболочки с идеальной жидкостью на упругих опорах. (К теории карусельного гидроканала) // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1962. – N 6. – С. 81-84. **5. Горьков П.Н.** Динамическое действие колеблющейся жидкости на цистерны при неполном наливе // Изв. АН СССР, ОТН, – N 2, 1954. – С. 19-24. **6. Золотенко Г.Ф.** К динамике гидроупругой системы "прямоугольный бак — жидкость" // Механика твердого тела. – N 5, – 1996, – С. 155-161 **7. Борисов Д.И.** Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками// *Борисов Д.И., Руднев Ю.И.* – Харьковский национальный университет. Прикладна гідромеханіка. –2010. –Т.12, –№2, – С. 8-19. **8. Chiba M.** Nonlinear hydro elastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom containing liquid // *Chiba M.* – Int. J. of nonlinear mechanics, V.31.– N 2. – 1996.– P. 155-165. **9. Бурбраер А.Н.** Расчет конструкций на сейсмостойкость. – СПб.: Наука, – 1998. **10. Петров А.А.** Оценка сейсмической реакции резервуаров с жидкостью // Промышленное и гражданское строительство. 1993, – № 5. **11. Нариманов Г.С.** О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикладная математика и механика – Т. XX, – 1956, – С. 21-38 **12. Мусеев Н.Н.** Вариационные задачи теории колебаний жидкости и тела с жидкостью. «Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью». – М.:Издательство ВЦ АН СССР, – 1962. **13. Шмаков В.П.** Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким наполнением // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. – 1964. – N 1. – С. 170-174. **14. Черноусько Ф.Л.** Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М. – 1969. – 230 с. **15. Колесников К.С.** Динамика ракет: Учебник для вузов. – 2-е изд., исправл. и доп. – М.: Машиностроение, 2003. – 520 с. **16. Микушев Г. Н., Рабинович Б. И.** Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 563 с. **17. Луковский И.А.** Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с. **18. Лимарченко О.С., Ясинский В.В.** Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с. **19. Лукьянова И.Э.** Моделирование воздействий землетрясений на стальные вертикальные резервуары с использованием программного пакета FLOWVISION. – Уфимский государственный нефтяной технический университет. Нефтегазовое дело. – Уфа, 2010. **20. Евстигнеева Н.А.** Свободные колебания жидкости в бассейне с параболическим профилем дна. – Морской гидрофизический институт НАН Украины. Системы контроля окружающей среды. – Севастополь, 2007. **21. Кьи Твин.** Колебания авиационных конструкций с отсеками, частично заполненными жидкостью. – Дисс. на соиск. уч. ст. к.т.н., – Москва, 2005. **22. Кутеева Г.А.** Колебания жидкости внутри прямоугольного двигающегося сосуда с упругой вставкой на стенке. – Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н., – Санкт-Петербург, 2002. **23. Штоколова М.Н.** Численное моделирование течений жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов. – Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н., – Томск, 2008. **24. Даурских Ю. К., Иванов О. П., Козлов В. Г и др.** Исследование собственной частоты колебаний жидкости в горизонтальной цилиндрической емкости методом рационального планирования эксперимента. – В кн. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сб. научных докладов IV симпозиума. Новосибирск, 1980, – С. 108-110. **25. Накозин В.Н.** Системный подход в построении моделей процессов. // В сб.: Динамика машин и рабочих процессов. – №237. – Челябинск: ЧПИ, 1979. **26. Накозин В.Н.** Метод интегральных коэффициентов в построении и решении математических моделей процессов. //Сб. науч. тр.: Динамика машин и рабочих процессов – Челябинск: ЧПИ, 1983. – С. 72-78.

Поступила в редколлегию 01.03.2012