Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование – Т.2.–1990.–№ 8.– С.21-30. **7.** *Григорьев А.Л., Дериенко А.И.* Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків, 2004. – Вип. 2 (9). – С.257-264. **8.** *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С.23-37. **9.** *Григорьев А.А., Дериенко А.И.* Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. –№ 13.–С.39-54. **10.** *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Моделирование характеристик устойчивой волны переноса упругопластической деформации в винтовом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 42. – С.22-36. **11.** *Сенченков И.К.* Модальная классификация и проектирование сонотродов для ультразвуковой сварки пластмасс // Акустичний вісник. –1998.– 1, №4.–С.55-64. **12.** *Никольский В.В.* Теория электромагнитного поля.– М.: Высшая школа, 1964. **13.** *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». –2010. – № 69. – С.35-45. **14**. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. **15.** *Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериенко А.И.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. **16.** *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Квантовая релятивистская механика уединённых экспоненциальных волн переноса деформации кручения по цилиндрическому стержню // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011.– № 42. – С.14-32. **17.** *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». –2009. – № 30.–С.20-30.

Поступила в редколлегию 03.05.2012

УДК 17.27

Р.В. ДАЛЛАКЯН, канд. физ.-мат. наук, ГИУА, Ереван

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ U_α

Доведено теорему, що оцінює ступінь зростання для деяких класів гармонійних функцій, та проаналізовано її наслідки.

Доказана теорема, оценивающая степень роста для некоторых классов гармонических функций, и проанализированы её следствия.

Teorema proved that evaluates the degree of growth for some classes of harmonic functions, and analyzed its implications.

Введение. В этой работе доказана одна теорема о росте гармонических функций класса U_α, введенных *М. М. Джрбашяном* (смотри [1], [2]). В частном случае $\alpha = 0$ эта теорема доказана *А. Г. Нафталевичем*. Далее приводятся некоторые следствия этой теоремы.

Ключевые слова: *оператор интегро-дифференцирования произвольного порядка в смысле Римана-Лиувиля, ядра типа Коши, Шварца и Пуассона,*

α - характеристика мероморфных функций, классы U_α и N_α.

Основные определения. Сначала дадим некоторые предварительные сведения о классах N_α и U_α (смотри [1], гл. IX, [2]), введенные М. М. Джрбашяном. Заметим, что классы N_α являются естественными обобщениями классов N мероморфных функций, введенных *Р. Неванлинной* [3].

Дробная первообразная Римана-Лиувиля порядка $\alpha\left(0<\alpha<+\infty\right)$ функции $f\left(z\right)$, заданной в круге $D=\left\{z;\left|z\right|<1\right\}$, формально определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^r\left(r-t\right)^{\alpha-1}f\left(re^{i\theta}\right)dt=\frac{r^\alpha}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^1\left(1-t\right)^{\alpha-1}f\left(tz\right)dt\,,$$

$$z=re^{i\theta}\in D\,.$$

Производная D^0 – это тождественный оператор, то есть

$$D^0f\left(z\right)=f\left(z\right),\ z\in D\,,$$

а дробная производная порядка $\alpha\left(0<\alpha<\infty\right)$ определяется формулой

$$D^\alpha f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{\partial^{p-1}}{\partial r^{p-1}}\left\{D^{-\left(p-\alpha\right)}f\left(re^{i\theta}\right)\right\},\ re^{i\theta}\in D\,,$$

где $p\geq 1$ – целое число, удовлетворяющее неравенству $p-1<\alpha\leq p$.

Пусть $f\left(z\right)$ – мероморфная в D функция. Для любого значения $t\left(0<t<1\right)$ через $n\left(t,0\right)$ и $n\left(t,\infty\right)$ обозначим соответственно число нулей a_υ и полюсов b_υ, лежащих в круге $\left|z\right|\leq t$. Через $n\left(0,0\right)$ и $n\left(0,\infty\right)$ обозначим соответственно кратность нуля и полюса функции $f\left(z\right)$ в точке $z=0$. Далее для $-1<\alpha<+\infty$ определим

$$m_\alpha\left(\rho;f\right)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{(+)}^{-\alpha}\ln\left|f\left(\rho;e^{i\theta}\right)\right|d\theta\,,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}f=\begin{cases}D^{-\alpha}f, \text{если } D^{-\alpha}f\geq 0\\ 0, \qquad \text{если } D^{-\alpha}f\leq 0,\end{cases}$$

а также

$$N_\alpha\left(\rho;f\right)=\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\int_\upsilon^\rho\frac{\left(\rho-t\right)^\alpha}{t}\left[n\left(t,\infty\right)-n\left(0,\infty\right)\right]dt+\frac{n\left(0,\infty\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\left(\ln\rho-k_\alpha\right),$$

где

$$k_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+\alpha\right)}\,.$$

Далее пусть

$$T_\alpha\left(\rho;f\right) = m_\alpha\left(\rho;f\right) + N_\alpha\left(\rho;f\right).$$

Через N_α обозначается множество мероморфных в единичном круге D функций f, для которых при данном $\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ выполняется условие

$$T_\alpha\left(f\right) = \sup_{0<r<1}\left\{T_\alpha\left(r;f\right)\right\} < +\infty .$$

Класс N_0 совпадает с классом N Р. Неванлинны.

Для любого значения параметра $\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ введем в рассмотрение следующие *ядра типа Коши*, *Шварца* и *Пуассона*:

$$C_\alpha\left(z\right) = \frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}},\ z\in D,$$

$$S_\alpha\left(z\right) = 2C_\alpha\left(z\right) - C_\alpha\left(0\right) = \Gamma\left(1+\alpha\right)\left\{\frac{2}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}} - 1\right\},\ z\in D,$$

$$P_\alpha\left(\varphi;r\right) = \operatorname{Re} S_\alpha\left(re^{i\varphi}\right) = \Gamma\left(1+\alpha\right)\left\{\operatorname{Re}\frac{2}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}} - 1\right\},\ re^{i\varphi}\in D.$$

При этом для любого значения параметра $\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ и для любого $re^{i\varphi}\in D$ имеют место следующие равенства:

$$C_0\left(re^{i\varphi}\right) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}C_\alpha\left(re^{i\varphi}\right),\ C_\alpha\left(re^{i\varphi}\right) = r^{\alpha}D^{\alpha}C_0\left(re^{i\varphi}\right),$$

$$S_0\left(re^{i\varphi}\right) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}S_\alpha\left(re^{i\varphi}\right),\ S_\alpha\left(re^{i\varphi}\right) = r^{\alpha}D^{\alpha}S_0\left(re^{i\varphi}\right),$$

$$P_0\left(\varphi;r\right) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}P_\alpha\left(\varphi;\varphi\right),\ P_\alpha\left(\varphi;r\right) = r^{\alpha}D^{\alpha}P_0\left(\varphi;r\right).$$

Обозначим через $U_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ множество гармонических в круге D функций $u\left(z\right)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left|u_\alpha\left(re^{i\phi}\right)\right|d\phi\right\} < +\infty .$$

Известно, что (смотри [1] гл. IX, [2]) класс $U_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ совпадает с множеством гармонических в круге D функций $u\left(z\right)$, представленных в виде

$$u\left(z\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha\left(\varphi-\theta;r\right)d\psi\left(\theta\right),\ z = re^{i\varphi}\in D, \qquad \text{(A)}$$

где $\psi\left(\theta\right)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $\left[-\pi;\pi\right]$. Мера $\psi\left(\theta\right)$ в представлении функции $u\left(z\right)\in U_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ может быть найдена посредством следующего аналога *формулы обращения Стилтьеса*:

$$\psi(\theta)=\lim_{r\to -1}\int_0^{\theta} u_\alpha\left(re^{i\theta}\right)d\theta \text{ для п.в. } \theta\in[-\pi;\pi],$$

где

$$u_\alpha\left(re^{i\theta}\right)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}u\left(re^{i\theta}\right),\ re^{i\theta}\in D.$$

В этой работе доказано одно утверждение, которое в частном случае $\alpha=0$ было доказано А. Г. Нафталевичем [4].

Теорема. *Пусть* $u(z)\in U_\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$. *Тогда, если*

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\alpha_0},\,z\in D}}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}|u(z)|=k>0, \tag{1}$$

то скачок функции $\psi(\theta)$ *в точке* $\theta=\alpha_0$ *не меньше, чем* $\dfrac{k\pi}{\Gamma(1+\alpha)}$, *то есть*

$$\left|\psi(\alpha_0+0)-\psi(\alpha_0-0)\right|\ge\frac{k\pi}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{2}$$

Если же обозначить

$$\psi(\alpha_0+0)-\psi(\alpha_0-0)=2\pi s, \tag{3}$$

то имеет место следующее представление:

$$u(z)=u_1(z)+s\Gamma(1+\alpha)\operatorname{Re}\left\{\frac{2e^{i(1+\alpha)\alpha_0}}{\left(e^{i\alpha_0}-z\right)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{4}$$

где функция $u_1(z)$ *принадлежит классу* U_α *и такова, что*

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\alpha_0},\,z\in D}}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}|u_1(z)|=0. \tag{5}$$

*Доказательство***.** Пусть выполнено условие (1). Тогда существует последовательность $\{\lambda_j\}\equiv\left\{|\lambda_j|e^{i\alpha_j}\right\}\subset D$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_j=e^{i\alpha_o},\ \left|u(\lambda_j)\right|=\frac{k+\varepsilon_j}{\left(1-|\lambda_j|\right)^{1+\alpha}},\ \lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0.$$

Далее, выбрав любую последовательность вещественных чисел $\{\varphi_J\}$ такую, чтобы

$$\lim_{j\to\infty}\varphi_j=0,\ \alpha_j-\varphi_j<\alpha_0<\alpha_j+\varphi_j \text{ и } \left|e^{i(\alpha_j\pm\varphi_j)}-\lambda_j\right|\ge\sqrt{1-|\lambda_j|}, \tag{6}$$

и, воспользовавшись представлением (А) функции $u(z)$, получаем:

$$\frac{k+\varepsilon_j}{\left(1-|\lambda_j|\right)^{1+\alpha}}=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(P_\alpha(\alpha;-\theta),|\lambda_j|\right)d\psi(\theta)\right|\le\left|I_1^j\right|+\left|I_2^j\right|,\ j=1,2,\ldots, \tag{7}$$

где

$$I_1^j=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_j-\varphi_j}^{\alpha_j+\varphi_j}\left(P_\alpha\left(\alpha;-\vartheta\right),\left|\lambda_j\right|\right)d\psi\left(\vartheta\right),$$

$$I_2^j=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus\left[\alpha_j-\varphi_j,\alpha_j+\varphi_j\right]}\left(P_\alpha\left(\alpha;-\vartheta\right),\left|\lambda_j\right|\right)d\psi\left(\vartheta\right).$$

Оценивая эти интегралы по отдельности, очевидно получим

$$\left|I\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_j-\varphi_j}^{\alpha_j+\varphi_j}\left|d\psi\left(\vartheta\right)\right|\sup_{\alpha_j-\varphi_j<\vartheta<\alpha_j+\varphi_j}\left|P_\alpha\left(\alpha_j-\vartheta,\left|\lambda_j\right|\right)\right|,\ j=1,2,\ldots$$

Далее, обозначив вариацию функции $\psi\left(\vartheta\right)$ в отрезке $\left[\alpha_j-\varphi_j,\alpha_j+\varphi_j\right]$ через V_j и пользуясь одним представлением (смотри выше) ядра типа Пуассона, при любом $j=1,2,\ldots$ получим

$$\left|I_1^j\right|\le\frac{V_j}{2\pi}\sup_{\alpha_j-\varphi_j<\vartheta<\alpha_j+\varphi_j}\left|P_\alpha\left(\alpha_j-\vartheta,\left|\lambda_j\right|\right)\right|=$$

$$=\frac{V_j}{2\pi}\sup_{\alpha_j-\varphi_j<\vartheta<\alpha_j+\varphi_j}\left|\operatorname{Re}\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|e^{i\left(\alpha_j-\vartheta\right)}\right)^{1+\alpha}}-1\right]\right|\le$$

$$\le\frac{V_j}{2\pi}\sup_{\alpha_j-\varphi_j<\vartheta<\alpha_j+\varphi_j}\left\{\frac{2\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\left|1-\left|\lambda_j\right|e^{i\left(\alpha_j-\vartheta\right)}\right|^{1+\alpha}}+\Gamma\left(1+\alpha\right)\right\}\le$$

$$\le\frac{V_j}{2\pi}\left[\frac{2\Gamma\left(1+\alpha\right)}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{1+\alpha}}+\Gamma\left(1+\alpha\right)\right]=\frac{V_j}{2\pi}\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{1+\alpha}}+1\right].$$

Итак, мы получили следующие оценки:

$$\left|I_1^j\right|=\frac{V_j}{2\pi}\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{1+\alpha}}+1\right],\ j=1,2,\ldots\tag{8}$$

Обозначим полную вариацию функции $\psi\left(\vartheta\right)$ на отрезке $\left[-\pi,\pi\right]$ через V и оценим теперь интегралы $\left|I_2^j\right|$, $\left(j=1,2,\ldots\right)$:

$$\left|I_2^j\right|\le\frac{V_j}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus\left[\alpha_j-\varphi_j,\vartheta<\alpha_j+\varphi_j\right]}\left|d\psi\left(\vartheta\right)\right|\sup_{\vartheta\notin\left[\alpha_j-\varphi_j,\vartheta<\alpha_j+\varphi_j\right]}\left|P_\alpha\left(\alpha_j-\vartheta,\left|\lambda_j\right|\right)\right|\le$$

$$\le \frac{V}{2\pi} \sup_{\vartheta\notin\left[\alpha_j-\phi_j,\vartheta<\alpha_j+\phi_j\right]} \left|P_\alpha\left(\alpha_j-\vartheta,\left|\lambda_j\right|\right)\right|.$$

Далее, используя вид вышеупомянутого представления ядра типа Пуассона, при любом $j=1,2,\ldots$ получим:

$$\left|I_2^j\right| \le \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta\notin\left[\alpha_j-\varphi,\alpha_j+\varphi_j\right]} \left|\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\operatorname{Re}\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|e^{i\left(\alpha_j-\vartheta\right)}\right)^{1+\alpha}}\right]\right| =$$

$$= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta\notin\left[\alpha_j-\varphi,\alpha_j+\varphi_j\right]} \left|\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\operatorname{Re}\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)-i\left|\lambda_j\right|\sin\left(\alpha_j-\vartheta\right)\right)^{1+\alpha}}-1\right]\right| =$$

$$= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta\notin\left[\alpha_j-\varphi,\alpha_j+\varphi_j\right]} \left|\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\operatorname{Re}\frac{2\left(1-2\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)-i\left|\lambda_j\right|\sin\left(\alpha_j-\vartheta\right)\right)^{1+\alpha}}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)-i\left|\lambda_j\right|\sin\left(\alpha_j-\vartheta\right)\right)^{1+\alpha}}-1\right]\right| =$$

$$= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta\notin\left[\alpha_j-\varphi,\alpha_j+\varphi_j\right]} \left|\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\frac{2\left(1-2\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)+\left|\lambda_j\right|^2\right)^{(1+\alpha)/2}}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)-i\left|\lambda_j\right|\sin\left(\alpha_j-\vartheta\right)\right)^{1+\alpha}}-1\right]\right| =$$

$$= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta\notin\left[\alpha_j-\varphi,\alpha_j+\varphi_j\right]} \left|\Gamma\left(1+\alpha\right)\left[\frac{2}{\left(1-2\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)+\left|\lambda_j\right|^2\right)^{(1+\alpha)/2}}-1\right]\right|.$$

Таким образом, при любом $j=1,2,\ldots$

$$\left|I_2^j\right| \le \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta\notin\left[\alpha_j-\varphi,\alpha_j+\varphi_j\right]} \Gamma\left(1+\alpha\right)\left|\frac{2}{\left(1-2\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j-\vartheta\right)+\left|\lambda_j\right|^2\right)^{(1+\alpha)/2}}-1\right|. \quad (9)$$

Далее, нетрудно видеть, что при любом $j=1,2,\ldots$

$$\left|\exp i\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)-\lambda_j\right|^2 = \left|\cos\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)+i\sin\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)-\left|\lambda_j\right|\cos\alpha_j-i\left|\lambda_j\right|\sin\alpha_j\right|^2 =$$

$$= \cos^2\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)-2\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)\cos\alpha_j+\left|\lambda_j\right|^2\cos^2\alpha_j+$$

$$+\sin^2\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)-2\left|\lambda_j\right|\sin\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)\sin\alpha_j+$$

$$+\left|\lambda_j\right|\cos\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)\cos\alpha_j+\sin\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)\sin\alpha_j\Big)+\left|\lambda_j\right|^2=1-2\left|\lambda_j\right|\cos\varphi_j+\left|\lambda\right|^2.$$

Итак,

$$\left|\exp i\left(\alpha_j\pm\varphi_j\right)-\lambda_j\right|^2=1-2\left|\lambda_j\right|\cos\varphi_j+\left|\lambda_j\right|^2,\ j=1,2,\ldots$$

и, ввиду (6)

$$1-2\left|\lambda_j\right|\cos\varphi_j+\left|\lambda_j\right|^2\geq1-\left|\lambda_j\right|,\ j=1,2,\ldots.$$

Тем самым, из (9) получаем

$$\left|I_2^j\right|\leq\frac{V\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}},\ j=1,2,\ldots.$$

Теперь из (7), (8) и (9) следует, что при $j=1,2,\ldots$

$$\frac{k+\varepsilon_j}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{1+\alpha}}\leq\left|I_1^j\right|+\left|I_2^j\right|\leq\frac{V_j\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi}\left[\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}+1\right]+\frac{V\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{k+\varepsilon_j}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{1+\alpha}}\leq\frac{V_j\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi}\left[\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}+1\right]+\frac{V\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}$$

или

$$\frac{k+\varepsilon_j}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)}}-\frac{V\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}\leq\frac{V_j\Gamma\left(1+\alpha\right)}{2\pi}\left[\frac{2}{\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}+1\right],$$

и, окончательно,

$$\frac{\pi\left(k+\varepsilon_j\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}-\frac{V\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{(1+\alpha)/2}}{2}\leq V_j+\frac{V_j\left(1-\left|\lambda_j\right|\right)^{1+\alpha}}{2},\ j=1,2,\ldots$$

Однако, $\varepsilon_j\to0$ и $\left|\lambda_j\right|\to1$ при $j\to\infty$. Тем самым, при достаточно большом j_0 справедливо неравенство

$$V_j\geq\frac{\pi k}{\Gamma\left(1+\alpha\right)},\ j\geq j_0. \tag{10}$$

Далее, поскольку $\psi\left(\vartheta\right)$ – это вещественная функция с конечным полным изменением на $\left[-\pi,\pi\right]$, то ее можно записать в виде разности

$$\psi\left(\vartheta\right)=\psi_1\left(\vartheta\right)-\psi_2\left(\vartheta\right),\ \vartheta\in\left[-\pi,\pi\right],$$

где $\psi_1\left(\vartheta\right)$ и $\psi_2\left(\vartheta\right)$ – монотонно возрастающие, ограниченные функции на $\left[-\pi,\pi\right]$. Следовательно, при любом $j=1,2,\ldots$

$$V_j = V_j(\psi_1) - V_j(\psi_2),$$

где $V_j(\psi_1)$ и $V_j(\psi_2)$ – вариации функций $\psi_1(\vartheta)$ и $\psi_2(\vartheta)$ в отрезке $\left[\alpha_j - \varphi_j, \alpha_j + \varphi_j\right]$. Однако, очевидно, что для любого $j = 1, 2, \ldots$

$$V_j(\psi_1) = \psi_1(\alpha_j + \varphi_j) - \psi_1(\alpha_j - \varphi_j),\ V_j(\psi_2) = \psi_2(\alpha_j - \varphi_j) - \psi_2(\alpha_j + \varphi_j).$$

Отсюда следует, что

$$V_j \le \psi_1(\alpha_j + \varphi_j) - \psi_1(\alpha_j - \varphi_j) + \psi_2(\alpha_j - \varphi_j) - \psi_2(\alpha_j + \varphi_j) =$$
$$= \left|\psi_1(\alpha_j + \varphi_j) - \psi_1(\alpha_j - \varphi_j)\right|.$$

Поэтому, учитывая (10), имеем:

$$\left|\psi(\alpha_j + \varphi_j) - \psi(\alpha_j - \varphi_j)\right| \ge \frac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)},\ j \ge j_0.$$

Устремив теперь $j \to +\infty$ получаем

$$\left|\psi(\alpha_0 + 0) - \psi(\alpha_0 - 0)\right| \ge \frac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)},$$

то есть скачок функции $\psi(\theta)$ в точке α_0 не меньше, чем $\dfrac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Если же $\psi(\alpha_0 + 0) - \psi(\alpha_0 - 0) = 2\pi s$, то функцию $\psi(\vartheta)$ можем представить в виде суммы $\psi(\vartheta) = \psi_3(\vartheta) + \psi_4(\vartheta)$, где

$$\psi_3(\vartheta) = \begin{cases} \psi(\vartheta), & \text{при } \vartheta < \alpha_0 \\ \psi(\vartheta) - 2\pi s, & \text{при } \vartheta > \alpha_0 \\ \psi(\alpha_0 - 0), & \text{при } \vartheta = \alpha_0, \end{cases}$$

$$\psi_4(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \vartheta < \alpha_0 \\ 2\pi s, & \text{при } \vartheta > \alpha_0 \\ \psi(\alpha_0 - 0), & \text{при } \vartheta = \alpha_0, \end{cases}$$

Тем самым,

$$u\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\alpha(\varphi - \vartheta, r)\, d\psi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\alpha(\varphi - \vartheta, r)\, d\psi_1(\vartheta) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\alpha(\varphi - \vartheta, r)\, d\psi_2(\vartheta) = u_1\left(re^{i\varphi}\right) + s\Gamma(1+\alpha)\operatorname{Re}\left[\frac{2}{\left(1 - re^{i(\varphi - \alpha_0)}\right)^{1+\alpha}} - 1\right] =$$

$$= u_1\left(re^{i\varphi}\right) + s\Gamma(1+\alpha)\operatorname{Re}\left[\frac{2e^{i(\alpha+1)\alpha_0}}{\left(e^{i\alpha_0} - re^{i\varphi}\right)^{1+\alpha}} - 1\right],\ re^{i\phi} \in D,$$

где

$$u_1\left(re^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha\left(\phi-\vartheta,r\right)d\psi_3\left(\vartheta\right),\ re^{i\phi}\in D.$$

Таким образом,

$$u\left(re^{i\varphi}\right)=u_1\left(re^{i\varphi}\right)+s\Gamma\left(1+\alpha\right)\mathrm{Re}\left[\frac{2e^{i(\alpha+1)\alpha_0}}{\left(e^{i\alpha_0}-re^{i\varphi}\right)^{1+\alpha}}-1\right],\ re^{i\phi}\in D,$$

где функция $u_1\left(z\right)$, что очевидно, принадлежит классу U_α. Причем, так как функция $\psi_3\left(\vartheta\right)$ непрерывна в точке α_0, то

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\alpha_0},z\in D}}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}\left|u_1\left(z\right)\right|=0.$$

Теорема доказана.

Следствия.

Следствие 1. *Если* $u\left(z\right)\in U_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, *то почти всюду на окружности* $|z|=1$

$$\lim_{|z|\to1-0}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}\left|u\left(z\right)\right|=0,$$

а если функция $\psi\left(\vartheta\right)$ *представления (A) непрерывна всюду в* $\left[-\pi,\pi\right]$ *и* $\psi\left(-\pi\right)=\psi\left(\pi\right)$, *то*

$$\lim_{|z|\to1-0}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}\left|u\left(z\right)\right|=0.$$

Если функция $F\left(z\right)$ аналитична в D, не имеет там нулей, то $F\left(z\right)$ принадлежит классу $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ (смотри [1], гл. IX, [2]) в том и только том случае, когда $\log\left|F\left(z\right)\right|\in U_\alpha$. Тем самым, мы приходим также к следующему очевидному следствию теоремы.

Следствие 2. *Если функция* $F\left(z\right)$ *аналитична в* D, *не имеет там нулей и* $F\left(z\right)\in N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, *то*

$$\lim_{z\to e^{i\alpha_0},z\in U}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}\left|\ln\left|F\left(z\right)\right|\right|=0,\ \text{для п. в. }\vartheta\in\left[-\pi,\pi\right].$$

Список литературы. 1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / 1966. – Наука, Москва. **2.** *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге / 1993. – Наука, Москва. **3.** *Nevanlinna R.* Eindeuutige Analytische Funktionen / 1937. – Springer, Berlin. **4.** *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций ограниченного вида // Уч. Зап. Вильнюсского унив. – 1956. – т.5. – С.5-27.

Поступила в редколлегию 27.03.2012