

*Т.В.ШМАТКО*, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХП»

## **ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ОРТОТРОПНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ**

Запропоновано метод визначення критичного навантаження для ортотропних пологих оболонок, навантажених в серединній площині, який базується на застосуванні теорії R-функцій та варіаційних методів. Розроблені алгоритми враховують неоднорідний докритичний стан оболонки. Показано порівняння одержаних чисельних результатів з відомими результатами для ортотропних оболонок із прямокутним та квадратним планом. Чисельні результати представлено у вигляді таблиць для критичного навантаження та власних частот коливань.

Предложен метод нахождения критической нагрузки для ортотропных пологих оболочек, нагруженных в срединной поверхности. В основу метода положено использование теории R- функций и вариационных методов. Разработанные алгоритмы предусматривают расчет неоднородного докритического состояния оболочки. Показано сравнение полученных численных результатов с ранее известными для ортотропных оболочек прямоугольного и квадратного плана. Численные результаты представлены в виде таблиц для критической нагрузки и собственных частот сжимаемых оболочек.

Method of investigation buckling of the orthotropic shallow shells subjected to load in a middle surface is proposed. The method is based on R-functions theory and variational methods. Inhomogeneous prebuckling state is calculated and taken into account by developed approach. Comparison of obtained results with known for shallow shells with rectangle and square planform confirms the validation of the worked out method. Shallow shells with complex planform are considered. Obtained numerical results are presented as table of buckling load and natural frequencies.

**Вступ.** Широке використання пологих оболонок та пластин, виготовлених із композитних матеріалів, в будівельній, машинобудівній, авіаційній та інших галузях промисловості ставить перед вченими проблему, пов'язану із розробкою ефективних методів розрахунку композитних елементів тонкостінних конструкцій на стійкість, міцність та довговічність. Дана робота присвячена розробці метода дослідження стійкості пологих оболонок, що знаходяться під дією статичного навантаження в серединній площині.

З проведеного аналізу літератури, присвяченій цій проблемі, можна зробити висновок, що це питання далеко не остаточно розроблено, особливо для оболонок довільної форми плану та різних типів граничних умов, а також для оболонок змінної товщини. Більшість результатів одержано для пологих оболонок з прямокутним планом [1 – 4], та є декілька публікацій, в яких розглянуто скривлені панелі з вільними прямокутними отворами [5, 6]. Практично у всіх роботах для розв'язання задачі використовується метод скінчених елементів (МСЕ) або метод граничних елементів (МГЕ). В більшості робіт вважається, що докритичний стан є однорідним і відомим завдяки діючому навантаженню, прикладеному до граничного контуру. Раніше в роботах [7, 8] для дослідження ізотропних, ортотропних та багатошарових пластин довіль-

ної геометричної форми було запропоновано альтернативні МСЕ методи, що базуються на використанні теорії R-функцій [9, 10] (RFM) та варіаційних методах. В роботах [7, 8] такий підхід було застосовано для дослідження параметричних коливань одношарових ізотропних та ортотропних пластин, в роботі [11] RFM вперше застосовано для дослідження параметричних коливань багатшарових пластин під дією статичних та періодичних зусиль в серединній площині. В даній роботі розглянуто подальший розвиток RFM стосовно вивчення стійкості ортотропних пологих оболонок, які навантажені в серединній площині статичним навантаженням.

**Математична постановка.** Розглянемо ортотропну пологу оболонку, яка стискується в серединній поверхні навантаженням  $p = p_0$ . Для математичної постановки задачі використаємо класичну геометрично нелінійну теорію пологих оболонок Донела-Муштарі-Власова [12, 13], припускаючи при цьому, що виконуються наступні припущення:

- оболонка навантажена у серединній площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;
- докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності,
- всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру  $\lambda$ .

Відносні деформації розтягу та зсуву  $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$  в серединній площині та відносні деформації згину та крутіння  $\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$  задано наступними виразами :

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y},$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Зусилля  $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$  та моменти  $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$  в рамках обраної теорії визначаються як:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix},$$

де

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$C_{ij}, D_{ij}$  – жорсткісні характеристики матеріалу. У разі, якщо напрямки осей ортотропії співпадають з напрямками координатних осей, то коефіцієнти

$$C_{16} = C_{26} = D_{16} = D_{26} = 0.$$

Рівняння руху в операторній формі мають вигляд

$$[L]\vec{U} = NL(W) + m_1\vec{U}_{,tt}, \quad (1)$$

де  $[L]$  є матриця лінійних операторів

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix},$$

$\vec{U} = (u, v, w)^T$  – вектор переміщень,

$NL(w) = (-Nl_1(w), -Nl_2(w), -Nl_3(u, v, w))^T$  – стовпчик, що містить в собі нелінійні відносно переміщень члени, та вектор  $\vec{U}_{,tt} = (u_{,tt}, v_{,tt}, w_{,tt})^T$ , який об'єднує інерційні члени.

Лінійні диференціальні оператори  $L_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  визначаються наступним чином:

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{13} = -L_{31} = -k_1 C_{11} \frac{\partial}{\partial x} - k_2 C_{12} \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{23} = -L_{32} = -k_1 C_{12} \frac{\partial}{\partial y} - k_2 C_{22} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + k_1^2 C_{11} + k_2^2 C_{22} + 2k_1 k_2 C_{12},$$

де  $k_1 = \frac{1}{R_x}$ ,  $k_2 = \frac{1}{R_y}$  – кривини оболонок відповідно в напрямках осей  $Ox$  та  $Oy$ .

Для зручності подальших викладок представимо вектор деформацій розтягу та вектор зусиль у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків, а саме:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon^{(NL)}, \quad \varepsilon^{(L)} = \left( \varepsilon_{11}^{(L)}, \varepsilon_{22}^{(L)}, \varepsilon_{12}^{(L)} \right)^T, \quad \varepsilon^{(NL)} = \left( \varepsilon_{11}^{(NL)}, \varepsilon_{22}^{(NL)}, \varepsilon_{12}^{(NL)} \right)^T,$$

$$N = N^{(L)} + N^{(NL)}, \quad N^{(L)} = \left( N_{11}^{(L)}, N_{22}^{(L)}, N_{12}^{(L)} \right)^T, \quad N^{(NL)} = \left( N_{11}^{(NL)}, N_{22}^{(NL)}, N_{12}^{(NL)} \right)^T \quad (2)$$

Тоді зв'язок між зусиллями та деформаціями в компактній формі може бути представлено як:

$$\vec{N}^{(N)} = C \vec{\varepsilon}^{(N)}, \quad \vec{N}^{(L)} = C \vec{\varepsilon}^{(L)}, \quad \vec{N}^{(NP)} = C \vec{\varepsilon}^{(NP)}, \quad (3)$$

де

$$\vec{\varepsilon}^{(L)} = \left( u_{,x} + k_1 w; v_{,y} + k_2 w; u_{,y} + v_{,x} \right), \quad \vec{\varepsilon}^{(N)} = \left( \frac{1}{2} w_{,x}^2; \frac{1}{2} w_{,y}^2; w_{,x} w_{,y} \right).$$

Вирази для нелінійних диференціальних операторів  $Nl_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , як складових вектора  $NL(w) = (-Nl_1(w), -Nl_2(w), -Nl_3(u, v, w))^T$ , мають насту-

пний вигляд:

$$NI_1(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{11}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{12}^{(N)}(w), \quad NI_2(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{12}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{22}^{(N)}(w),$$

$$NI_3(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Система рівнянь (1) доповнюється граничними умовами, які залежать від способу закріплення краю оболонки. Звернемо увагу на те, що на навантаженої частині контуру крайові умови в площині визначаються як

$$N_n = -p, T_n = 0. \quad (4)$$

В формулах (4)  $N_n, T_n$  визначаються наступним чином:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm, \quad T_n = N_{12}(l^2 - m^2) + (N_{22} - N_{11})lm,$$

$$u_n = ul + vm, v_n = -um + vl,$$

де  $l$  та  $m$  – направляючі косинуси нормалі до границі області.

Представимо контурні зусилля  $N_n, T_n$  також у вигляді суми:

$$N_n = N_n^{(L)} + N_n^{(N)}, \quad T_n = T_n^{(L)} + T_n^{(N)},$$

де

$$N_n^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11}l^2 + C_{12}m^2) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{12}l^2 + C_{22}m^2) + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) C_{66}lm,$$

$$N_n^{(N)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{11}l^2 + C_{12}m^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{12}l^2 + C_{22}m^2) + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} C_{66}lm,$$

$$T_n^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11}(l^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11})lm) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{22} - C_{12})lm +$$

$$+ C_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (l^2 - m^2), \quad T_n^{(N)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{12} - C_{11})lm +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{22} - C_{12})lm + C_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} (l^2 - m^2).$$

### Метод розв'язання.

1. *Визначення докритичного стану оболонки.* Враховуючи, що в разі оболонок складної форми плану та з отворами докритичний стан може бути неоднорідним, перш за все, пропонується визначити докритичний стан оболонки. З цією метою на базі другого припущення про докритичний стан оболонки сформулюємо варіаційну постановку задачі, яка є еквівалентною до розв'язання однорідної системи рівнянь:

$$L\vec{U} = 0 \quad (5)$$

з неоднорідними крайовими умовами

$$N_n^{(L)}(u_1, v_1) = -1, T_n^{(L)}(u_1, v_1) = 0 \quad (6)$$

на навантаженій частині контуру.

Як відомо, варіаційна постановка цієї проблеми (5), (6) формулюється на базі принципу Лагранжа та зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$I(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^{(L)} \varepsilon_{11} + N_{22}^{(L)} \varepsilon_{22} + N_{12}^{(L)} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(L)} u_{1n} d\Omega_1 \quad (7)$$

де  $\partial\Omega_1$  – навантажена частина границі. Побудову координатних функцій, що задовольняють крайовим умовам для оболонок складної форми будемо виконувати за допомогою методу R-функцій.

Розв'язавши задачу (5 – 7), отримуємо функції  $u_1, v_1 \dots$  та  $w_1$ , що дозволяють визначити неоднорідний докритичний стан, а саме, зусилля  $N^{(L)} = (N_{11}^{(L)}, N_{22}^{(L)}, N_{12}^{(L)})^T$  за формулами (2), (3).

*2. Задача про лінійні коливання оболонки, що навантажена в серединній площині статичним навантаженням.*

Ця задача може бути розв'язана за допомогою методу Рітца як результат мінімізації функціоналу:

$$J = \Pi_{\max} - T_{\max}. \quad (8)$$

У формулі (8)  $T_{\max}$  – це кінетична енергія, а  $\Pi_{\max}$  – потенціальна енергія оболонки, які визначаються за наступними формулами:

$$T_{\max} = \frac{\Omega_L^2 \rho}{2} \iint_{\Omega} h(x, y) (U^2 + V^2 + W^2) d\Omega,$$

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12} + N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12}) + p_0 (N_x^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{xy}^{(L)}(u_1, v_1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y})] d\Omega, \quad (9)$$

де  $\Omega_L$  – власна частота, що відповідає даному навантаженню  $p_0$ .

Таким чином, розв'язання лінійної задачі про коливання оболонки зводиться до розв'язання задачі на власні значення при відповідних однорідних крайових умовах.

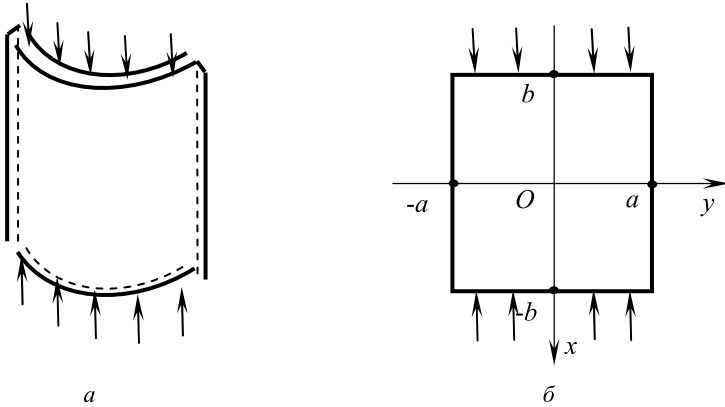


Рисунок – План циліндричної пологої оболонки.

3. *Визначення критичного навантаження.* Для визначення критичного навантаження скористаємося *динамічним методом*, запропонованим в монографії С.Г. Лехницького [14]. Згідно цього методу власні частоти оболонки залежать від її розмірів, пружних сталей, способу закріплення та від параметру  $\lambda = p_0$ . Із зростанням параметру  $\lambda$  для деяких частот можуть бути одержані нульові або уявні значення. Тоді відповідні значення прогину будуть нескінченно зростаючими із збільшенням часу, звідки випливає, що плоска форма стійкості оболонки (пластини) стає нестійкою. Найменше, що не дорівнює нулю, значення параметра  $\lambda$ , яке відповідає переходу від незатухаючих коливань до руху, що характеризується необмежено зростаючими відхиленнями від плоскої форми рівноваги, і буде критичним.

Треба зауважити, що на практиці стає необхідним розв'язати низку лінійних задач для визначення критичного навантаження. Для побудови системи координатних функцій, які необхідні для знаходження мінімуму відповідного функціонала (9), будемо використовувати теорію R-функцій [9].

### Чисельні результати.

**Задача 1.** Перш за все, розглянемо тестову задачу про визначення критичного навантаження для ізотропних циліндричних пологих оболонок різної кривини:

$$R/b = 5; 7.5; 11.5; 17.5; 27.5; 63.$$

Вважається, що оболонка стискається рівномірним навантаженням в напрямку, паралельному вісі  $Ox$  (рисунок); має прямокутний план з відношенням сторін  $a/b = 2$ , товщиною  $h/b = 0.015$ , модуль Юнга  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Будемо розглядати два способи закріплення країв оболонки: шарнірне та жорстке закріплення. Саме така задача була розв’язана в роботі [2]. В табл. 1 та 2 наведено порівняння одержаних результатів для безрозмірного параметра критичного навантаження

$$K = \frac{N_{kr} 12(1-\nu^2)b^2}{\pi^2 E h^3}$$

з результатами роботи [2].

Таблиця 1

Порівняння безрозмірного параметра критичного навантаження  $K$  шарнірно закріпленої ізотропної панелі з відомими результатами.

$R_1 / b$	Шарнірне опирання			
	RFM	МГЕ[2]	МСЕ[2]	МГЕ[3]
5	<b>5.919</b>	5.982	5.621	5.642
7.5	<b>4.879</b>	4.910	4.716	4.734
11.5	<b>4.381</b>	4.392	4.274	4.291
17.5	<b>4.167</b>	4.170	4.084	4.100
27.5	<b>4.061</b>	4.068	3.997	4.012
63	<b>4.005</b>	4.012	3.948	3.964
пластина	<b>4.001</b>	3.999	3.937	3.952

Порівняльний аналіз свідчить про вірогідність запропонованого підходу та створеного програмного забезпечення, що реалізує запропонований метод.

Таблиця 2

Порівняння безрозмірного параметра критичного навантаження  $K$  жорстко закріпленої ізотропної панелі з відомими результатами.

$R_1 / b$	Жорстке закріплення			
	RFM	МГЕ[2]	МСЕ[2]	МГЕ[3]
5	<b>9.902</b>	10.671	10.453	10.402
7.5	<b>8.906</b>	9.212	9.048	8.985
11.5	<b>8.442</b>	8.541	8.403	8.334
17.5	<b>8.243</b>	8.259	8.131	8.060
27.5	<b>7.966</b>	8.131	8.009	7.963
63	<b>7.885</b>	8.061	7.943	7.868
пластина	<b>7.855</b>	8.044	7.925	7.852
	8.076			

**Задача 2.** Розглянемо ортотропну пологу оболонку з прямокутним планом. Механічні характеристики матеріалів, для яких проведено дослідження, представлені в табл. 3. Вважаємо, що геометричні параметри оболонки і то-

вщина співпадають з даними першої задачі.

В табл. 4 представлені значення безрозмірного параметра К критичного навантаження, який визначається за формулою:

$$K = \frac{N_{kr} 12(1 - \nu_1 \nu_2) b^2}{\pi^2 E_2 h^3}. \quad (10)$$

Таблиця 3

Механічні характеристики ортотропних матеріалів.

Матеріал	$E_1 / E_2$	$G / E_2$	$\nu_1 = \nu_2 E_1 / E_2$
Glass-epoxy	3	0.6	0.25
Boron-epoxy	10	0.33	0.22
Graphite-epoxy	40	0.6	0.25

Треба звернути увагу на те, що оболонки лишаються стійкості по різним формам коливань, що суттєво залежить від способу закріплення, кривизни та особливо від матеріалу. Якщо ізотропні оболонки в основному лишаються стійкості за формою коливань (2,1), дивись табл. 4, то ортотропні оболонки з більшою жорсткістю в напрямку осі  $Ox$  (Boron-epoxy та Graphite) лишаються стійкості по першій формі коливань.

Таблиця 4

Значення безрозмірного параметра критичного навантаження К ортотропної панелі з прямокутним планом (рис.).

$R_1 / b$	Жорстке закріплення			Шарнірне обпирання		
	Glass- Epoxy	Boron- Epoxy	Graph.- Epoxy	Glass- Epoxy	Boron- Epoxy	Graph.-Epoxy
5	16.23	<b>29.46</b>	65.31	9.440	11.05	22.057
7.5	14.83	27.79	61.68	7.976	9.316	19.204
11.5	14.17	26.80	59.85	7.262	8.796	17.881
17.5	13.87	26.39	59.24	7.060	8.469	17.323
27.5	13.75	26.20	58.91	6.940	8.361	17.080
63	13.68	26.10	58.73	6.869	8.288	16.944
пластина	13.67	26.07	58.69	6.845	8.252	16.874
Форма коливань	(2,1)	(1,1)	(1,1)	(2,1)	(1,1)	(1,1)

Для прямокутного плану у разі жорстко закріпленої панелі в табл. 2 наведено значення критичного параметру по формі коливань (2,1) курсивом, а дійсне критичне навантаження є меншим та здійснюється по формі (1,1). В таблиці воно позначено жирним шрифтом.



**Висновки.** В роботі запропоновано підхід для дослідження стійкості ортотропних пологих оболонок з довільною формою плану, який враховує визначення неоднорідного докритичного стану. Метод базується на теорії R-функцій та варіаційних методах. Алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL. За допомогою створеного програмного забезпечення було проведено тестування та розв'язані нові задачі стійкості ортотропних пологих оболонок під дією статичного навантаження в серединній поверхні. Запропонований метод в подальшому буде розвинено для дослідження стійкості анізотропних та багатошарових оболонок.

**Список літератури:** **1.** Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition / J.N.Reddy // USA: CRC PRESS, – 2004. – p.834. **2.** P.M.Baiz Buckling analysis of shear deformable shallow shells by boundary element method/P.M. Baiz, M.N.Aliabadi J. Engineering Analysis with Boundary Elements 31(2007)361–372. **3.** (11) P.M.Baiz Linear buckling analysis of shallow shells by boundary domain element method. /P.M. Baiz, M.N.Aliabadi J. Comput Modelling Eng Sci 2006; 13:19–34. **4.** Singha M.K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. // Journal of Sound and Vibration, – 2009, – pp.541–554. **5.** S. K. Sahu Dynamic Stability of Curved Panels with Cutouts / P. K. Datta, S. K. Sahu. // Journal of Sound and Vibration , 2002, **251**(4), – pp. 683-696. **6.** S. K. Sahu Dynamic Stability of Laminated Composite Curved Panels with Cutouts / P. K. Datta, S. K. Sahu // Journal of engineering mechanics - november 2003 – pp. 1245-1253. **7.** Курна Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курна, О.С. Мазур // машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9–15. **8.** Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method. / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P. 179–189. **9.** Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с. **10.** Курна Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек./ Л.В.Курна // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408с. **11.** Курна Л.В. Параметричні коливання багатошарових пластин під дією періодичного навантаження// Курна Л.В., Мазур О.С.,Ткаченко В.В. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях.2011.-№13-С.134–145. **12.** Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.;Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с. **13.** Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448с. **14.** Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат. – 1957. – 464с.

Надійшла до редколегії 27.04.2012