УДК 17.27

І.С. БЄЛОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ПРО ДЕЯКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕВІД'ЄМНИХ КОСИНУС – МНОГОЧЛЕНІВ

Досліджена поведінка невід'ємних косинус – многочленів степеня 4 при перестановці коефіцієнтів при парних косинусах. Встановлено, що при коефіцієнтах при непарних косинуса протилежних знаків норма є найбільшою при монотонних коефіцієнтах

Исследовано поведение неотрицательных косинус – многочленов степени 4 при перестановке коэффициентов при четных косинусах. Установлено, что при коэффициентах при нечетных ко–синусах противоположных знаков норма является наибольшей при монотонных коэффициентах

The behavior of non-negative cosine - polynomials of degree 4 with a permutation of the coefficients for even cosines is investigated. It is established that the coefficients of the odd cosines of opposite sign is the norm for most monotone coefficients.

Вступ. Тригонометричний косинус – многочлен степеня n

$$A(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

називається *невід'ємним*, якщо $A(\theta) \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ [1]. Коли $a_0 = E(a_1, a_2, ..., a_n) > 0$ є найменшим значенням коефіцієнту a_0, при якому $A(\theta)$ є невід'ємним, будемо казати, що відповідний косинус – многочлен має *нормальну форму*. Додатна функція

$$E(\vec{a}) \quad \vec{a} = (a_1, a_1, ...a_n) \in \mathbb{R}^n$$

є *несиметричною нормою* в $\mathbb{R}^n$. В роботі продовжено вивчення перетворень коефіцієнтів $A(\theta)$, регулярних відносно E, розпочате в [2]. Чисельний експеримент свідчить, що при монотонно зростаючих парних коефіцієнтах $a_2 \leq a_4 \leq ...$ відповідне значення $E(a_1, a_2, ..., a_n)$ в багатьох випадках є найбільшим.

Постановка задачі. Ми розглянемо випадок $n = 4$, та визначимо деяку область коефіцієнтів, в якій $E(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq E(a_1, a_4, a_3, a_2)$ *при* $a_2 \leq a_4$.

Розв'язок задачі. Спочатку розглянемо випадок $a_1 = a_3 = 0$.

Теорема 1. $E(0, a_2, 0, a_4) \geq E(0, a_4, 0, a_2)$ *при* $0 \leq a_2 \leq a_4 \leq 4a_2$

Позначимо

$$P(x) = a_2 \cos 2x + a_4 \cos 4x, \; Q(x) = a_4 \cos 2x + a_2 \cos 4x$$

і покладемо $u=\cos 2x$. Тоді

$$P(x)=p(u)=2a_4u^2+a_2u-a_4,\ Q(x)=q(u)=2a_2u^2+a_4u-a_2.$$

При $0\le a_2\le a_4\le 4a_2$ многочлен $p(u)$ має мінімум в точці $u_{\min}^p=-\dfrac{a_2}{4a_4}$, де він приймає найменше значення $p_{\min}=p\left(u_{\min}^p\right)=$ $=-\dfrac{a_2^{\ 2}+8a_4^{\ 2}}{8a_4}$, а многочлен $q(u)$ – мінімум в точці $u_{\min}^q=-\dfrac{a_4}{4a_2}$, де його найменше значення $q_{\min}=q\left(u_{\min}^q\right)=-\dfrac{a_4^{\ 2}+8a_2^{\ 2}}{8a_2}$. Порівняємо $p_{\min}$ і $q_{\min}$:

$$q_{\min}-p_{\min}=-\frac{a_4^{\ 2}+8a_2^{\ 2}}{8a_2}+\frac{a_2^{\ 2}+8a_4^{\ 2}}{8a_4}=$$

$$=\frac{(a_4-a_2)\left(9a_2a_4-a_2^{\ 2}-a_4^{\ 2}\right)}{8a_2a_4}\ge 0 \text{ } при \text{ } 0\le a_2\le a_4\le 4a_2.$$

Теорема 1 доведена.

Теорему 1 можна довести і у такий спосіб. Введемо зручне у наступному позначення $t=\cos x$ $u=2t^2-1$ $\left(|t|\le 1\right)$. Тоді

$$P(x)=p(t)=8a_4t^4+(2a_2-8a_4)t^2+a_4-a_2,$$

$$Q(x)=q(t)=8a_2t^4+(2a_4-8a_2)t^2+a_2-a_4,$$

$$D=p(t)-q(t)=2(a_4-a_2)(t+1)(2t+1)(2t-1)(t-1).$$

Бачимо, що $D<0$ при $|t|\ge 0{,}5$. Якщо зауважити, що

$$2t_{\min}^{q\ 2}-1=u_{\min}^q=-\frac{a_4}{4a_2},\quad 2t_{\min}^{q\ 2}=\frac{4a_2-a_4}{4a_2},$$

$$\left|t_{\min}^q\right|=\sqrt{\frac{4a_2-a_4}{8a_2}}\ge\frac{1}{2}\quad при\quad a_2\le a_4\le 2a_2,$$

отримаємо

$$p_{\min}\le p\left(t_{\min}^q\right)\le q\left(t_{\min}^q\right)=q_{\min}, \tag{1}$$

що знову доводить теорему 1 при умові $a_4\le 2a_2$.

Цей шлях можна використати для наступного узагальнення теореми 1. Нехай

$$P_e(x)=a_2\cos 2x+a_4\cos 4x,\ P_o(x)=a_1\cos x+a_3\cos 3x,$$

$$P(x)=P_o(x)+P_e(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+a_4\cos 4x,$$

$$Q_e(x) = a_4\cos 2x + a_2\cos 4x,\ Q_o(x) = a_1\cos x + a_3\cos 3x,$$
$$Q(x) = Q_o(x) + Q_e(x) = a_1\cos x + a_4\cos 2x + a_3\cos 3x + a_2\cos 4x.$$

Оскільки $P_o(x) = Q_o(x)$ маємо $Q(x) - P(x) = Q_e(x) - P_e(x)$ і вираз справа зводиться до отримання нерівностей (1), точніше до оцінки $\left|t_{\min}^q\right| \ge 0,5$.

Твердження 1. При
$$0 \le a_1 \le a_2 \le a_4 \le 2a_2,\ \ a_3 = -a_1 \tag{2}$$
маємо
$$t_{\min}^q \le -\frac{1}{2} \text{ і } E(a_1, a_2, a_3, a_4) \ge E(a_1, a_4, a_3, a_2).$$

Перейдемо до змінної $t = \cos x$ $\left(|t| \le 1\right)$ та отримаємо наступну низку рівностей для обчислення $t_{\min}^q$ (дивіться подробиці у [3,с.218]):
$$a = \frac{3a_3}{8a_4},\quad b = \frac{a_2}{8a_4} - \frac{1}{2},\quad c = \frac{a_1}{8a_4},\quad Q = (a^2 - 3b)/9,$$
$$R = (2a^3 - 9ab + 27c)/54,\quad D = R^2 - Q^3.$$

Якщо $D < 0$, покладемо $u = arccos(R/sqrt(Q^3))/3$ і отримаємо
$$t_{\min}^q = -2\sqrt{Q}cos(u) - a/3\,, \tag{3}$$
інакше покладемо $A = \sqrt[3]{-R + \sqrt{D}},\quad B = \sqrt[3]{-R - \sqrt{D}}$ і отримаємо
$$t_{\min}^q = A + B - \frac{a}{3}. \tag{4}$$

Формули (3), (4) *Кардано – Вієта* є занадто складними для безпосереднього аналізу, тому ми перевіримо нерівність $t_{\min}^q \le -0,5$ у непрямий спосіб. Запишемо умови (2) у вигляді $Sa \le t, Seqa \le teq$, де
$$\mathrm{S} = \left[-1\ 0\ 0\ 0;1\ 0\ 0\ -1;0\ -1\ 0\ 1;0\ 1\ 0\ -2\right],\quad \mathrm{t} = \left[0;\ 0;\ 0;\ 0\right],$$
$$\mathrm{Seq} = \left[1\ 0\ -1\ 0\right],\quad \mathrm{teq} = 0,$$
та розглянемо оптимізаційну задачу
$$\min(-t_{\min}^q)$$
$$Sa \le t \quad Seqa \le teq \quad a = \left[a_1; a_2; a_3; a_4\right] \tag{5}$$

Її розв'язок за допомогою функції fmincon з *MatLab Optimization Toolbox* [4] виглядає наступним чином. Виберемо початкове наближення для a , наприклад, $a = \left[7;2;-7;3\right]$ та викличемо
$$\left[\mathrm{x},\ \mathrm{fval}\right] = \mathrm{fmincon}\left(@\mathrm{Calc}t_{\min}^q, a,\ \mathrm{S},\ \mathrm{t},\ \mathrm{Seq},\ \mathrm{teq}\right).$$

Отримаємо такий результат:

Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):

```
  lower      upper     ineqlin   ineqnonlin
                            1
                            4
a =

        0    3.3577          0    1.6789

fval =

    0.5000
```

Optimization completed: The first-order optimality measure, 1.775141e-009, is less than options. TolFun = 1.000000e-006, and the maximum constraint violation, 0.000000e+000, is less than options. TolCon = 1.000000e-006.

```
Optimization Metric                                   Options
first-order optimality =  1.78e-009                 TolFun =  1e-006 (default)
max(constraint violation) =  0.00e+000                TolCon =  1e-006 (default)
```

Аналогічні результати, отримані для багатьох інших початкових даних , дозволяють стверджувати, що при обмеженнях (2) оптимізаційна задача (5) має розв'язок $\max(t_{\min}^{q}) = -0,5$. Твердження 1 обґрунтоване.

Результати чисельного експерименту дозволяють сформулювати більш загальне

Твердження 2. При

$$0 \le a_2 \le a_4, \quad a_1 a_3 \le 0$$

маємо

$$E\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) \ge E\left(a_1, a_4, a_3, a_2\right)$$

Висновки. За допомогою функції fmincon з пакету MatLab перевірене припущення щодо поведінки $E\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$ при перестановці коефіцієнтів a_2 та a_4, а саме

$$E\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) \ge E\left(a_1, a_4, a_3, a_2\right), \quad 0 \le a_2 \le a_4, \quad a_1 a_3 \le 0.$$

Список літератури: 1. *B.Dumitrescu* Posiyive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications.-Springer. – 2007. – 245р. **2.** *І.С.Бєлов* Правий зсув невідємних косинус – многочленів. // Вісник НТУ «ХПІ». – Вип.2. – 2012. – С.30-34. **3.** *Б.Л. ван дер Варден* Алгебра. – Москва, Наука. – 1979. – 623 с. **4.** MatLab2010 Control ToolBox. – Users Guide. – 2010. – 78р.

Надійшла до редколегії 03.04.2012