



ВІСНИК

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«XIII»**

27'2012

Харків

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«Харківський політехнічний інститут»

Збірник наукових праць
Тематичний випуск

27'2012

«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА ТЕХНОЛОГІЯХ»

Видання засновано Національним технічним університетом
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

Голова: Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

Секретар: К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;

Є.І.Сокол, чл.-кор. НАН України, проф.;

Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;

А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;

Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;

М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;

А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;

В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;

В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;

І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;

В.В.Єсипанов, канд. техн. наук, проф.;

Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;

П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;

В.Б.Клепіков, д-р техн. наук, проф.;

С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;

В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;

В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;

Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;

В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;

О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;

В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;

П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;

В.А.Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;

М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;

В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;

Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;

Ю.В.Тимофіїв, д-р техн. наук, проф.;

М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Харків 2012

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 27. – 242 с.

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

Заступник відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ю. В. Гандель,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Ю. Л. Геворкян,	канд. фіз.-мат. наук, проф.;
О. Л. Григор'єв,	д-р техн. наук, проф.;
В. К. Дубовий,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. В. Курпа,	д-р техн. наук, проф.;
О. С. Куценко,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. М. Любчик,	д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
М. В. Новожилова,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
В. П. Северин,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий,	д-р техн. наук, проф.;
Є. Г. Янютін,	д-р техн. наук, проф.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПІ».
Каф. ВМ, тел. (057) 707-60-35, (057) 707-60-87. E-mail: kpi_mmmt@mail.ru

Рекомендовано до друку вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 6 від 25 травня 2012 р.

ISSN 2222-0631

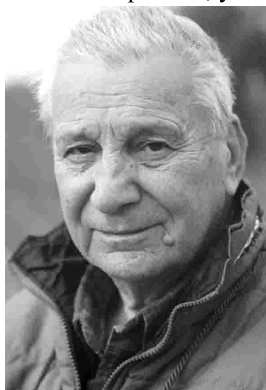
© Національний технічний університет «ХПІ», 2012

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА ВЛАДИМИРА АЛЕКСАНДРОВИЧА МАРЧЕНКО

7 июля 2012 года исполняется 90 лет выдающемуся математику Владимиру Александровичу Марченко.

В.А. Марченко принадлежат фундаментальные результаты в гармоническом анализе, спектральной теории дифференциальных и конечно-разностных операторов, теории обратных задач спектрального анализа и теории рассеяния, спектральной теории случайных матриц, теории дифракции электромагнитных волн на периодических структурах, теории усреднения краевых задач математической физики в областях сложной микроструктуры, теории вполне интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

Более полувека В.А. Марченко руководит Харьковской школой математической физики, у истоков которой стояли А.М. Ляпунов и В.А. Стеклов.



В. А. Марченко

Выдающиеся научные достижения Владимира Александровича сделали его имя широко известным в математических кругах всего мира. Многие годы В.А. Марченко читал лекции в Харьковском университете (ХГУ) и некоторое время по совместительству в политехническом (ХПИ) и педагогическом (ХГПИ) институтах. Он уделяет большое внимание подготовке научных кадров и организации математической науки в Харькове. Среди его учеников два академика НАН Украины, доктора и кандидаты наук. Многие годы он был президентом Харьковского математического общества. В.А. Марченко активно участвовал в создании Физико-технического института низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины и Математического отделения ФТИНТ.

На протяжении многих лет В.А. Марченко руководил еженедельным городским семинаром по математической физике при Харьковском университете. Семинар оказывал большое влияние на развитие математических исследований не только в Харькове, но и во всей стране.

Научные и общественные заслуги В.А. Марченко получили широкое признание. Он – лауреат Ленинской премии (1962), Государственной премии Украины в области науки и техники (1989), премий имени Н.М. Крылова (1983), Н.Н. Боголюбова (1996) и М.А. Лаврентьева (2007) НАН Украины; награжден двумя орденами Трудового красного знамени (1967, 1982), орденами Ярослава Мудрого V (2002) и IV (2007) степеней; в 1961 году был из-

бран членом-корреспондентом, а в 1969 – академиком Академии наук Украины; в 1987 г. становится действительным членом Академии наук СССР. Наконец, признанием его исключительных научных достижений явились присуждение ему звания Почетного доктора Парижского университета (1997 г.) и Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина (2002), избрание членом Норвежского королевского общества наук и литературы (2001) и награждение Золотой медалью имени В.И.Вернадского – высшей академической наградой НАН Украины (2010). В 2007 году В.А. Марченко удостоен звания «Почетного гражданина Харьковской области».

С 1945 года В.А. Марченко работает в Харьковском госуниверситете в должности научного сотрудника, доцента, а с 1952 года – профессора кафедры математической физики. С 1960 года В.А. Марченко работает в Физико-техническом институте низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, с первых дней возглавляя отдел математической физики этого института. В настоящее время он работает главным научным сотрудником отдела математической физики ФТИНТ, принимая самое активное участие в научной жизни, как института, так и всего Харькова.

Широта научных интересов и эрудиция, преданность науке и высокая требовательность к себе, постоянное внимание к ученикам и коллегам, доброжелательность и готовность оказать помощь, хорошо известны всем, кому приходилось встречаться и работать с Владимиром Александровичем. Общение с друзьями, сотрудниками, научными коллегами всегда доставляет Владимиру Александровичу огромное удовольствие, а его доброжелательность и уважительное отношение к людям, в свою очередь, находят благодарный отклик у окружающих.

В.П. Котляров, д-р физ.-мат. наук, зав. отделом математической физики ФТИНТ им. Б. И. Веркина НАН Украины

Ниже мы публикуем, подготовленные по просьбе редакции сборника ММТТ, воспоминания о В.А. Марченко акад. Е.Я. Хрушова (ФТИНТ) и проф. А.Л. Григорьева (ХПИ), которые отображают разные стороны таланта этой многогранной личности.

В.А. МАРЧЕНКО – МОЙ УЧИТЕЛЬ

(Из воспоминаний выпускника ХПИ академика НАН Украины Е.Я. Хрушова)

Я познакомился с Владимиром Александровичем Марченко более 50-ти лет назад. Тогда я, после окончания электромашиностроительного факультета ХПИ, работал инженером в экспериментальной лаборатории института «Тяжпромэлектропроект». Длительное время я находился в командировке в Кривом Роге, где участвовал в наладке прокатного стана на заводе «Криво-

рожсталь», а по вечерам пытался углубить мои «инженерные» познания в математике. Весной 1961 г. я возвратился из командировки в Харьков и один из инженеров лаборатории – Глеб Дмитриевич Клягин, узнав о моих усилиях самостоятельно постичь университетский курс математики, познакомил меня со своим школьным товарищем Владимиром Александровичем Марченко (по его выражению «настоящим живым математиком»). В то время Владимир Александрович уже перешел из Харьковского госуниверситета работать в Физико-технический институт низких температур (ФТИНТ) АН УССР, где он организовал отдел математической физики. При нашем знакомстве он дал мне задачку, которая в упрощенной формулировке заключалась в нахождении оптимального сечения вращающегося стержня (упрощенная модель лопатки турбины). Хотя я много думал над задачей, но к следующей нашей встрече не смог дать окончательного решения (это удалось сделать позже). Тем не менее, Владимир Александрович предложил мне перейти работать в его отдел, чтобы, находясь в математической среде и имея больше свободного времени, чем в лаборатории «Тяжпромэлектропроекта», я мог быстрее ликвидировать свою математическую неграмотность. Но меня не отпустили из «Тяжпромэлектропроекта», так как я был молодой специалист и должен был отработать 3 года. Тогда Владимир Александрович предложил мне поступить в аспирантуру во ФТИНТ (а это не запрещалось). Я был обескуражен: без математического образования и сразу в аспирантуру по математике? Но Владимир Александрович ободрил меня, я решился, стал готовиться к поступлению, и меня приняли. Так я в первый раз увидел одну из характерных черт Владимира Александровича – умение принимать неординарные решения. Позже эта черта неоднократно проявлялась в решении математических задач.

Учась в аспирантуре, я все больше узнавал о моем руководителе. И о том, что, будучи еще молодым человеком, он решил одну из труднейших задач математической физики, над которой работали многие известные математики мира – обратную задачу квантовой теории рассеяния. И что для этого им был разработан мощный математический аппарат операторов преобразования, с помощью которого он вывел основное интегральное уравнение обратной задачи рассеяния. Это уравнение стало краеугольным камнем в теории обратных задач рассеяния и получило название *уравнение Марченко*. Несколько позже мы все узнали, что уравнение Марченко играет очень важную роль и в методе обратной задачи рассеяния для решения нелинейных эволюционных уравнений (МОЗР). Мне тогда очень захотелось заниматься именно обратными задачами, но я не мог претендовать на это, так как моих знаний явно не хватало. Я старался побыстрее приобрести их, выборочно слушал лекции в университете, в основном лекции В.А. Марченко и Б.Я. Левина.

Большую роль в моем образовании и становлении играл семинар по математической физике, которым руководил Владимир Александрович. Я видел, как Владимир Александрович вопросами к докладчику подводил участников семинара к пониманию сути задачи. На этих семинарах нерадивым докладчикам часто доставалось «на орехи» от Владимира Александровича. И когда он мне поручал сделать доклад, я каждый раз со страхом ожидал, что и меня не минет такая же участь. Но он меня щадил.

Тема моей кандидатской работы оказалась не связанной с обратными задачами. И произошло это так. В начале 60-х годов Владимир Александрович занимался задачей о дифракции электромагнитных волн на периодических решетках, которые находят применение в различных радиотехнических устройствах. Он, совместно с З.С. Аграновичем и В.П. Шестопаловым, разработал эффективный метод решения таких задач, который широко использовался радиофизиками и, в частности, в ИРЭ этим методом рассчитывали элементы генератора субмиллиметровых радиоволн. Задачи дифракции привели Владимира Александровича к постановке нового класса задач об исследовании асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений в частных производных в областях с мелкозернистой границей. Владимир Александрович привлек и меня к этим задачам, и в 1964 году в журнале «Математический сборник» вышла наша совместная статья «Краевые задачи с мелкозернистой границей», в которой было исследовано асимптотическое поведение решения задачи Дирихле при измельчении границы области и получены усредненное уравнение и граничное условие, описывающее главный член асимптотики. А в 1966 г. появилась статья В.А. Марченко и его ученика Г.В. Сузикова, посвященная задаче Неймана.

Сначала на эти работы не обратили особого внимания на западе. Но с конца 60-х годов в Италии и Франции стали появляться работы, в которых изучались аналогичные вопросы для дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами и краевых задач в сильноперфорированных областях (аналоги областей с мелкозернистой границей). Начала интенсивно развиваться теория усреднения. А в конце 70-х годов французские математики Ф. Мюра и Д. Чиоранеску повторили результаты наших работ (по-видимому, независимо, так как ссылок на нас не было). Поэтому можно считать, что наша с Владимиром Александровичем статья 1964 г. явилась предвестником теории усреднения, а Владимир Александрович стоял у истоков развития этого нового направления в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Теории усреднения была посвящена моя кандидатская диссертация, после защиты которой я хотел заниматься обратными задачами. Но Владимир Александрович удержал меня от этого, посоветовав продолжать исследования по теории усреднения, мотивируя это тем, что это направление начинает развиваться во всем мире, имеет различные важные

приложения и мы еще не сказали своего последнего слова. Так я продолжил заниматься теорией усреднения, и это стало основным моим занятием на всю жизнь.

И все-таки мне удалось приобщиться и к теории обратных задач рассеяния и их приложениям к нелинейным интегрируемым уравнениям, и это тоже произошло благодаря Владимиру Александровичу.

В 1974 году в Уфе проходила небольшая конференция (она называлась совещанием), посвященная нелинейным эволюционным уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния. В ней участвовали многие известные советские математики, получившие (до, или после конференции) глубокие результаты в этой области: В.Е. Захаров, А.Б. Шабат, Л.Д. Фаддеев, Л.А. Тахтаджян, С.П. Новиков, Я.Г. Синай, Ю.И. Манин, В.Б. Матвеев и другие. Естественно, был приглашен и Владимир Александрович, поскольку его метод решения обратной задачи широко использовался в этой «нелинейной» науке. Но он не смог поехать в Уфу и отдал свое приглашение мне. Я поехал и не пожалел. И город Уфа и сама конференция произвели на меня неизгладимое впечатление. Я старательно пытался постичь и записать все, о чем там говорилось. Я узнал, что одной из нерешенных проблем, которой уделяется большое внимание, является периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза. Более смутное представление сложилось у меня о другой задаче, которая тоже бурно обсуждалась на конференции – задача о распаде ступеньки в уравнении Кортевега – де Фриза. Доклад о приближенном решении задачи методом Унзема делал А.В. Гуревич. У участников конференции доклад вызвал недоумение фактом рождения солитонов в асимптотике решения при отсутствии дискретного спектра. По возвращении из Уфы, я обо всем этом рассказал на семинаре Владимира Александровича по математической физике. Владимир Александрович сразу почувствовал красоту и глубину проблемы, связанной с периодической задачей Кортевега – де Фриза, и занялся ее решением. Мне же он посоветовал рассмотреть задачу Коши для КдФ - уравнения с начальными данными типа ступеньки методом обратной задачи рассеяния с целью проанализировать вопрос о рождении солитонов в асимптотике ее решения при больших временах. Тогда-то мне и пришлось основательно заняться изучением работ В.А. Марченко и Л.Д. Фаддеева по обратной задаче рассеяния и метода ОЗР для решения нелинейных вполне интегрируемых уравнений. Владимир Александрович очень скоро получил решение задачи Коши для КдФ - уравнения с периодическими начальными данными, при этом он разработал очень эффективный метод полиномиальных аппроксимаций матрицы монодромии, который с успехом применяли его ученики для других вполне интегрируемых уравнений. Владимир Александрович дал свое (эквивалентное другим) определение конечно-зонных решений, доказал их плотность в классе периодических решений и получил

полное решение периодической обратной спектральной задачи.

Владимир Александрович продолжает нас всех удивлять новыми постановками задач и оригинальными методами решения. Это, в частности, касается обратной задачи о многоканальном рассеянии для дискретных систем, обратной задачи теории малых колебаний, которыми он занимается в последнее время.

Оглядываясь на 50-тилетний, пройденный рядом с Владимиром Александровичем путь, хочу отметить, что он всегда всего себя отдавал и отдает своей любимой науке – математике. При этом тематика его исследований всегда определяется не только сложностью проблемы, но и его любовью к физике – Владимир Александрович часто обсуждает вопросы современной физики с физиками и, особенно с «математическим физиком» – его учеником Л.А. Пастуром, выпускником инженерно-физического факультета ХПИ, ныне академиком НАН Украины.

Хочу отметить еще одну увлеченность Владимира Александровича, которая также повлияла на мою жизнь. Буквально еще 3-4 года назад Владимир Александрович серьезно увлекался байдарочными походами и лыжными прогулками (по Харьковской области). К этому делу приобщил он и меня и свой первый байдарочный поход по реке Медведице я совершил в одной лодке с Владимиром Александровичем и его женой Марией Михайловной. И свою первую прогулку на лыжах с Владимиром Александровичем и Клавдием Вениаминовичем Масловым я тоже запомнил навсегда: будучи моложе их, я старался от них не отставать и так вымотался, что им пришлось доставлять меня домой буквально «под руки». Потом было еще много совместных и байдарочных и лыжных походов, которые оставили неизгладимые впечатления и, безусловно, способствовали поддержанию нашей физической формы и желанию заниматься математикой.

За все это я очень благодарен Владимиру Александровичу и в юбилейный год его 90-летия хочу пожелать ему крепкого здоровья, новых творческих успехов, счастья и радости от общения с математикой, родными и друзьями.

Е. Хрусов

АКАДЕМИК МАРЧЕНКО И ПРОЕКТ ХАРЬКОВСКОГО КЕМБРИДЖА

(Из воспоминаний проф. А.Л. Григорьева, НТУ «ХПИ»)

В 1970-е годы я учился на мехмате ХГУ им. А.М. Горького, но студентом или аспирантом Владимира Александровича стать не посчастливилось. Во взрослой жизни занимался разнообразными приложениями математики к техническим наукам и даже не предполагал, что судьба когда-нибудь приведет к задаче, которую придется решать вместе с академиком В.А. Марченко.

Летом 2001 года группа преподавателей харьковских вузов выступила с

инициативой открытия в Харькове совместного российско-украинского государственного университета. По образцу недавно открытого филиала МГУ в Севастополе, но претендующего на то, чтобы уже в ближайшей перспективе занять вакантное для нашего региона место престижного университета экстра-класса по точным наукам и высоким технологиям. Добившись принципиального согласия от руководства городского совета и областной государственной администрации, мы обратились за поддержкой к ключевым фигурам будущего проекта – ведущим харьковским учёным, и прежде всего к своему коллеге-математику В.А. Марченко, имеющему негласный статус «главного харьковского академика». Клавдий Вениаминович Маслов, работавший в те годы зам. директора ФТИНТ, сформулировал задачу просто – «Если вашу, на мой взгляд, очень хорошую идею одобрит Владимир Александрович, то поддержка всего харьковского академического корпуса будет гарантирована, и поэтому начинать её обсуждение нужно именно с ним». Так в итоге и вышло.

Тогда же состоялось моё первое знакомство с Владимиром Александровичем Марченко, и в результате его деятельного участия было составлено обращение к послу РФ в Украине В.С. Черномырдину, с текстом которого можно познакомиться на сайте Харьковского городского совета по адресу kharkov.vbelous.net/posollet.htm. Это обращение оказалось настолько убедительным и своевременным, что в речи президента РФ на российско-украинском Форуме (Харьков, декабрь 2001) оно цитировалось целыми страницами. А 7 июля 2002 года, когда отмечался 80-ти летний юбилей акад. В.А. Марченко, первой пришла поздравительная телеграмма из Москвы от президента В.В. Путина.

Наше обращение послужило стимулом (или поводом) к быстрому потеплению межгосударственных отношений, но ещё больших результатов мы ожидали от дальнейших этапов реализации проекта. К сожалению, это тогда поняли не все, и уже не все приветствовали такое развитие. Что касается местных чиновников, то они в своём большинстве не увидели здесь личной выгоды и заняли выжидательную позицию. Для примера: когда в мае 2002 года Е.П. Кушнарёву срочно понадобился оригинал соответствующего решения Форума (на нём стояли подписи двух президентов!), то губернаторская канцелярия искала документ 5 часов.

В течение следующих трёх лет, пока шла работа по этому проекту, Владимир Александрович на всех уровнях активно отстаивал совместно выработанную позицию. Он выступал против его коммерциализации и чрезмерной политизации. «Главный университет Украины по юридическим и политическим наукам (украинский Гарвард) пусть создают киевляне, мы же займёмся украинским Кембриджем». Академик Марченко не был идеалистом, и прекрасно видел трудности и «подводные камни» практической реализации проекта. Он, как никто другой, ощущал дефицит кадров, возникший на исходе века в харьковской науке и её менеджменте, и считал эту проблему основной.

Летом 2002 года планировалось подписать межгосударственное соглашение, выделить земельный участок под учебные корпуса и приступить к проектным работам. В повестке дня очередного харьковского Форума этот вопрос значился под номером 7. А под номером 3 стоял вопрос о поставках украинских труб в РФ, и по этой, главной для них проблеме, наши премьеры не договорились, прервали переговоры и разъехались по столицам. Той же осенью Украину ждали парламентские выборы, а в этот период такие соглашения не заключаются. Стало ясно, что проект прошёл свою кульминационную точку.

И пусть мы не открыли тогда свой университет, но в результате заработали высокий уровень доверия, который удалось конвертировать в реальное дело. Известно, что указом президента Украины Л.Д. Кучмы, изданном в 2003 году, бывший главный корпус ВИРТА на пл. Свободы передавался Харьковскому университету, и это был воистину «царский подарок» к двухсотлетию юбилею. Но здание требовало ремонта, денег на ремонт и содержание выделено не было, и тогда в местных бизнес - кругах возникла другая инициатива: президентский указ отменить и передать здание под офисы.

Со временем будут обнародованы все подробности решения возникшей проблемы, но сейчас мы имеем право лишь на то, чтобы «заглянуть в ответ». Когда весной 2004 года в наших столицах окончательно решалась судьба этого уникального объекта, в стенах которого вырастала радиотехническая наука всей страны, то именно благодаря доверию Государства к харьковским учёным и их бесспорному лидеру – академику Владимиру Александровичу Марченко, ХНУ им. В.Н. Каразина получил «в вечное пользование» свой Северный корпус.

Со времени тех событий прошло много лет, и некоторых наших коллег из инициативной группы уже нет в живых. Отсылая читателей к документу, опубликованному на сайте, хотелось бы ещё раз вспомнить о них. А также поблагодарить всех участников проекта (и тех, кто подписал это письмо, и тех, кто не имел такого права, но активно помогал) за проявленную твёрдость в отстаивании своей позиции. Тогда, действуя вместе, мы совершили Поступок, за который будет не стыдно ответить ни перед детьми и внуками, ни перед Богом, когда придёт наш час.

Дорогой Владимир Александрович! Я передаю Вам самые добрые пожелания от редколлегии сборника. Пользуясь счастливым случаем, мы приглашаем Вас и ваших учеников опубликовать свои статьи в нашем сборнике.

А. Григорьев

Поступила в редколлегию 10.05.2012

П.М. АНДРЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;
М.С. СВИНАРЕНКО, канд. техн. наук, асист., ХНУБА, Харків;
Р.Ю. БЛОШЕНКО, магістр, НТУ «ХПІ»

РОБОЧИЙ ПРОЦЕС РЕДУКЦІЙНОГО КЛАПАНА ГАЛЬМІВНОЇ СИСТЕМИ ЛІТАКА

Описано робочі процеси в редукційному клапані гальмівної системи літака. Наведена його розрахункова схема та математична модель робочого процесу, що комплексно враховує нестационарність гідродинамічних процесів, параметри робочої рідини та коефіцієнт витрат, що змінюються.

Описаны рабочие процессы в редукционном клапане тормозной системы самолета. Приведена его расчетная схема и математическая модель рабочего процесса, которая комплексно учитывает нестационарность гидродинамических процессов, изменяющиеся параметры рабочей жидкости и переменность коэффициента расхода.

We describe the work processes in the brake pressure reducing valve plane. It shows the design scheme and mathematical model of the workflow, which allows for complex unsteady hydrodynamic processes, changing the parameters of the working fluid and the variability of the discharge coefficient.

Вступ. Гідравлічні системи керування виконавчими механізмами широко використовуються в сучасних авіакосмічних апаратах, а саме в механізмах обертання крила літака, ховання та випускання шасі, гальмівній системі, тощо. Для таких систем надзвичайно актуальною є задача поліпшення характеристик гідроапаратів, збільшення їх необхідних ресурсів [1]. Моделювання робочих процесів в гідроапаратах, яке спирається на їх математичні моделі, дозволяє пришвидшити розробку нових зразків гідроапаратів, поліпшити характеристики існуючих, врахувати конструктивні параметри, які визначені з умови забезпечення бажаного терміна безвідмовної роботи. Тому розробка адекватних математичних моделей робочих процесів гідроапаратів є актуальним науковим завданням.

Аналіз останніх досліджень. Розробці математичних моделей робочих процесів, що відбуваються в гідроапаратах, в тому числі і в редукційних клапанах, присвячено достатньо велика кількість наукових робіт. Однак наведені в них математичні моделі гідроапаратів не враховують нестационарні гідродинамічні процеси, що відбуваються в гідроапаратах, змінність в часі параметрів робочої рідини (РР) та коефіцієнта витрат [2, 3]. Спробу врахувати в математичних моделях гідроапаратів змінні параметри РР, витоки, форму дроселюючої щілини зроблено у статті [4]. Але в ній наведені лінеаризовані математичні моделі гідроапаратів, що звужує область їх використання. Аналіз науково-технічної літератури виявив, що інформація щодо повних математичних моделей гідроапаратів, в тому числі і редукційних клапанів, відсутня. Таким чином, їх розробка є актуальним науковим завданням.

Постановка задачі. Метою статті є розробка повної математичної моделі робочого процесу редукційного клапана гальмівної системи літака.

Фізична модель редукційного клапана. Цей клапан керує роботою основної гальмівної системи літака, та має гідравлічне розвантаження. В вихідному положенні гальмівна магістраль, тиск в якій становить p_r , сполучена з магістраллю зливу, з тиском $p_{зл}$, а магістраль живлення, з тиском $p_ж$, заперта, рис. 1. Таке виконання клапана виключає гальмування коліс літака в разі порушення герметичності запірно-регулюючого елемента (ЗРЕ) 7 або підвищених теплових розширеннях РР. Підчас гальмування шток 1 зміщується, згідно з рис. 1, вліво, стискає пружину 2, яка опирається на поршень 3, що разом зі зливним клапаном 5 також зміщуються вліво. Зливний клапан закриває розвантажувальний канал, виконаний в ЗРЕ. Далі шток з поршнем та ЗРЕ зміщуються вліво. РР крізь щілину, утворену ЗРЕ та втулкою 9, починає надходити до гальмівної магістралі. В міру надходження РР до гальмівної магістралі, тиск під ЗРЕ та клапаном починає зростати. Пружина 8 починає стискатися. При досягненні заданого тиску в гальмівній магістралі, ЗРЕ під дією пружини 8 закриває щілину, утворену їм та втулкою. Цим зупиняється підвищення тиску в гальмівній магістралі, і колеса будуть гальмуватися з постійним гальмівним моментом.

При знятті зусилля з штока, він разом з зливним клапаном під дією пружини 2 зміщуються вправо. Зливний клапан відкриває розвантажувальний канал, виконаний в ЗРЕ, та сполучає гальмівну магістраль з магістраллю зливу. Відбувається розгальмування коліс.

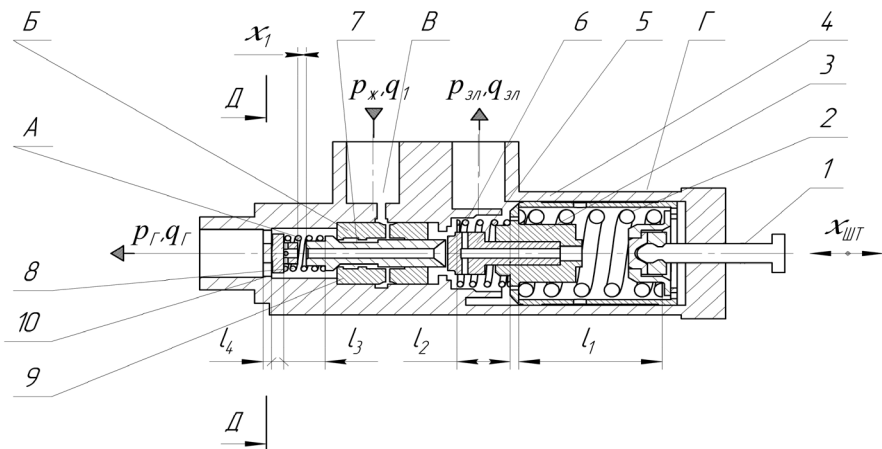


Рисунок 1 – Розрахункова схема редукційного клапана:

- 1 – шток; 2, 6, 8 – пружини; 3 – поршень; 4 – корпус 5 – зливний клапан; 7 – ЗРЕ;
9 – втулка; 10 – вихідна шайба.

На рис. 2 зображені перетини редукційного клапана, які враховуються при складанні його математичної моделі.

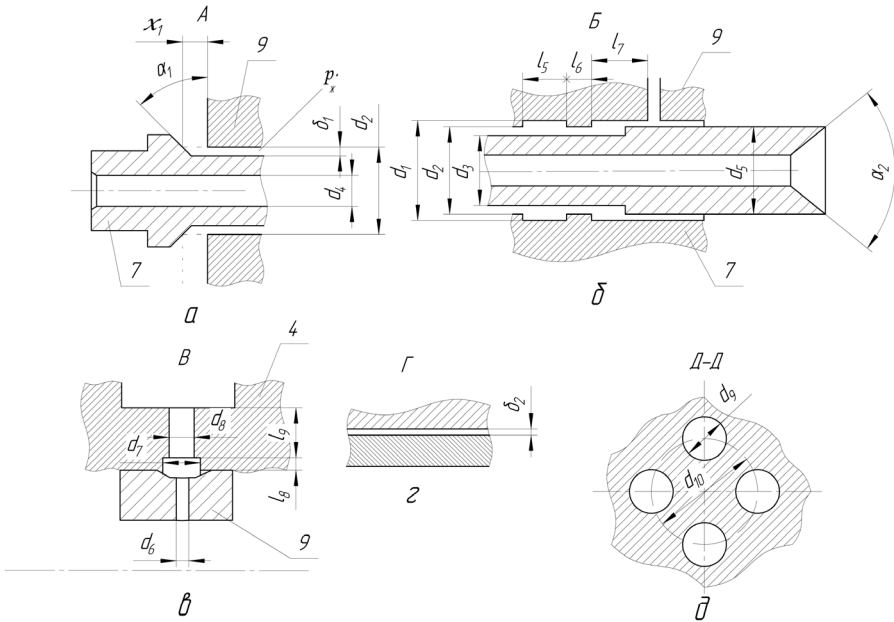


Рисунок 2 – Розтини редукційного клапана.

а – клапан гальмівної магістралі; *б* – канал підводу робочої рідини разом з клапаном зливу; *в* – канал живлення; *г* – канал між корпусом та поршнем; *д* – отвори в вихідній шайбі 10.

Математична модель робочого процесу редукційного клапана. Будемо вважати, що в гальмівній системі літака відсутній гідравлічний удар та кавітація. Математична модель робочого процесу редукційного клапана (рис. 1, 2), якщо знехтувати деформацією корпусу, штока, клапана, ЗРЕ, втратами тиску в зливній магістралі та на вихідній шайбі, витокami та перетоками, описується наступними співвідношеннями:

– рівнянням руху штока

$$m_{\text{шт1}} \ddot{x}_{\text{шт1}} = F_{\text{кер шт}}(t) - F_{\text{пр 2}}(t) ; \quad (1)$$

– рівнянням руху штока разом з поршнем та клапаном

$$m_{\Sigma 2} \ddot{x}_{\text{шт 2}} = F_{\text{кер шт}}(t) - F_{\text{пр 2}}(t) - F_{\text{пр 6}}(t) - F_{\text{гд 5}}(t) - F_{\text{тр } \Sigma 3}(t) ; \quad (2)$$

– рівнянням руху штока разом з поршнем, клапаном та ЗРЕ

$$m_{\Sigma 3} \ddot{x}_{\text{шт 3}} = F_{\text{кер шт}}(t) - F_{\text{пр 2}}(t) - F_{\text{пр 6}}(t) - F_{\text{пр 8}}(t) - F_{\text{гд 7}}(t) - F_{\text{тр } \Sigma 7}(t) - F_{\Delta p}(t) ; \quad (3)$$

– обмеженнями переміщення рухомих елементів редукційного клапана

$$\begin{cases} 0 < x_{шт1}(t) \leq x_{шт1 \max}, \\ 0 < x_{шт2}(t) \leq x_{шт2 \max}, \\ 0 < x_{шт3}(t) \leq x_{шт3 \max}; \end{cases} \quad (4)$$

– рівняннями нерозривності

$$q_1(t) = q_2(t) = q_3(t); \quad (5)$$

$$q_r(t) = q_3(t) - q_4(t); \quad (6)$$

– умовами зміни стану PP

$$T_a = const, \rho(t), \quad (7)$$

де t – час; температуру T_a приймали рівною її середньому значенню, а густину PP $\rho(t)$ визначають залежно від її газовмісту та зміни тиску в гальмівній системі літака за залежністю з статті [5].

У рівняннях (1) – (4) $m_{шт}$, $m_{\Sigma 2}$ і $m_{\Sigma 3}$ – відповідно маси штока, а також штока разом з поршнем та клапаном і штока разом з поршнем, клапаном та ЗРЕ з приведеними до них рухомими частинами; $x_{шт1}(t)$, $x_{шт2}(t)$ і $x_{шт3}(t)$ – відповідні переміщення штока на окремих фазах процесу, що моделюється

Сила керування штоком $F_{кершт}(t)$ визначається характером зміни зусилля, з яким натискають на шток. Зазначимо, що бажаним є закон зміни зусилля за експонентою. Силу пружин 2, 6 і 8 визначали за однотипними залежностями:

$$F_{пр}(t) = c_{пр} x_{шт}(t), \quad (8)$$

де $c_{пр}$ – коефіцієнт жорсткості пружини.

Гідродинамічні сили визначали за залежностями з роботи [6], записані нами у вигляді, що дозволяє враховувати нестационарні гідродинамічні процеси,

$$F_{гд5}(t) = [p_r(t) - p_{зл}]A_5 + \rho(t) q_4^2(t)/A_5, \quad (9)$$

$$F_{гд7}(t) = [p_{*ж}(t) - p_r^*(t)]A_7 + \rho(t) q_3^2(t)(\cos \theta_n / \varepsilon_7 - 1)/A_7, \quad (10)$$

де $p_{*ж}(t)$ – зміна в часі тиску в кільцевій щілині між ЗРЕ та втулкою; $p_r^*(t)$ – зміна в часі тиску в камері між втулкою і вихідною шайбою; $A_5 = \pi d_5^2/4$ – площа поперечного перетину внутрішнього каналу ЗРЕ з сторони магістралі зливу; $A_7 = \pi(d_1^2 - d_7^2)/4$ – площа кільцевої щілини між ЗРЕ та втулкою;

$$q_4(t) = \mu_5(\text{Re}) \pi d_5 x_{шт2}(t) \sqrt{2[p_r^*(t) - p_{зл}]/\rho(t)} - \quad (11)$$

витрата через внутрішній канал ЗРЕ зі сторони магістралі зливу;

$$q_3(t) = \mu_7(\text{Re}) \pi \sqrt{(d_1^2 - d_3^2)} x_{шт3}(t) \sqrt{2[p_{*ж}(t) - p_r^*(t)]/\rho(t)} - \quad (12)$$

витрата через кільцеву щілину між ЗРЕ та втулкою; $\mu_5(\text{Re})$, $\mu_7(\text{Re})$ – коефіцієнти витрати залежно від числа Рейнольдса Re , що розраховували за залежністю з роботи [7]; d_1 , d_4 і d_3 – діаметри внутрішньої втулки, внутрішнього каналу ЗРЕ з сторони магістралі зливу і діаметр ЗРЕ; θ_n – кут нахилу струменя потоку до осі ЗРЕ, (приймали, що $\theta_n = \alpha_1$); ε_7 – коефіцієнт стиснення потоку.

Сили тертя поршня та поршня разом з ЗРЕ, в припущенні, що поршень та поршень з ЗРЕ займають асиметричне положення і мають точки контакту з гільзою та з гільзою і втулкою, а кут їх перекосу вважався зневажливо малим, та розраховувався за однотипними залежностями з статті [8], наприклад для поршня:

$$F_{\text{тр}\Sigma}(t) = \frac{2 k_{\text{ткo}} c_{\text{пр}6\Sigma} x_{\text{пр}60} \left[\delta_{\text{п}3} + 0,56 D_{\text{пр}6} \left(\frac{0,504}{n_{\text{пр}6}} + \frac{0,121}{n_{\text{пр}6}^2} + \frac{2,06}{n_{\text{пр}6}^3} \right) \right]}{L_{\text{п}}} \text{sign } \dot{x}_{\text{шт}2} +$$

$$+ 8 \pi \mu k_{\text{тр}} \cdot \frac{l_{\text{еп}} \left(d_{\text{п}} \delta_{\text{п}} + \delta_{\text{п}}^2 \right)}{\left(d_{\text{п}}/2 + \delta_{\text{п}} \right)^2 + \left(d_{\text{п}}/2 \right)^2 - \frac{d_{\text{п}} \delta_{\text{п}} + \delta_{\text{п}}^2}{\ln \left(1 + 2\delta_{\text{п}}/d_{\text{п}} \right)}} \cdot \dot{x}_{\text{шт}2}, \quad (13)$$

де $k_{\text{ткo}}$ – коефіцієнт тертя значення якого мало змінне та знаходиться в межах $0,19 - 0,21$ [7]; $c_{\text{пр}6\Sigma}$, $x_{\text{пр}60}$ – сумарний коефіцієнт жорсткості і попередній підтиск пружини 6; $\delta_{\text{п}}$ – радіальний зазор між поршнем і його гільзою; $D_{\text{пр}6}$, $n_{\text{пр}6}$ – середній діаметр і число робочих витків пружини 6; $L_{\text{п}}$, $d_{\text{п}}$ – довжина і діаметр поршня; $\text{sign}(x)$ – функція Кронекера; μ – коефіцієнт динамічної в'язкості РР; $l_{\text{еп}}$ – ефективна довжина контакту між поршнем і його гільзою; $k_{\text{тр}}$ – коефіцієнт, який враховує положення поршня в гільзі, і розраховується за залежністю [8]:

$$k_{\text{тр}} = 1,8 / (0,47 + \bar{v}_t) + 1,$$

\bar{v}_t – відносний коефіцієнт кінематичної в'язкості РР, $\bar{v}_t = v_{50}/v_{10}$, v_{10} , v_{50} – коефіцієнт кінематичної в'язкості РР при температурі 10°C і 50°C відповідно.

Силу $F_{\Delta p}(t)$, що обумовлена перепадом тиску між гальмівною магістраллю та магістраллю зливу, і яка діє на шток разом з поршнем, клапаном та ЗРЕ розраховували за формулою

$$F_{\Delta p}(t) = \Delta A_t [p_r^*(t) - p_{\text{зл}}], \quad (14)$$

де ΔA_r – різниця площ поперечного перетину ЗРЕ з боку гальмівної магістралі та поршня з клапаном з боку магістралі зливу .

Витрату через кільцеву щілину між корпусом і втулкою розраховували за відомою залежністю

$$q_2(t) = \frac{1,75 \pi d_3 s_{зр\epsilon}^3 [p_{ж}(t) - p_{ж}^*(t)]}{12 \mu l_{щ}}, \quad (15)$$

де коефіцієнт 1,75 враховує ексцентриситет щілини; $s_{зр\epsilon}$, $l_{щ}$ – висота і довжина щілини між корпусом і втулкою.

Зазначимо, що коли щілина між корпусом і втулкою складається з декількох кільцевих щілин, то витрату через них розраховують за залежностями, аналогічними (15).

Витрату через 4 отвори вихідної шайби 10 розраховують за формулою

$$q_r(t) = \mu_{от}(\text{Re}) \pi d_{от}^2 \sqrt{2[p_r(t) - p_r^*(t)]/\rho(t)}, \quad (16)$$

де $\mu_{от}(\text{Re})$ – коефіцієнт витрати отвору шайби в залежності від числа Рейнольдса; $d_{от}$ – діаметр отвору в шайбі.

Для отримання динамічних характеристик редукційного клапана рівняння (1) – (16) розглядають разом з початковими умовами. Для редукційного клапана, який працює в гальмівній системі літака, за початкові умови приймають: $x_{шт1}(0) = 0$; $x_{шт2}(0) = 0$; $x_{шт3}(0) = 0$; $\dot{x}_{шт1}(0) = 0$; $\dot{x}_{шт2}(0) = 0$;

$\dot{x}_{шт3}(0) = 0$, $p_{зл} = 0,5$ МПа. Задають геометричні параметри редукційного клапана, коефіцієнти жорсткості пружин та початкові параметри робочої рідини: модуль об'ємної пружності та густину при атмосферному тиску, газоміст і робочу температуру. Також задають характер зміни $x_{шт}(t)$ чи зусилля на штоку, витрати навантаження при заданих початкових умовах. Зазначимо, що величина тиску в гальмівній системі в усталеному режимі відповідає навантаженню на гальмах, що трансформується витратою навантаження. При заданих початкових умовах на комп'ютері за допомогою пакета прикладних програм отримують графіки перехідних процесів у редукційному клапані та гальмівній системі літака.

Висновки. Уперше розроблена повна математична модель робочого процесу редукційного клапана гальмівної системи літака, що комплексно враховує нестационарні гідродинамічні процеси, змінність параметрів РР та коефіцієнта витрат. Використання розробленої математичної моделі дозволить на етапі проектування редукційного клапана, підвищити точність розрахунків та, як наслідок, отримати кращий кінцевий результат.

Список літератури: 1. Рикуніч Ю.М., Ситніков О.С., Федоричко Я.Б. й ін. Прогнозування ресурсу малогабаритних пневматичних клапанів з електромагнітним приводом методом аналізу

наєвих випадкових процесів пошкоджуваності // Промислова гідравліка і пневматика. – Вінниця: ВНАУ, 2011. – № 1 (31). – С. – 71 – 84. **2.** Расчет, проектирование и эксплуатация объемного гидропривода: учеб. пособие / З.Л. Финкельштейн, О.М. Яхно, В.Г. Чебан и др. К.: НТУУ «КПИ», 2006. – 216 с. **3.** Аврунін Г.А., Кириченко І.Г., Мороз І.І. Основи об'ємного гідропривода і гідропневмоавтоматика: навч. посібн. Під ред. Г.А. Авруніна. Харків: ХНАДУ, 2009. – 424 с. **4.** Андренко П.М. Побудова математичних моделей гідроапаратів із гідравлічним вібраційним контуром // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2004. – №2 (8). – С. 15 – 20. **5.** Лурье З., Федоренко И. Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металлургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences. – Lublin. – 2010. – Vol. 12 С. 10 – 25. **6.** Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: [учебник для вузов] – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с. **7.** Данилов Ю.А., Кирилловский Ю.Л., Колпаков Ю.Г. Аппаратура объемных гидроприводов: Рабочие процессы и характеристики. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с. **8.** Лур'є З.Я., Андренко П.М. Розрахунок сили тертя на запорно-регулюючому елементі гідроапарата з вібраційною лінеаризацією // Вісник НТУ «ХПІ». – 2008. – № 4. – С. 129 –137.

Надійшла до редколегії 21.03.2012

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН, д-р физ.-мат. наук, доц., ГИУА, Ереван

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Розглядається задача Діріхле для правильно еліптичного рівняння зі сталими коефіцієнтами четвертого порядку в одиничному колі. Розв'язок шукається в класі функцій, що задовольняють умові Гельдера аж до границі разом з похідними першого порядку. Отримано умови на коефіцієнти, необхідні і достатні для однозначної розв'язності зазначеної задачі, а при порушенні цих умов доведено, що дефектні числа задачі дорівнюють одиниці. Розв'язок даної задачі і умови розв'язності визначаються в явному вигляді.

Рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами четвертого порядка в единичном круге. Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы вместе с производными первого порядка. Получены условия на коэффициенты, необходимые и достаточные для однозначной разрешимости указанной задачи, а при нарушении этих условий доказано, что дефектные числа задачи равны единице. Решение рассматриваемой задачи и условия разрешимости определяются в явном виде.

We consider the Dirichlet problem for the fourth order properly elliptic equation with constant coefficients in the unit disc. We seek the solution in the class of functions which satisfy Holder condition up to the boundary with first degree derivatives. The necessary and sufficient conditions of the unique solvability of the problem are obtained. If these conditions failed, it was proved that the defect numbers of the problem are equal to one. The solution of the problem and the solvability conditions are determined in explicit form.

Введение и формулировка доказываемых теорем. Пусть $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^4 A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) – это корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^4 A_k \lambda^{4-k} = 0, \quad (2)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 \neq i, \quad \lambda_3 = \lambda_4, \quad \Im \lambda_2 > 0, \quad \Im \lambda_3 < 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) ищется в классе $C^4(D) \cap C^{(1, \alpha)}(\bar{D})$, и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial N} \right|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

Здесь $f \in C^{(1, \alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, $\partial / \partial N = -\partial / \partial r$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ . Далее $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Задача (1), (4) фредгольмова (смотри [1]). Однозначная разрешимость однородной задачи (1), (4) (при $f \equiv g \equiv 0$) была исследована в [2]. В [3] была исследована однородная и неоднородная задача (1), (4) и получена формула для вычисления дефектных чисел задачи. В предлагаемой работе, используя представление общего решения уравнения (1), полученное в [4], выводится другая формула для определения дефектных чисел, которая позволяет доказать, что в исследуемом случае эти дефектные числа могут принимать значения равные только нулю или единице. Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

Обозначим

$$\mu = \frac{i - \lambda_2}{i + \lambda_2}, \quad \nu = \frac{i + \lambda_3}{i - \lambda_3}, \quad \delta = \mu\nu. \quad (5)$$

Отметим, что из (3) следует, что $0 < |\mu| < 1$ и $|\nu| < 1$, следовательно, и $|\delta| < 1$.

Ниже доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. При $\nu = 0$ задача Дирихле (1), (4) однозначно разрешима. При $\nu \neq 0$ задача Дирихле (1), (4) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$P_{k-2}(\delta) = \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)\delta^j \neq 0, \quad k = 3, 4, \dots \quad (6)$$

Если условие (6) нарушается при некотором n , то однородная задача (1), (4) имеет ненулевое решение, которое является полиномом порядка $n+1$. Следовательно, если условие (6) нарушается при k_1, k_2, \dots, k_l , то дефектные числа задачи равны 1.

Отметим, что так как $|\delta| < 1$, то условия (6) могут нарушаться только для конечного числа k . Доказываем, что справедливо более точное утверждение.

Теорема 2. Пусть корни уравнения (2) удовлетворяют условию (3). Тогда условие (6) может нарушаться не более чем для одного значения k . Таким образом, задача Дирихле или однозначно разрешима, или же однородная задача Дирихле (1), (4) имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы граничные функции f и g удовлетворяли одному условию ортогональности, то есть дефектные числа задачи (1), (4) равны единице.

Вспомогательные предложения. Сначала представим уравнение (1) и граничные условия (4) в комплексной форме. Используя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

приводим уравнение (1) к следующей форме

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) u = 0. \quad (7)$$

Здесь числа μ и ν определяются по формулам (5). Далее, учитывая равенства

$$z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

которые выполняются при всех $z = re^{i\varphi} \neq 0$, граничные условия (4) приводим к эквивалентной форме:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\Gamma} = F(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|_{\Gamma} = G(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad u(1, 0) = f(1, 0). \quad (8)$$

Граничные функции F, G из класса $C^{(\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по заданным функциям f и g :

$$F(x, y) = -\frac{x-iy}{2} \left(g + i \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right), \quad G(x, y) = -\frac{x+iy}{2} \left(g - i \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (9)$$

В дальнейшем будем исследовать задачу (7), (8). Сначала решим уравнение (7). При $\nu \neq 0$ будем использовать представление общего решения

уравнения (7), полученное в [4] (*лемма 1*):

$$u(x, y) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z + \mu\bar{z}) + \Psi_1(\bar{z} + \nu z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_2(\bar{z} + \nu z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in D. \quad (10)$$

Здесь функция Φ_2 аналитична в области $D(\mu) = \{z + \mu\bar{z} : z \in D\}$, функция Φ_1 аналитична в круге D , а функции Ψ_j ($j=1,2$) аналитичны в области $D(\nu) = \{\bar{z} + \nu z : z \in D\}$. При $\nu=0$ общее решение уравнения (7) запишем в виде ([1]):

$$u(x, y) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z + \mu\bar{z}) + \Psi_1(\bar{z}) + (1 - z\bar{z})\Psi_2(\bar{z}), \quad (x, y) \in D, \quad (11)$$

где Φ_2 аналитическая в $D(\mu)$, а Φ_1 , Ψ_j аналитические в D функции. Таким образом, нам необходимо определить неизвестные аналитические функции Φ_j и Ψ_j ($j=1,2$) по граничному условию (8). Для этого нам понадобится представление функций $\Phi_2(z + \mu\bar{z})$ и $\Psi_j(\bar{z} + \nu z)$ в окрестности Γ аналитическими в D функциями. В [5] доказано, что если $|\mu| < 1$ и $|\nu| < 1$, а функции Φ и Ψ аналитичны в областях $D(\mu)$ и $D(\nu)$ соответственно, то при $|z|=1$ функции Φ и Ψ допускают представление

$$\Phi(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad \Psi(\bar{z} + \nu z) = \rho(\bar{z}) + \rho(\nu z). \quad (12)$$

Здесь ω и ρ – аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ω и ρ , то Φ и Ψ восстанавливаются по формулам:

$$\begin{aligned} \Phi(z + \mu\bar{z}) &= \omega\left(\frac{1}{2}(z + \mu\bar{z} + \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})\right) + \omega\left(\frac{1}{2}(z + \mu\bar{z} - \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})\right), \\ \Psi(\bar{z} + \nu z) &= \rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z} + \nu z + \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})\right) + \rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z} + \nu z - \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})\right), \end{aligned}$$

где $|z| < 1$. В первой из этих формул выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Во второй формуле ветвь выбирается аналогично.

Доказательство теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай $\nu \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) определяется по формуле (10). Используя легко проверяемые операторные равенства

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + iI \right) \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - iI \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (13)$$

(I – единичный оператор), после подстановки функции (10) в граничные уравнения (8), получаем следующие уравнения:

$$\Phi'_1(t) + \Phi'_2(t + \mu\bar{t}) + \nu\Psi'_1(\bar{t} + \nu t) + \nu\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + iI\right)\Psi'_2(\bar{t} + \nu t) = F(t),$$

$$\mu\Phi'_2(t + \mu\bar{t}) + \Psi'_1(\bar{t} + \nu t) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - iI\right)\Psi'_2(\bar{t} + \nu t) = G(t), t = x + iy, (x, y) \in \Gamma. \quad (14)$$

Представим функции Φ'_2 и Ψ'_j на границе Γ по формулам (12):

$$\Phi'_2(t + \mu\bar{t}) = \mathcal{G}(t) + \mathcal{G}(\mu\bar{t}), \Psi'_j(\bar{t} + \nu t) = \psi_j(\bar{t}) + \psi_j(\nu t), t \in \Gamma, j = 1, 2. \quad (15)$$

Здесь \mathcal{G} и ψ_j аналитические в круге D функции. Учитывая, что равенства (15) выполняются при всех $t \in \Gamma$, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm iI\right)\Psi'_2(\bar{t} + \nu t) = -i\bar{t}\psi'_2(\bar{t}) + i\nu t\psi'_2(\nu t) \pm i(\psi_2(\bar{t}) + \psi_j(\nu t)), t \in \Gamma. \quad (16)$$

Разложим функции Φ_1 , \mathcal{G} , ψ_j ($j = 1, 2$) в ряд Тейлора:

$$\Phi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} t^k, \mathcal{G}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} t^k, \psi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} t^k, \quad (17)$$

а функции F и G – в ряд Фурье:

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k t^k, G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t^k, \quad (18)$$

и подставим (18), (17), (16), (15) в граничные равенства (14). Получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \mu^k t^{-k} + \nu \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} t^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} \nu^{k+1} t^k + \\ + i\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-k+1) B_{2k} t^{-k} + i \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) B_{2k} \nu^{k+1} t^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k t^k, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \mu^{k+1} t^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} t^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} \nu^k t^k + i \sum_{k=0}^{\infty} (-k-1) B_{2k} t^{-k} + \\ + i \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) B_{2k} \nu^k t^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t^k, |t|=1. \end{aligned} \quad (20)$$

Эти соотношения выполняются при всех $t \in \Gamma$, поэтому коэффициенты при соответствующих степенях t^k в правых и левых частях (19) и (20) должны совпадать. При $k \geq 1$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_{jk} и B_{jk} :

$$\begin{cases} A_{1k} + A_{2k} + \nu^{k+1} B_{1k} + i(k+1)\nu^{k+1} B_{2k} = F_k \\ \mu A_{2k} + \nu^k B_{1k} + i(k-1)\nu^k B_{2k} = G_k \\ \mu^k A_{2k} + \nu B_{1k} + i(-k+1)\nu B_{2k} = F_{-k} \\ \mu^{k+1} A_{2k} + B_{1k} + i(-k-1) B_{2k} = G_{-k} \end{cases}. \quad (21)$$

При $k = 0$ постоянные A_{j0} и B_{j0} определяются из следующих уравнений:

$$\begin{cases} A_{10} + 2A_{20} + 2\nu B_{10} + 2iB_{20} = F_0 \\ 2\mu A_{20} + 2B_{10} - 2iB_{20} = G_0 \end{cases} \quad (22)$$

Система (22) всегда разрешима, но решение не единственно. Также и система (21) при $k = 1$ не является однозначно разрешимой, так как левые части второго и третьего уравнений совпадают. Учитывая, что $F_{-1} = G_1$ (это следует из (18) и (9)), получим, что система (21) при $k = 1$ также имеет решение.

Заметим, что не единственность решения этих систем не приводит к нетривиальным решениям однородной задачи (1), (4), так как решением этой задачи может быть только многочлен ([6]), а в силу однородных условий (4), он имеет вид (смотри [7], стр.74, теорема 5.1) $P(x, y) = (1 - z\bar{z})^2 Q(x, y)$, то есть является многочленом не менее четвертого порядка. Таким образом, коэффициенты A_{jk} и B_{jk} при $k = 0, 1$ не приводят к нетривиальным решениям однородной задачи (1), (4).

Итак, для определения дефектных чисел следует изучить систему (21) при $k \geq 2$. Вычисляя определитель матрицы системы (21), получим

$$\Delta_k = 2i\mu\nu(\delta - 1)^2 P_{k-2}(\delta), \quad (23)$$

где δ и P_{k-2} определяются в (5) и (6). Таким образом, Δ_k отличается от P_{k-2} ненулевым сомножителем. Если выполняются условия (6), то коэффициенты A_{jk} и B_{jk} при $k \geq 2$ определяются однозначно, поэтому функции $\Phi'_1, \mathcal{A}, \psi_j$, а, следовательно, и функции Φ'_2, Ψ'_j определяются единственным образом (с точностью до многочленов первого порядка). Из формулы (23) следует, что при $k \rightarrow \infty$ имеем $\Delta_k \rightarrow -2i\nu\mu \neq 0$. Поэтому получаем, что на бесконечности порядок роста коэффициентов функции Ψ'_2 совпадает с порядком роста коэффициентов F_k и G_k , а порядок роста коэффициентов функции Φ'_j и Ψ'_1 совпадает с порядком роста kF_k и kG_k .

Учитывая, что порядок роста коэффициентов ряда Фурье функции определяет класс Гельдера, которому эта функция принадлежит (смотри [8], гл.2, параграф 3), получаем, что решение u , полученное по коэффициентам A_{jk} и B_{jk} по формуле (10) принадлежит классу $C^{(1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$, то есть является искомым решением задачи (1), (4).

Предположим, что условие (6) нарушено при некотором k_0 . Тогда, при этом k_0 однородная система (21) имеет одно линейно независимое решение

(ранг основной матрицы системы не меньше трех) A_{jk_0} и B_{jk_0} , по которому определяется одно линейно независимое решение однородной задачи (1), (4), u_{k_0} , являющееся многочленом степени $k_0 + 1$.

Соответственно, для разрешимости неоднородной системы (21) необходимо одно линейно независимое условие на коэффициенты $F_{\pm k_0}$ и $G_{\pm k_0}$, которое представляет собой условие ортогональности, накладываемое на граничные функции f и g .

Итак, при $\nu \neq 0$ теорема 1 доказана. В случае $\nu = 0$ доказательство проводится аналогично, при этом нет необходимости разложения в ряд неизвестных функций Φ_j и Ψ_j , они определяются непосредственно из граничных равенств (8). Теорема 1 доказана.

Пример. Пусть условие (6) нарушено при $k = 3$. Тогда $P_1(\delta) \equiv 1 + 2\delta = 0$, то есть $\delta = -0.5$. Это равенство выполнено, например, при $\mu = -2/3$, $\nu = 3/4$. Легко проверить, что *однородная задача Дирихле* для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) u = 0$$

имеет нетривиальное решение $u_0(x, y) = (1 - z\bar{z})^2$. Для разрешимости неоднородной задачи (1), (4) необходимо и достаточно условие $32/27G_3 - 2F_{-3} + G_{-3} = 0$. Учитывая, что F_k и G_k – это коэффициенты Фурье функций (9), получаем одно условие на граничные функции f и g , необходимое и достаточное для разрешимости задачи (1), (4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi}) \left(\frac{64}{27} e^{-2i\varphi} + 4e^{2i\varphi} + 4e^{4i\varphi} \right) d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi}) \left(\frac{32}{27} e^{-2i\varphi} - 2e^{2i\varphi} + e^{4i\varphi} \right) d\varphi = 0.$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства рассмотрим многочлен

$$P_{k-2}(z) = \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)z^j, \quad (24)$$

определенный по формуле (6). По *теореме Енестрема – Какейя* ([9]) корни многочлена $Q_n(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^j$ с положительными коэффициентами p_j находятся в кольце

$$\min_j \left(\frac{p_j}{p_{j+1}} \right) \leq |z| \leq \max_j \left(\frac{p_j}{p_{j+1}} \right). \quad (25)$$

Применяя эту теорему к многочлену (24), получим, что корни многочлена P_{k-2} находятся в кольце

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{k-2}{k-1}. \quad (26)$$

Предположим теперь, что при некотором δ имеем $P_{k-2}(\delta) = P_{k+m-2}(\delta) = 0$. Тогда число δ является корнем многочлена P_{k-2} и корнем многочлена

$$Q(z) \equiv P_{k+m-2}(z) - P_{k-2}(z) = z^{k-1} \sum_{j=0}^{m-1} (j+k)z^j \equiv z^{k-1}R(z).$$

Поскольку $\delta \neq 0$, то δ является корнем многочлена R . С другой стороны, применяя неравенство (25), получим, что корни многочлена R находятся в кольце

$$\frac{k}{k+1} \leq |z| \leq \frac{k+m-2}{k+m-1}. \quad (27)$$

Области (26) и (27) не пересекаются, поэтому многочлены P_{k-2} и R и, следовательно, P_{k-2} и P_{k+m-2} не могут иметь общих корней. Теорема 2 доказана.

Замечание. Отметим, что из (26) следует, что при $|\delta| < 0.5$ условие (6) выполняется, то есть задача (1), (4) однозначно разрешима.

Список литературы. 1. *Tovmasyan N.E.*, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific Publ., Singapore, 1998, – 236pp. **2.** *Буряченко Е.А.*, О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. Сб. научных трудов, – Вып. 10. – Донецк. 2000. – С. 44-49. **3.** *Бабаян А.О.*, Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Известия НАН Армении, Математика. – Т.34. – №.5. – 1999. – С.1-15. **4.** *Бабаян А.О.*, Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге // Известия НАН Армении, Математика. – Т.38. – №.6. – 2003. – С. 39-48. **5.** *Товмасын Н.Е.*, Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия НАН Армении, Математика. – Т.3. – №.6. – 1968. – С. 497-521. **6.** *Morrey C.B.*, On the analyticity of the solutions of analytic non linear elliptic systems of partial differential equations // Am. J. Math., 80. – №.1. – 1958, – pp.219-237. **7.** *Axler S., Bourdon P., Ramey W.*, Harmonic function theory. – New York, Springer-Verlag, 2001, – 270pp. **8.** *Бару Н.К.*, Тригонометрические ряды. – М.: Физматлит, 1961. – 936с. **9.** *Anderson N., Saff E.B., Varga R.S.*, On the Enestrom - Kakeya theorem and its sharpness // Linear Algebra and its Appl. 28, – 1979. – pp. 5-16.

Поступила в редколлегию 27.03.2012

В.А. БАТЛУК, д-р. техн. наук, проф., НУ «Львівська політехніка», Львів;
Б.М. БЕЛЯВСЬКА, канд. техн. наук, НУ «Львівська політехніка», Львів;
Є.Д. БОЧКАЛО, студент, НУ «Львівська політехніка», Львів

АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ФАКТОРІВ НЕБЕЗПЕКИ ПРИ ВИКОРИСТАННІ МОБІЛЬНОГО РІЗУЧОГО ІНСТРУМЕНТУ З РОТАЦІЙНОЮ ПИЛОЮ

Наводиться фізична сутність явищ, які протікають в кожусі мобільної пили типу «болгарка», визначений характер розподілу швидкостей в ньому, проаналізовані сили, які діють на частинки аерозолу, що дозволяє розкрити фізичну суть процесу руху повітряного потоку в проєктованому апараті, визначити вплив, діючих на частинки аерозолу в радіальному напрямі сил на характер їх руху, значно понизити кількість експериментальних досліджень по вивченню впливу параметрів апарату на ефективність його роботи.

Приводиться физическая сущность явлений, которые протекают в кожухе мобильной пилы типа «болгарка», определён характер, распределение скоростей в нём, проанализированы силы, которые действуют на частички аэрозоля, что позволяет раскрыть физическую сущность процесса движения воздушного потока в проектируемом кожухе, определить влияние, действующих на частички аэрозоля в радиальном направлении сил на характер их движения, значительно снизить количество экспериментальных исследований по изучению влияния параметров кожуха на эффективность его работы.

We present the physical nature of phenomena that occur in a housing of mobile saw of type "grinders", defined the character of the velocity distribution in it, analyze the forces acting on aerosol particles, which can reveal the physical nature of the process air flow in the projected housing, to determine the effect of acting on the particles in the aerosol radial forces on the nature of their movement, greatly reduce the number of experimental studies on the influence of parameters of the casing on the effectiveness of its work.

Вступ. Поряд з різними природними явищами (виверження вулканів, лісні пожежі, вивітрювання й ерозія ґрунту тощо), які призводять до забруднення атмосфери, все більше значення в цій проблемі займає діяльність людини, яка пов'язана з освоєнням природних багатств, розвитком і вдосконаленням промисловості, сільського господарства, будівництва і транспорту. Ця діяльність у зв'язку з недостатністю наших знань, недосконалістю технології або відсутністю всебічної прогнозувальної обробки супроводжується небажаними процесами – викидами в атмосферу цілого ряду шкідливих побічних продуктів. Забруднюючи атмосферу, вони завдають величезних, часто невинуватих збитків не тільки природному середовищу, але і самій людині, крім того і забираючи її здоров'я або навіть життя.

Проблема попередження нещасних випадків на виробництві сьогодні дуже актуальна і майже не вирішувана. Сукупність факторів виробничого середовища, що впливають на працездатність людини в процесі роботи, складають умови праці. Умови праці – це складне об'єктивне суспільне явище, що

формується в процесі роботи під дією взаємозв'язаних факторів соціально-економічного, техніко-організаційного і природного характеру і впливає на умови існування людини.

Небезпека пилу тим більша, чим менший розмір пилинок, тому що цей пил довше лишається в якості аерозолі в повітрі і глибше проникає в легеневі канали. В організм людини проникають частинки пилу, головним чином, розміром не більші за 2 мкм. Попадаючи на шкіру, пил проникає в сальні і потові залози і порушує терморегуляцію організму.

Здатність високодисперсного пилу довгостроково знаходитися в зваженому стані має істотне значення для вирішення задач по видаленню її з повітря приміщень і будинків.

Якщо виявиться, що вдосконалення технологічних процесів, створення санітарно-захисних зон, збільшення висоти труб і інші заходи, які зменшують вплив викидів шкідливих речовин на робочі місця і в атмосферу, не в змозі знизити вміст забруднень в атмосферному повітрі до граничнодопустимих концентрацій, то викиди приходиться піддавати очищенню до такого ступеня, щоб у кінцевому результаті вони не їх перевищували.

Аналіз останніх досліджень. У даний час очищення забрудненого повітря і газів є основним способом охорони повітряного басейну від забруднень, який застосовується у всіх випадках, коли використання активних методів очистки поки що є неможливим або економічно недоцільним. Задача промислового газоочищення – нейтралізація повітряного басейну від організованих газових викидів і стаціонарних джерел.

Очищення викидів значно спрощується, якщо гази, що відходять (напр. димові), рухаються по газоходах. Однак у багатьох випадках, напр., при роботі дробарок, травильних установок, гальванічних ванн, при обрубці і зачищенні виливків, при обробці пластмас, текстоліту, склопластиків, при роботі з ріжучим інструментом тощо необхідно вживати спеціальні заходи для уникнення виділення цих речовин безпосередньо в атмосферу. В інших випадках домішки не тільки створюють небезпеку для працюючих і впливають на якість продукції, але стають важко вловимими.

Тому вловлення шкідливих речовин безпосередньо з джерела виділення є запорукою не тільки поліпшення гігієнічних умов праці на робочих місцях, але і високої ефективності пиловловлюючих установок, які складаються в основному, з наступних елементів:

- приймального пристрою, що може включати один чи групу приймачів;
- мережі трубопроводів;
- вентилятора, що відсмоктує запилене або загазоване повітря по трубопроводах до пилоочисної установки.

Постановка завдання. Найбільші досягнення у відцентровому вловленні твердих частинок з газового потоку відмічені в частині апаратурного

оформлення (конструювання), а не наукових розробок, що пояснюється, з одного боку, накопиченням багаторічного досвіду експлуатації промислових апаратів, а з іншого – надзвичайною складністю опису окремих явищ і характеристик гетерогенних систем тверде тіло – газ у відцентровому полі. Тому теорія роботи циклонів ще недосконала і не дає можливості розрахувати різні конструкції. Наприклад, питання про найвигіднішу форму циклонів вирішується до даного часу тільки емпіричним і дослідним шляхом.

Залежно від фізико-хімічних властивостей пилу та технологічних параметрів пилогазових потоків пропонуються різні вимоги до остаточного вмісту пилу в газових потоках, особливо до токсичних, дрібнодисперсних пилів. Тому можлива поліваріантність рішень при розробці відцентрових апаратів для виділення твердих частинок з газових потоків. Проведений нами аналіз виявив велику кількість конструкцій відцентрових апаратів, частіше не підкріплених теоретичними і експериментальними дослідженнями структури утворених потоків і процесу виділення частинок в них.

Велика кількість різних конструкцій пиловловлювачів одного і того ж призначення, які не мають чітких технічних характеристик, гальмує вибір правильних схем очистки при проектуванні пилоочисних пристроїв, а відсутність уніфікованого пилоочисного обладнання служить перешкодою при вирішенні питання про організацію його промислового виробництва.

Метою роботи є створення конструкції апарата, здатного вирішити питання запобігання утворення пилу при роботі з інструментом типу «болгарка».

Виклад основного матеріалу дослідження. Проведений аналіз нещасних випадків при роботі з болгаркою за 2005–2011 роки довів, що із загальної кількості 55 випадків відбулося пошкодження: китиці – 1, колінного суглоба – 5, стегна – 22, гомілки – 8, грудної клітки – 1, стопи – 3, передпліччя – 14, шиї – 1. Як видно із наведених даних найбільша кількість нещасних випадків сталося з ураження стегна, плеча та передпліччя, гомілки і колінного суглоба, тобто вид ураження визначається положення робочого в момент проведення робіт.

Проаналізуємо ці моменти.

На рис. 1 наведений загальний вигляд інструмента. Для запобігання нещасних випадків необхідно проаналізувати дію сил, які існують у наведеному інструменті. Для запобігання вибивання пилу з укриттів у них необхідно підтримувати розрідження. Максимальні швидкості руху повітря в місцях приєднання аспіраційних ліжок до укриттів приймаються в залежності від типу матеріалів: для кускових – 2 м/с, зернистих – 1 м/с, порошкоподібних – 0,7 м/с. Ці значення прийняті з умов мінімального віднесення дрібних фракцій матеріалу, що транспортується, у пиловловлюючі апарати аспіраційних систем.

Місця розташування пристрою укріттів ріжучого устаткування визначають виходячи з особливостей його роботи і виникаючих при цьому потоків запиленого повітря.

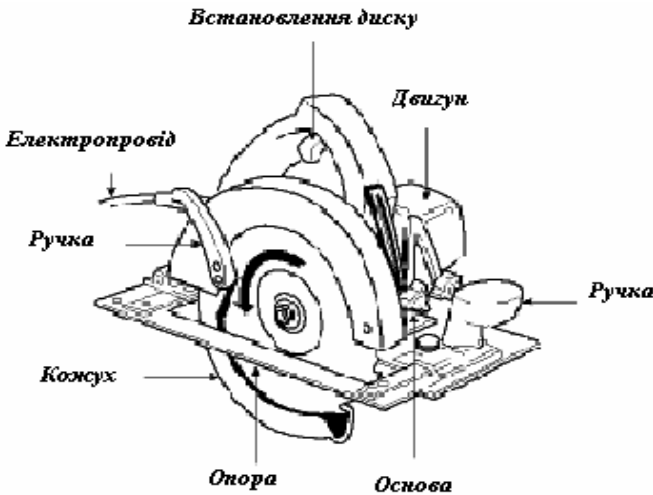


Рисунок 1 – Загальний вигляд «болгарки».

Постановка задачі про рух повітряного потоку в кожусі інструменту включає наступні основні кроки: опис загальних допущень, крайових та початкових умов; математичну модель руху повітряних потоків в апараті з урахуванням моделі турбуленції; математичну модель руху твердої фази (частинки пилу) в апараті. Для коректного опису процесу сепарації частинок пилу у пиловловлювачі принципово нового типу були прийняті певні допущення, які, з одного боку наближають математичну модель до конкретних умов функціонування інструменту, а з іншого – запобігають надмірному ускладненню моделі:

- частинки пилу є твердими і не взаємодіють між собою;
- частинка, що торкнулася стінки корпусу вважається вловленою;
- на вході в апарат потік має рівномірне поле швидкостей;
- розподіл пилу по перерізу вхідного патрубку кожуха є рівномірним;
- опір руху частинок у газовому середовищі описується законом Стокса;
- тангенційна і осьова складові швидкості частинки співпадають з тангенційною і осьовою складовими швидкості обертання газового потоку, відповідно;
- радіальні швидкості внаслідок дії сил інерції є різними.

Для того, щоб розв’язок задачі про рух повітряних потоків був єдиним, задаємо початкові і крайові умови, які, в свою чергу, визначаються формою і конструктивними особливостями апарата та умовами його роботи, тобто для

кожного типу пиловловлювача існує свій набір початкових і крайових умов.

Початковими умовами для апарата, який ми запропонували, є характеристики повітряного середовища та пилу для деякого початкового моменту часу:

- атмосферний тиск за нормальних умов $P_0 = 101325$ Па;
- температура повітря за нормальних умов $T_0 = 293$ К;
- середній (медіанний) діаметр частинок пилу $d_{50} = (8 - 50) \cdot 10^{-6}$ м;
- максимальний діаметр частинок пилу $d_{\max} = 50 \cdot 10^{-6}$ м;
- мінімальний діаметр частинок пилу $d_{\min} = 8 \cdot 10^{-6}$ м;
- густина частинок пилу $\rho_q = 2000 - 4000$ кг/м³;
- густина повітря $\rho = 1,293$ кг/м³.

Розрахунки диференціальних рівнянь руху матеріальної точки при початкових умовах було проведено з використанням математичного пакету.

Крайові умови накладаються на розв'язок задачі про рух потоку і повинні виконуватися в кожний момент часу цього руху та визначаються характером руху повітря по площині. Вони залежать також і від густини газу: наприклад газ великої густини «прилипає» до стінок апарата в той час, як розріджений газ ковзає по межових поверхнях. Проте незважаючи на особливості є певні закономірності при заданні крайових умов при русі запиленого повітря в пилоочишувачі, які ми і задаємо, а саме:

- рівність нулю швидкості на нерухомій твердій границі;
- швидкість пилоповітряного потоку на вході в кожух стабільна і дорівнює 18 м/с.

Розглянемо модель впливу інерційних сил і сил опору на рух частинок пилу у кожусі «болгарки».

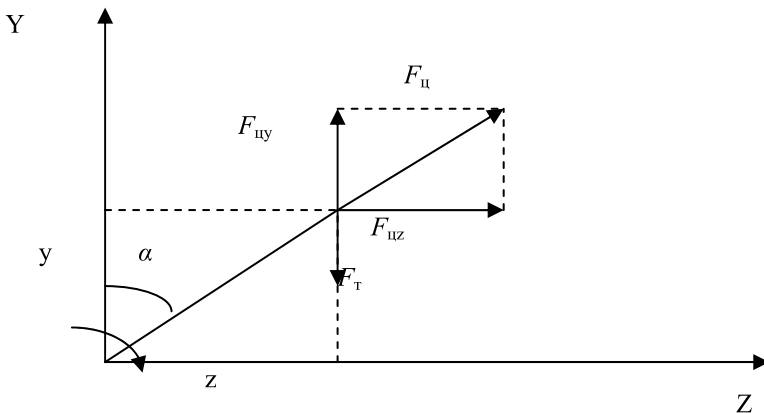


Рисунок 2 – Схема сил, що впливають на частинку.

На частинки пилу при русі їх в закрученому потоці, з урахуванням раніше зроблених допущень, впливають наступні сили.

Сила тяжіння:

$$\bar{F}_T = m_q \cdot \bar{g} = \frac{\pi d_q^3}{6} \cdot (\rho_q - \rho_n) \cdot \bar{g}, \quad (1)$$

де m_q – маса частинки, кг; \bar{g} – прискорення сили тяжіння м/с²; d_q – діаметр частинки, м; ρ_q – густина частинок пилу кг/м³; ρ_n – густина повітря, кг/м³.

Відцентрова сила:

$$\bar{F}_ц = m_q \cdot \frac{\bar{V}_\tau^2}{R} = \frac{\pi d_q^3}{6} \cdot (\rho_q - \rho_n) \cdot \frac{\bar{V}_\tau^2}{R}, \text{ Н}, \quad (2)$$

де V_τ – тангенціальна складова швидкості обертання потоку повітря, м/с; R – радіус обертання потоку, м.

Як видно з наведених рівнянь (1) і (2), різницею густини ($\rho_q - \rho_n$) враховується і сила витіснення середовища (*сила Архімеда*).

У рухомому потоці газу на частинку діє сила опору середовища (*сила Стокса*):

$$\bar{F}_c = 3\pi\mu_z d_q \bar{V}_q \chi, \quad (3)$$

де μ_z – динамічна в'язкість, Пас; V_q – швидкість осадження частинки щодо газового середовища, м/с; $\chi = 2,9$ – динамічний коефіцієнт форми частинок пилу для змішаних тіл.

Якщо врахувати, що для зваженої частинки, яка рухається в потоці газу, сила Стокса дорівнює сумі зовнішніх сил і направлена у зворотньому напрямку, то:

$$\bar{F}_c = \bar{F}_T + \bar{F}_ц. \quad (4)$$

Розкладемо сили (3.15) по осях y і z :

$$F_{cy} = F_{cy} - F_T; F_{cz} = F_{cz}. \quad (5)$$

Використовуючи рівняння (2) – (5), виразимо V_{cy} і V_{cz} – проекції швидкості осадження частинки відносно газового середовища на осі координат у і z:

$$V_{cy} = \frac{d_q^2 \cdot (\rho_q - \rho_n) \cdot \left(\frac{V_\tau^2}{R} \cdot \cos(\alpha) - g \right)}{18\mu_z \chi}, \quad (6)$$

$$V_{cz} = \frac{d_q^2 \cdot (\rho_q - \rho_n) \cdot \frac{V_\tau^2}{R} \cdot \sin(\alpha)}{18\mu_z \chi}, \quad (7)$$

де

$$\sin(\alpha) = z/\sqrt{y^2 + z^2}; \quad \cos(\alpha) = y/\sqrt{y^2 + z^2}; \quad R = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (8)$$

α – кут між віссю y і радіусом вектором точки, в якій знаходиться частинка; y, z – координати точки, в якій знаходиться частинка.

З моделі *турбулентного масопереносу* одержуємо компоненти миттєвої швидкості потоку по осях координат V_x, V_y і V_z , які визначають осьову, тангенційну і радіальну складові швидкості для закрученого потоку повітря.

Осьова швидкість потоку в нашому випадку має напрямок осі x :

$$V_{oc} = V_x. \quad (9)$$

Тангенційна і радіальна швидкості потоку визначатимуться таким чином:

$$V_T = V_{zy} \cdot \cos(\alpha + \beta) = V_{zy} \cdot [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)], \quad (10)$$

$$V_p = V_{zy} \cdot \sin(\alpha + \beta) = V_{zy} \cdot [\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)], \quad (11)$$

де

$$V_{zy} = \sqrt{V_y^2 + V_z^2}; \quad \sin(\beta) = V_y/\sqrt{V_y^2 + V_z^2}; \quad \cos(\beta) = V_z/\sqrt{V_y^2 + V_z^2}, \quad (12)$$

β – кут між віссю z і вектором швидкості частинки в даній точці.

Звідси одержуємо остаточні залежності:

$$V_T = (y \cdot V_z - z \cdot V_y) / \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (13)$$

$$V_p = (z \cdot V_z + y \cdot V_y) / \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (14)$$

Підставивши (13) в (6) і (7), одержуємо залежність для визначення швидкості в кожній точці потоку:

$$V_{cy} = \frac{d_c^2 \cdot (\rho_c - \rho_n) \cdot \left(y(y \cdot V_z - z \cdot V_y) \right)^2 / \left((y^2 + z^2)^2 - \bar{g} \right)}{18\mu_c \chi}, \quad (15)$$

$$V_{cz} = \frac{d_c^2 \cdot (\rho_c - \rho_n) \cdot z(y \cdot V_z - z \cdot V_y)^2}{18\mu_c \chi (y^2 + z^2)^2}. \quad (16)$$

Відповідно до прийнятих допущень з врахуванням рівняння (13):

$$V_{cx} = V_{oc} = V_x. \quad (17)$$

Одержавши компоненти V_{cx}, V_{cy} і V_{cz} , ми визначаємо в кожній точці потоку миттєву швидкість частинки щодо потоку:

$$\bar{V}_c = V_{cx} \bar{i} + V_{cy} \bar{j} + V_{cz} \bar{k}, \quad (18)$$

де \bar{i}, \bar{j} і \bar{k} – одиничні вектори позитивних напрямів осей.

Для модуля вектора швидкості \bar{V}_c маємо:

$$V = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2 + V_{cz}^2}. \quad (19)$$

Одержимо швидкості частинки щодо прийнятої декартової системи координат:

$$\vec{V}_{cx0} = \vec{V}_x; \vec{V}_{cy0} = \vec{V}_{cy} + \vec{V}_y; \vec{V}_{cz0} = \vec{V}_{cz} + \vec{V}_z. \quad (20)$$

Якщо розглядати швидкості в циліндричній системі координат, то:

$$\vec{V}_{чос} = \vec{V}_x; \vec{V}_{чт0} = \vec{V}_r; \vec{V}_{чр0} = \vec{V}_{чр} + \vec{V}_p, \quad (21)$$

де $V_{чр}$ одержуємо аналогічно перетворенням:

$$V_{чр} = \left(z \cdot V_{cz} + y \cdot V_{cy} \right) / \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (22)$$

Одержана в рівнянні (22) швидкість – це параметр, який характеризуватиме значення швидкості і напрямком руху частинки пилу, яка поміщена в ту або іншу точку простору кожуха «болгарки». Дані значення дозволять нам оцінити ефективність роботи кожуха за різних крайових умов, при різній геометрії апарату і при різних розмірах і масі частинок пилу.

Резюмуючи вищенаведене можна стверджувати, що ефективність кожуха інструмента буде тим більшою, чим:

- менша швидкість руху частинки до входу в кожух;
- менша швидкість руху очищеного повітряного потоку до щілин кожуха;
- більша площа живого перерізу кожуха;
- більше проходження повітря через нього;
- більша маса частинки;
- більша густина частинки;
- менший кут між напрямком руху потоку і площиною кожуха;
- більш постійною є швидкість руху пилоповітряної суміші вздовж кожуха;
- більша гнучкість частинки.

Виходячи з наведених міркувань, нами запропоновано декілька конструкцій кожухів до різних типів «болгарок», ефективність виведення пилу з яких буде максимальною.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Порівняльні дослідження довели, що ефективність роботи запропонованих кожухів обладнання перевищує ефективність роботи існуючих кожухів на 15–17%, гідравлічний опір зменшений на 150–250 Па, а габаритні розміри в 1,5 рази, що дозволяє говорити про значне зменшення енерго- і металоємності.

Подальші дослідження в цьому напрямку необхідно вести по шляху вдосконалення конструкції кожухів інструменту в плані оптимізації габаритних розмірів і вдосконалення процесів розділення з метою підвищення ефективності роботи, запобігання нещасним випадкам і створення нових енергозберігаючих технологій, а також охорони праці та навколишнього середовища.

Список літератури 1. *Батлук В.А., Азарський К.І.* Математичне забезпечення вибору оптимального обладнання для очистки повітря від пилу за допомогою комп'ютерної техніки // Український журнал медичної техніки і технології. – Київ. – 2000. – №2. – С. 92 – 94. **2.** *Батлук В.А.* Математические модели процессов разделения гетерогенных систем при пылеочистке // Міжнарод. наук. практ. конф. «Нові машини для виробництва будівельних матеріалів і конструкцій, сучасні будівельні технології». – Полтава. – 2000. – С. 87 – 91. **3.** *Харлоу Ф.Х.* Чисельний метод частинок в комірках для задач гідродинаміки. Обчислювальні методи в гідродинаміці. – М.: Мир, 1967. **4.** *Батлук В.А., Мельников О.В.* Один из путей решения проблем устранения промышленной опасности, создаваемой мелкодисперсной пылью / Юбилейные научные чтения «Белые ночи – 2008» / Материалы Международных научных чтений Международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности. Часть 2. – Изд-во МАНЭБ, СПб. – 2008 – С. 327 – 332. **5.** *Батлук В.А., Василюк Р.М., Сукач Р.Ю.* Математичне моделювання процесу очищення повітря від пилу у відцентрово-інерційних пиловловлювачах // Науковий журнал «Екологічна безпека» Випуск 2 – 4, 2008. – С. 17 – 20.

Надійшла до редколегії 08.04.2012

УДК 621.928.9

В.А БАТЛУК, д-р техн. наук., проф., НУ «Львівська політехніка», Львів;
Н.М. ПАРАНЯК, аспірант, НУ «Львівська політехніка», Львів;
Н.П. ОЛЕКСИВ, студент НУ «Львівська політехніка», Львів

ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ВПРОВАДЖЕННЯ ПИЛОВЛОВЛЮВАЧІВ

Розроблена модель ієрархії факторів еколого-економічної доцільності впровадження пиловловлювача нової конструкції. Крім упорядкування факторів за важливістю їх впливу дана модель робить можливим подальший поділ на залежні (внутрішні) компоненти для виявлення ступеня послаблення чи посилення дії викликаючого фактора. Пріоритетність дії фактора на ефективність роботи пиловловлювача нової конструкції є величиною відносною і може бути змінена залежно від експертної оцінки міри впливу фактора на досліджуваний процес

Разработана модель иерархии факторов эколого-экономической целесообразности внедрения пылеуловителя новой конструкции. Кроме сопоставления факторов по важности их влияния данная модель делает возможным дальнейшее деление на зависимые (внутренние) компоненты для выявления степени ослабления или усиления действия вызывающего фактора. Приоритетность действия фактора на эффективность работы пылеуловителя новой конструкции является величиной относительной и может быть изменена в зависимости от экспертной оценки степени влияния фактора на исследуемый процесс.

The model of hierarchy of factors of efficiency of work of dust collection of new construction is developed. Except for arrangement of factors after importance of their influence this model does possible the subsequent dividing by dependent (internal) components for the exposure of degree of weakening or strengthening of the caller factor. Priority of action of factor on efficiency of work of dust collection of new construction is a size relative and can be changed depending on the expert estimation of measure of influence of factor on the probed process.

Постановка проблеми. Економічне значення пиловловлення полягає не тільки у подальшому використанні коштовних компонентів пилу й газових домішок, але і у запобіганню збитку, заподіюваного пилом, що викидається як в повітря робочої зони, так і в атмосферу, і у чималій мірі збереженню здоров'я людей.

Величина витрат на очищення газів залежить від багатьох факторів: методу пиловловлення й конструкції апаратури, особливостей технологічного процесу, витрат енергії й матеріалів, тощо. Капітальні вкладення і вартість основних фондів на пиловловлення залежать переважно від числа і вартості пиловловлюючих апаратів, обумовлених об'ємами газів, що очищаються, і ступенем уловлення пилу.

У загальних витратах на очищення газів амортизація і вміст основних засобів становлять від 20 до 40%, на електроенергію і матеріали доводиться від 20 до 30% витрат, на поточний ремонт витрачається від 10 до 20%, трудові витрати на обслуговування обладнання у загальних витратах не перевищують, як правило, 10% і постійно скорочуються. Чим вище повинен бути ступінь уловлювання дрібнодисперсного пилу $(0-5) \cdot 10^{-6}$ м, тим більші капітальні і експлуатаційні витрати на газоочисну установку.

Нижче наведені дані (табл. 1), що ілюструють взаємозв'язок ефективності вловлювання дрібнодисперсного пилу $(0-5) \cdot 10^{-6}$ м, капітальних і експлуатаційних витрат (витрати наведені в умовних одиницях; за одиницю прийняті витрати для циклону ЦН-11):

Таблиця 1

Взаємозв'язок ефективності вловлювання дрібнодисперсного пилу, капітальних і експлуатаційних витрат.

Пиловловлювач	Ефективність уловлення, %	Втрати тиску, мм вод. ст.	Капітальні витрати	Експлуатаційні витрати
Циклон середньої ефективності	27	95	1	1
Циклон підвищеної ефективності	73	125	1,9	1,43
Сухий електрофільтр	92	15	9,1	1,90
Рукавний фільтр	99,9	125	5,15	4,10
Швидкісний пиловловлювач (труба Вентурі)	99,6	560	4,55	6,60

Підвищення вимог до очищення газів призводить до збільшення кількості і ціни пиловловлюючого устаткування. Вартість додатково вловленого тонкого пилу вже не покриває непропорційно зростаючі витрати, але у масштабах країни це компенсується зниженням економічного збитку від забруд-

нення атмосфери пиловими викидами, і більш раціональним використанням продуктів тонкої газоочистки, як більш якісних у порівнянні з пилом грубого очищення, і насамперед збереженням здоров'я працюючих.

Аналіз останніх досягнень. Основними напрямками розвитку пило- і газовловлення є наступні: оснащення всіх пило- і газовиділяючих агрегатів ефективними пиловловлювачами; герметизація транспортних пристроїв та інших механізмів з відводом запилених вентиляційних газів для тонкого очищення їх від пилу; широке застосування води в процесах для зменшення кількості газів, що викидаються.

Економічним ефектом впровадження нових пиловловлюючих апаратів є сума наступних величин: запобігання економічних збитків від забруднення робочих місць у матеріальному виробництві та невиробничій сфері; приросту економії за рахунок поліпшення умов праці, дякуючи впровадженню нових апаратів; приріст грошової оцінки реалізованої продукції, внаслідок більш повного використання шихти та інших матеріальних ресурсів; приросту готівкої продукції, за рахунок підвищення ефективності вловлювання пилу, який містить готовий продукт.

Нині сформувалося близько ста напрямів еколого-економічних досліджень, які можна об'єднати за принципами галузевої приналежності, взаємозв'язків, взаємопідпорядкованості, пріоритетності, теоретичного та практичного значення Створення екологічно безпечних технологічних процесів, виробництв, агропромислових і територіально-виробничих комплексів вимагає системного еколого-економічного аналізу існуючих технологій і шляхів їхнього удосконалення. Причому, при створенні екологічно безпечних маловідходних і безвідхідних виробництв та комплексів їх ефективність має тенденцію згодом зменшуватися. Технічна реалізація прикладних рішень з позицій фізико-математичних аспектів регіональної екології здійснюється в напрямку формування екосистем замкнутого типу. Системи замкнутого циклу локалізують у собі протилежні процеси, взаємовиключаючи, таким чином, негативні наслідки техногенезу.

Метою роботи є створення еколого-економічного обґрунтування впровадження принципово нових конструкцій пиловловлювачів.

Виклад основного матеріалу. Цікавими, на наш погляд, та важливими з точки зору еколого-економічного прогнозування роботи запропонованої конструкції могли б стати дослідження, що використовують методи попереднього визначення впливу множини обраних факторів на ефективність роботи пиловловлювача.

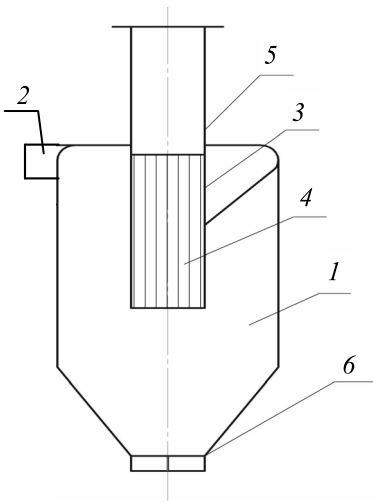


Рисунок 1 – Пилувловлювач: 1 – циліндрично-конічний корпус пилувловлювача; 2 – тангенційний вхідний патрубок; 3 – жалюзійний відокремлювач; 4 – жалюзі; 5 – вихлопний патрубок; 6 – пиловипускний патрубок.

У результаті аналізу суті та способів впливу різних факторів доцільним є розроблення моделі ієрархії факторів, яка, крім упорядкування за важливістю впливу на ефективність роботи апарата, уможливила б подальший поділ на підпорядковані (внутрішні) компоненти для виявлення ступеня послаблення чи посилення дії спричиняючого фактора. Постановка та розв’язання подібних задач вимагають виявлення максимально повної множини узагальнених факторів, встановлення експертних оцінок взаємозв’язків і взаємовпливів у вибраному інформаційному середовищі. Для наочності математичне позначення факторів доповнимо їх мнемонічною назвою та зведемо у таблицю – табл. 2.

Таблиця 2
Перелік факторів ефективності роботи пилувловлювача та їх позначення.

Математичне позначення	Назва	Мнемонічна назва
z_1	гідравлічний опір	ГО
z_2	медіанний діаметр пилу	МД
z_3	діаметр вхідного патрубку	ВП
z_4	кут нахилу вхідного патрубку	КН
z_5	діаметр корпусу	ДК
z_6	діаметр патрубку виходу пилу	ДП
z_7	діаметр патрубку очищеного повітря	ОП
z_8	кут конусності корпусу	КК
z_9	конструкція жалюзійного відокремлювача	ЖВ

Підмножину факторів z_1 та можливі взаємозв’язки між ними подамо у вигляді орієнтованого графа (рис. 2), у вершинах якого розміщено елементи

підмножини z_1 , дуги з'єднують суміжні пари вершин (z_i, z_j) , для котрих визначено зв'язок. Він вказує на певну залежність одного фактора від іншого.

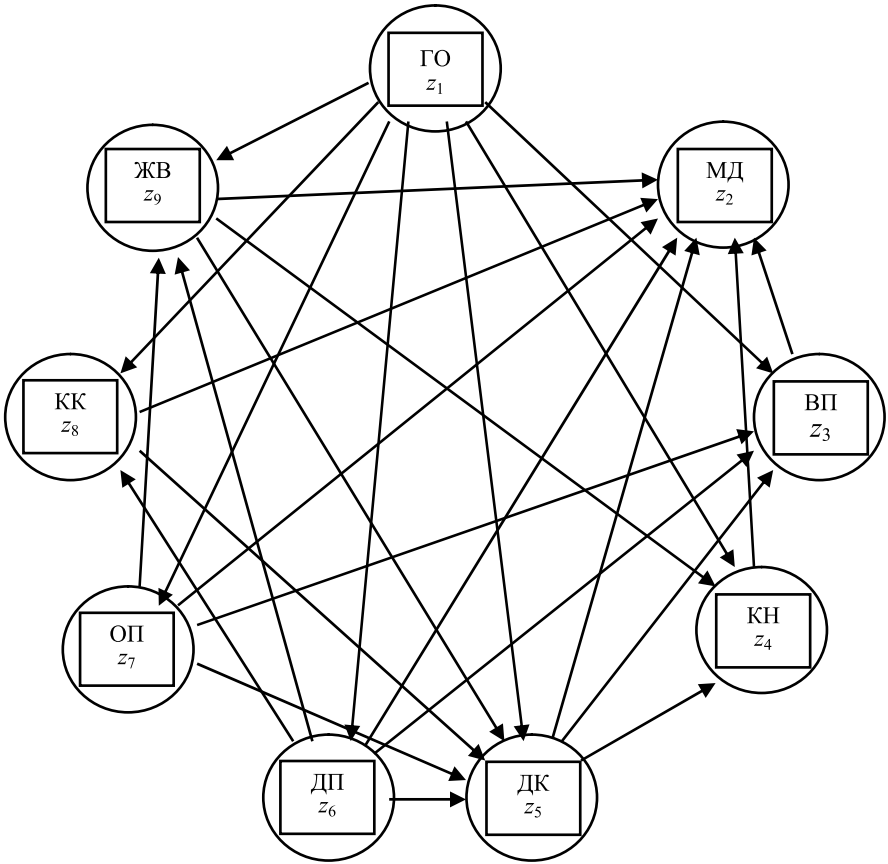


Рисунок 2 – Вихідна графічна модель взаємозв'язків між факторами, що визначають ефективність роботи пиловоловловача.

На основі наведеного графа будемо бінарну матрицю залежності A для множини вершин z_1 наступним чином [11]:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо критерій (вершина) } i \text{ залежить від критерію (вершини) } j; \\ 0, & \text{якщо критерій (вершина) } i \text{ не залежить від критерію (вершини) } j. \end{cases}$$

Для зручності матрицю A розміру 9×9 елементів помістимо в табл. 3, додавши до неї інформаційний рядок і стовпець з мнемонічними назвами факторів.

Таблиця 3

Матриця залежності вершин вихідного графа
взаємозв'язків між факторами.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ГО	МД	ВП	КН	ДК	ДП	ОП	КК	ЖВ
1	ГО	0	0	1	1	1	1	1	1	1
2	МД	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	ВП	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	КН	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	ДК	0	1	1	1	0	0	0	0	0
6	ДП	0	1	1	0	1	0	0	1	1
7	ОП	0	1	1	0	1	0	0	0	1
8	КК	0	1	0	0	1	0	0	0	0
9	ЖВ	0	1	0	1	1	0	0	0	0

Використовуючи матрицю A , будемо матрицю досяжності таким чином. Формуємо бінарну матрицю $(I + A)$, де I — одинична матриця. У результаті матриця досяжності повинна задовольняти умову

$$(I+A)^{k-1} \leq (I+A)(I+A)^{k-1} \leq (I+A)^k = (I+A)^{k+1}$$

Практично її побудова зводиться до заповнення табл. 4, подібної до наведеної вище, бінарні елементи якої визначаються за таким правилом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо з } i \text{ можна потрапити в } j; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Вершина z_j досягається з вершини z_i , якщо в графі (рис. 2) існує шлях, який приводить з вершини z_i до вершини z_j . Така вершина називається *досяжною*. Позначимо підмножину подібних вершин через $S(z_i)$. Аналогічно вершина z_i є *попередницею* вершини z_j , якщо вона досягає цієї вершини. Нехай сукупність вершин-попередниць утворює підмножину $P(z_i)P(z_i)$.

Остаточню перетин підмножин вершин досяжних і вершин-попередниць, тобто підмножина

$$R(z_i) = S(z_i) \cap P(z_i), \quad (1)$$

вершини якої не досягаються з будь-якої з вершин множини z_1 , що залишилися, визначає певний рівень ієрархії пріоритетності дії фактора, віднесеного до цих вершин. Додатковою умовою при цьому є забезпечення рівності

$$P(z_i) = R(z_i). \quad (2)$$

Таблиця 4

Матриця досяжності вершин вихідного графа взаємозв'язків між факторами.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ГО	МД	ВП	КН	ДК	ДП	ОП	КК	ЖВ
1	ГО	1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	МД	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	ВП	0	1	1	0	0	0	0	0	0
4	КН	0	1	0	1	0	0	0	0	0
5	ДК	0	1	1	1	1	0	0	0	0
6	ДП	0	1	1	1	1	1	0	1	1
7	ОП	0	1	1	1	0	0	1	0	1
8	КК	0	1	1	1	1	0	0	1	0
9	ЖВ	0	1	1	1	1	0	0	0	1

Виконання сукупності вищезазначених дій дає перший рівень (найнижчий з точки зору важливості впливу на досліджуваний процес) ієрархії факторів. Для визначення його на підставі попередньої матриці будемо табл. 5.

Таблиця 5

Ітераційна таблиця для утворення першого ієрархічного рівня факторів.

i	$S(z_i)$	$P(z_i)$	$S(z_i) \cap P(z_i)$
1	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1	1
2	2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	2
3	2, 3	1, 3, 5, 6, 7, 8, 9	3
4	2, 4	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9	4
5	2, 3, 4, 5	1, 5, 6, 8, 9	5
6	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1, 6	6
7	2, 3, 4, 7, 9	1, 7	7
8	2, 3, 4, 5, 8	1, 6, 8	8
9	2, 3, 4, 5, 9	1, 6, 7, 9	9

Другий стовпець табл. 5 – номери одиничних елементів відповідних рядків матриці досяжності, третій – номери одиничних елементів стовпців даної матриці.

Рівність (2) виконується для 1-го фактора – гідравлічного опору пиловловувача (ГО). Згідно з методом аналізу ієрархій [12], цей фактор належить до найнижчого рівня факторів, що визначають ефективність роботи пиловловувача. Далі з табл. 5 вилучаємо рядок 1, а в 2–9-му рядках – цифру 1. Одержимо табл. 6, яка є основою для обчислення другої ітерації знаходження номерів факторів, що визначають наступний рівень ієрархії.

Таблиця 6

Ітераційна таблиця для утворення другого ієрархічного рівня факторів

i	$S(z_i)$	$P(z_i)$	$S(z_i) \cap P(z_i)$
2	2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	2
3	2, 3	3, 5, 6, 7, 8, 9	3
4	2, 4	4, 5, 6, 7, 8, 9	4
5	2, 3, 4, 5	5, 6, 8, 9	5
6	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	6	6
7	2, 3, 4, 7, 9	7	7
8	2, 3, 4, 5, 8	6, 8	8
9	2, 3, 4, 5, 9	6, 7, 9	9

У другій ітерації рівність (2) виконується для факторів, яким присвоєно 6 і 7-й номери, що свідчить про місце, яке обіймають діаметр патрубку виходу пилу (ДП) і діаметр патрубка очищеного повітря (ОП) пиловловлювача серед факторів, що визначають ефективність його роботи. Ці фактори визначають наступний рівень ієрархії. Відтак з табл. 6 видаляємо рядки 6 і 7, а в 2 – 5, 8 і 9-му рядках – цифри 6 і 7 й одержимо табл. 7.

Таблиця 7

Ітераційна таблиця для утворення третього ієрархічного рівня факторів.

i	$S(z_i)$	$P(z_i)$	$S(z_i) \cap P(z_i)$
2	2	2, 3, 4, 5, 8, 9	2
3	2, 3	3, 5, 8, 9	3
4	2, 4	4, 5, 8, 9	4
5	2, 3, 4, 5	5, 8, 9	5
8	2, 3, 4, 5, 8	8	8
9	2, 3, 4, 5, 9	9	9

Третя ітерація дає нам наступний ієрархічний рівень майбутньої моделі. З табл. 7 бачимо, що цей рівень складе два фактора — кут конусності корпусу (КК) і конструкція жалюзійного відокремлювача (ЖВ). З табл. 8 можемо визначити четвертий ієрархічний рівень моделі, що будується.

Таблиця 8

Ітераційна таблиця для утворення четвертого ієрархічного рівня факторів.

i	$S(z_i)$	$P(z_i)$	$S(z_i) \cap P(z_i)$
2	2	2, 3, 4, 5	2
3	2, 3	3, 5	3
4	2, 4	4, 5	4
5	2, 3, 4, 5	5	5

З табл. 8 бачимо, що наступний рівень складе 5-й фактор – діаметр корпусу (ДК).

Таблиця 9

Ітераційна таблиця для утворення п'ятого ієрархічного рівня факторів.

i	$S(z_i)$	$P(z_i)$	$S(z_i) \cap P(z_i)$
2	2	2, 3, 4	2
3	2, 3	3	3
4	2, 4	4	4

З табл. 9 випливає, що передостанній рівень ієрархії факторів містить 3 і 4-й фактори – діаметр (ВП) і кут нахилу (КН) вхідного патрубка пиловловлювача. На найвищому рівні ієрархії факторів буде знаходитися медіанний діаметр пилу – МД. Розташувавши фактори за визначеними рівнями, одержимо ієрархічно структуровану модель (рис. 3), що імітує пріоритетність впливу факторів на ефективність роботи пиловловлювача.

У моделі (рис. 3) враховано усі зв'язки між факторами, які відображені у вихідній графічній моделі. Фактори розміщено за спаданням пріоритетності їх впливу на ефективність роботи пиловловлювача. Якщо декілька факторів розміщено формально на одному рівні, перевага надається тому з них, до якого приєднано більше вхідних стрілок (впливів на інші фактори). При їх рівності додатково залучається експертне оцінювання.

Слід зауважити, що результат віднесення вибраних факторів до відповідного ієрархічного рівня є об'єктивним настільки, наскільки його достовірність забезпечується використанням відомих засад теорії системного аналізу, теорії моделювання, методології дослідження і розв'язання проблем.

Поява конкретної перешкоди на певному рівні суттєво залежить від встановлених зв'язків між ними, заданих у вихідному графі (рис. 2). Їх зміна за кількістю та суттю зумовить модифікацію одержаної моделі. Якщо кожен з факторів оцінювати деяким числом або присвоювати йому відповідний ваговий коефіцієнт пріоритетності дії факторів на ефективність роботи пиловловлювача, то, як випливає з рис. 3, вагомість фактора відповідає номерові рівня ієрархії. Водночас пріоритетність дії фактора на ефективність роботи пиловловлювача нової конструкції є величиною відносною і може бути змінена залежно від експертної оцінки міри впливу фактора на досліджуваний процес.

У результаті синтезовано ймовірнісну модель ієрархії факторів ефективності роботи розробленого апарата, а на її підставі у першому наближенні розроблено модель пріоритетного впливу визначених факторів на ефективність роботи пиловловлювача нової конструкції.

Отримані результати, на наш погляд, можуть піддаватися коригуванню в процесі наступних досліджень.

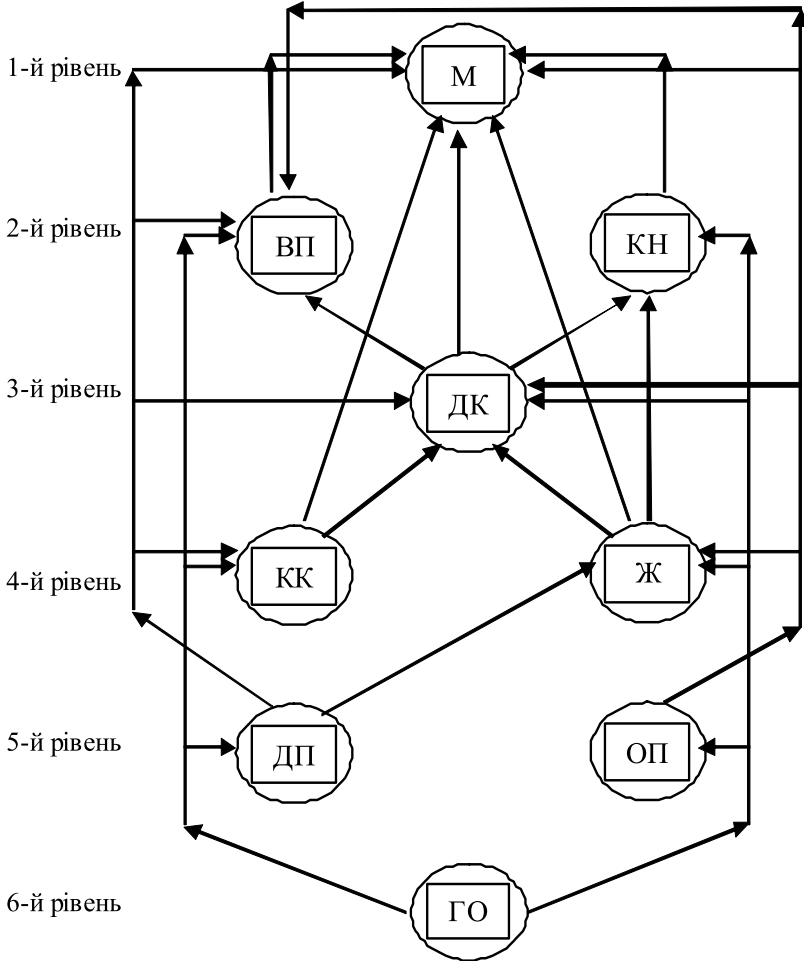


Рисунок 3 – Модель ієрархії факторів, що визначають ефективність роботи пиловловлювача.

Взявши до уваги наведені вище моделі розглянемо еколого-економічну ефективність від впровадження пиловловлювача нашої конструкції на дільниці пересипу конвєсера за добу.

Економічна оцінка збитків, що заподіяні річними викидами , визначається за формулою:

$$Z = \gamma \cdot G \cdot F \cdot M , \tag{3}$$

де Z – оцінка збитку (грн./рік); γ – константа, $\gamma = 2,4$ грн./ум. т; G – безрозмірна величина, $G = 4$ (для територій промислових підприємств і промислових вузлів); $F = 10$ – поправка, яка враховує характер розсіювання в повітрі дрібнодисперсних частинок пилу зі швидкістю осідання понад $20 \cdot 10^{-2}$ м/с; M – значення приведеної маси річного викиду забруднень, яке визначається за формулою:

$$M = \sum_{i=1}^N A_i \cdot m_i, \quad (4)$$

m_i – маси річного викиду домішок i -го виду пилу в повітря приміщення, залежить від ефективності роботи застосованого апарату, т/рік; A_i – показник відносної агресивності домішок i -го виду, для шихти $A_i = 45$; N – загальна кількість домішок, т/рік.

У конкретному випадку до застосування нашого апарату ефективність вловлення пилу складала 95,1 %, а після впровадження апарату нашої конструкції ефективність вловлення складала 96,3 %, тобто вдалося підвищити її на 4,5 %. За добу в повітря робочої зони виноситься 170 – 180 кг пилу (візьмемо для розрахунку 175 кг). При ефективності вловлення – 95,1 % викидається в повітря робочої зони 8,57 кг пилу за добу; при ефективності 96,3 % – 6,47 кг шихти за добу.

Відповідно m_i до впровадження складає:

$$45 \cdot 365 \cdot 8,57 \text{ кг} = 140,76 \text{ т},$$

m_i після впровадження:

$$45 \cdot 365 \cdot 6,47 \text{ кг} = 106,26 \text{ т}.$$

Збитки до впровадження установок пиловловлення складають:

$$2,4 \text{ грн/т} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 140,76 \text{ т} = 13513 \text{ грн},$$

Збитки після впровадження запропонованих установок складають:

$$2,4 \text{ грн/т} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 106,26 \text{ т} = 10201 \text{ грн}.$$

Наведений приклад розрахунку економічної оцінки збитків, що спричиняють викиди пилу в повітря робочої зони, показує, що використання розробленого пиловловлювача в установці для очистки повітря від пилу зменшує збитки у 1,32 рази.

Крім показників, які легко можна підрахувати, існує ціла низка питань морального походження. Пилова патологія легенів, перш за все пневмоконіоз та хронічний пиловий бронхіт, традиційно займають перші місця в структурі професійної захворюваності населення протягом багатьох десятиріч. Частка вперше виявлених в Україні пневмоконіозів та хронічних бронхітів в 2009 р. складає 27,5 % (710 випадків) та 21,8 % (564 випадки), а в 2001 р. – 34,9 % (1406 випадків) та 21,7 % (876 випадків) відповідно. Серйозним недоліком

діючої Гігієнічної класифікації праці є неврахування фактору часу – стажу роботи, при якому виникає професійний ризик здоров'ю. Цей критерій має значення при будь-яких рівнях шкідливих виробничих факторів. Зокрема, дрібнодисперсний пилю має властивість затримуватись в легенях та виявляти патогенний ефект у віддалені строки життя після припинення роботи в контакті з пилом. Результати розрахунків показують, що вже при 5-річному стажі роботи в умовах підвищеної запиленості (перевищення ГДК пилю в 2 – 15 разів) ризик розвитку пневмоконіозу зростає з 1,75 до 17 %. Ризик подвоюється при 10-річному стажі роботи та збільшується в 5 разів при 25-річному стажі роботи. В екстремальних умовах роботи (перевищення ГДК пилю в 15 разів) ризик захворіти пневмоконіозом вже при 15-річному стажі досягає 60 %, а при 25-річному стажі має становити 100 %. Також спостерігається високий ступінь впливу пилю на нервову та ендокринну системи, на хвороби шкіри та органів травлення.

Безпека людини та стан оточуючого її середовища – одна з найважливіших характеристик якості життя, науково-технічного та економічного розвитку держави і яку необхідно враховувати при оцінці еколого-економічної доцільності впровадження установок для очистки повітря від пилю.

Дані державної офіційної статистичної звітності та спеціальних досліджень свідчать про тісний зв'язок між змінами в виробничому середовищі та станом здоров'я населення.

Висновки і перспективи подальших наукових розвідок. Подальшу роботу в цьому напрямку необхідно вести по шляху вдосконалення конструкції жалюзійного відокремлювача, як другого ступеня очищення, а також корпусу апарата в плані оптимізації габаритних розмірів і оптимізація процесів розділення з метою підвищення ефективності пиловловлення, створення нових енергозберігаючих технологій і охорони навколишнього середовища.

Список літератури: 1. Батлук В. А. Акустичні пиловловлювачі: /моногр. / – Львів: Афіша, 2000. — 208 с. 2. Пат. 59260 А Україна, МПК В 01D 45/12. Пиловловлювач із циліндрично-конічним відокремлювачем / В. А. Батлук, В. К. Батлук, О. В. Мельников, В. В. Дмитрук. / Заявл. 20.12.2002, Опубл. 15.08.2003, Бюл. № 8. — 2 с. 3. Пат. 29965 Україна, МПК В 01D 45/00. Мокрий пиловловлювач із спеціальною формою жалюзі / В. А. Батлук, І. В. Проскуріна, О. В. Мельников / Заявл. 08.05.2007, Опубл. 11.02.2008, Бюл. № 3. — 4 с. 4. Пат. 50128 Україна, МПК В 01D 45/00. Пиловловлювач із теплообмінником і змійовиком / В. А. Батлук, Н. М. Параняк / Заявл. 07.12.2009, Опубл. 25.05.2010, Бюл. № 10. — 8 с. 5. Олянишен Т. В., Сторожук В. М., Піх І. В., Мельников О. В. Модель факторів несприятливого впливу на оточуюче середовище. – Технол. і техніка друкарства. – 2011. – Вип. 3 (33). – С. 82 – 88.

Надійшла до редколегії 08.04.2012

І.С. БЕЛОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХП»

ПРО ДЕЯКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕВІД'ЄМНИХ КОСИНУС – МНОГОЧЛЕНІВ

Досліджена поведінка невід'ємних косинус – многочленів степеня 4 при перестановці коефіцієнтів при парних косинусах. Встановлено, що при коефіцієнтах при непарних косинуса протилежних знаків норма є найбільшою при монотонних коефіцієнтах

Исследовано поведение неотрицательных косинус – многочленов степени 4 при перестановке коэффициентов при четных косинусах. Установлено, что при коэффициентах при нечетных косинусах противоположных знаков норма является наибольшей при монотонных коэффициентах

The behavior of non-negative cosine - polynomials of degree 4 with a permutation of the coefficients for even cosines is investigated. It is established that the coefficients of the odd cosines of opposite sign is the norm for most monotone coefficients.

Вступ. Тригонометричний косинус – многочлен степеня n

$$A(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$$

називається *невід'ємним*, якщо $A(\theta) \geq 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) [1]. Коли $a_0 = E(a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$ є найменшим значенням коефіцієнту a_0 , при якому $A(\theta)$ є невід'ємним, будемо казати, що відповідний косинус – многочлен має *нормальну форму*. Додатна функція

$$E(\vec{a}) \quad \vec{a} = (a_1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

є *несиметричною нормою* в \mathbb{R}^n . В роботі продовжено вивчення перетворень коефіцієнтів $A(\theta)$, регулярних відносно E , розпочате в [2]. Чисельний експеримент свідчить, що при монотонно зростаючих парних коефіцієнтах $a_2 \leq a_4 \leq \dots$ відповідне значення $E(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в багатьох випадках є найбільшим.

Постановка задачі. Ми розглянемо випадок $n = 4$, та визначимо деяку область коефіцієнтів, в якій $E(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq E(a_1, a_4, a_3, a_2)$ при $a_2 \leq a_4$.

Розв'язок задачі. Спочатку розглянемо випадок $a_1 = a_3 = 0$.

Теорема 1. $E(0, a_2, 0, a_4) \geq E(0, a_4, 0, a_2)$ при $0 \leq a_2 \leq a_4 \leq 4a_2$

Позначимо

$$P(x) = a_2 \cos 2x + a_4 \cos 4x, Q(x) = a_4 \cos 2x + a_2 \cos 4x$$

і покладемо $u = \cos 2x$. Тоді

$$P(x) = p(u) = 2a_4u^2 + a_2u - a_4, Q(x) = q(u) = 2a_2u^2 + a_4u - a_2.$$

При $0 \leq a_2 \leq a_4 \leq 4a_2$ многочлен $p(u)$ має мінімум в точці

$$u_{\min}^p = -\frac{a_2}{4a_4}, \text{ де він приймає найменше значення } p_{\min} = p(u_{\min}^p) = \\ = -\frac{a_2^2 + 8a_4^2}{8a_4}, \text{ а многочлен } q(u) \text{ – мінімум в точці } u_{\min}^q = -\frac{a_4}{4a_2}, \text{ де його}$$

найменше значення $q_{\min} = q(u_{\min}^q) = -\frac{a_4^2 + 8a_2^2}{8a_2}$. Порівняємо p_{\min} і q_{\min} :

$$q_{\min} - p_{\min} = -\frac{a_4^2 + 8a_2^2}{8a_2} + \frac{a_2^2 + 8a_4^2}{8a_4} = \\ = \frac{(a_4 - a_2)(9a_2a_4 - a_2^2 - a_4^2)}{8a_2a_4} \geq 0 \text{ при } 0 \leq a_2 \leq a_4 \leq 4a_2.$$

Теорема 1 доведена.

Теорему 1 можна довести і у такий спосіб. Введемо зручне у наступному позначення $t = \cos x$ $u = 2t^2 - 1$ ($|t| \leq 1$). Тоді

$$P(x) = p(t) = 8a_4t^4 + (2a_2 - 8a_4)t^2 + a_4 - a_2, \\ Q(x) = q(t) = 8a_2t^4 + (2a_4 - 8a_2)t^2 + a_2 - a_4, \\ D = p(t) - q(t) = 2(a_4 - a_2)(t+1)(2t+1)(2t-1)(t-1).$$

Бачимо, що $D < 0$ при $|t| \geq 0,5$. Якщо зауважити, що

$$2t_{\min}^q{}^2 - 1 = u_{\min}^q = -\frac{a_4}{4a_2}, \quad 2t_{\min}^q{}^2 = \frac{4a_2 - a_4}{4a_2}, \\ \left| t_{\min}^q \right| = \sqrt{\frac{4a_2 - a_4}{8a_2}} \geq \frac{1}{2} \text{ при } a_2 \leq a_4 \leq 2a_2,$$

отримаємо

$$p_{\min} \leq p(t_{\min}^q) \leq q(t_{\min}^q) = q_{\min}, \quad (1)$$

що знову доводить теорему 1 при умові $a_4 \leq 2a_2$.

Цей шлях можна використати для наступного узагальнення теореми 1.

Нехай

$$P_e(x) = a_2 \cos 2x + a_4 \cos 4x, P_o(x) = a_1 \cos x + a_3 \cos 3x, \\ P(x) = P_o(x) + P_e(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x,$$

$$Q_e(x) = a_4 \cos 2x + a_2 \cos 4x, Q_o(x) = a_1 \cos x + a_3 \cos 3x,$$

$$Q(x) = Q_o(x) + Q_e(x) = a_1 \cos x + a_4 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_2 \cos 4x.$$

Оскільки $P_o(x) = Q_o(x)$ маємо $Q(x) - P(x) = Q_e(x) - P_e(x)$ і вираз справа зводиться до отримання нерівностей (1), точніше до оцінки $|t_{\min}^q| \geq 0,5$.

Твердження 1. При

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_4 \leq 2a_2, \quad a_3 = -a_1 \quad (2)$$

маємо

$$t_{\min}^q \leq -\frac{1}{2} \text{ і } E(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq E(a_1, a_4, a_3, a_2).$$

Перейдемо до змінної $t = \cos x$ ($|t| \leq 1$) та отримаємо наступну низку рівностей для обчислення t_{\min}^q (дивіться подробиці у [3, с.218]):

$$a = \frac{3a_3}{8a_4}, \quad b = \frac{a_2}{8a_4} - \frac{1}{2}, \quad c = \frac{a_1}{8a_4}, \quad Q = (a^2 - 3b)/9,$$

$$R = (2a^3 - 9ab + 27c)/54, \quad D = R^2 - Q^3.$$

Якщо $D < 0$, покладемо $u = \arccos(R/\sqrt{Q^3})/3$ і отримаємо

$$t_{\min}^q = -2\sqrt{Q}\cos(u) - a/3, \quad (3)$$

інакше покладемо $A = \sqrt[3]{-R + \sqrt{D}}$, $B = \sqrt[3]{-R - \sqrt{D}}$ і отримаємо

$$t_{\min}^q = A + B - \frac{a}{3}. \quad (4)$$

Формули (3), (4) Кардано – Вієта є занадто складними для безпосереднього аналізу, тому ми перевіримо нерівність $t_{\min}^q \leq -0,5$ у непрямий спосіб. Запишемо умови (2) у вигляді $Sa \leq t$, $Seqa \leq teq$, де

$$S = [-1 \ 0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0 \ -1; 0 \ -1 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 0 \ -2], \quad t = [0; 0; 0; 0],$$

$$Seq = [1 \ 0 \ -1 \ 0], \quad teq = 0,$$

та розглянемо оптимізаційну задачу

$$\min(-t_{\min}^q) \\ Sa \leq t \quad Seqa \leq teq \quad a = [a_1; a_2; a_3; a_4] \quad (5)$$

Її розв'язок за допомогою функції `fmincon` з *MatLab Optimization Toolbox* [4] виглядає наступним чином. Виберемо початкове наближення для a , наприклад, $a = [7; 2; -7; 3]$ та викличемо

$$[x, fval] = \text{fmincon}(@\text{Calc}t_{\min}^q, a, S, t, Seq, teq).$$

Отримаємо такий результат:

Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):

lower upper ineqlin ineqnonlin

1

4

a =

0 3.3577 0 1.6789

fval =

0.5000

Optimization completed: The first-order optimality measure, 1.775141e-009, is less than options. TolFun = 1.000000e-006, and the maximum constraint violation, 0.000000e+000, is less than options. TolCon = 1.000000e-006.

Optimization Metric

first-order optimality = 1.78e-009

max(constraint violation) = 0.00e+000

fault)

Options

TolFun = 1e-006 (default)

TolCon = 1e-006 (de-

Аналогічні результати, отримані для багатьох інших початкових даних, дозволяють стверджувати, що при обмеженнях (2) оптимізаційна задача (5) має розв'язок $\max(t_{\min}^q) = -0,5$. Твердження 1 обґрунтоване.

Результати чисельного експерименту дозволяють сформулювати більш загальне

Твердження 2. При

$$0 \leq a_2 \leq a_4, \quad a_1 a_3 \leq 0$$

маємо

$$E(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq E(a_1, a_4, a_3, a_2)$$

Висновки. За допомогою функції `fmincon` з пакету `MatLab` перевірене припущення щодо поведінки $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$ при перестановці коефіцієнтів a_2 та a_4 , а саме

$$E(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq E(a_1, a_4, a_3, a_2), \quad 0 \leq a_2 \leq a_4, \quad a_1 a_3 \leq 0.$$

Список літератури: 1. *B.Dumitrescu* Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications.-Springer. – 2007. – 245р. 2. *І.С.Белов* Правий зсув невідємних косинус – многочленів. // Вісник НТУ «ХП». – Вип.2. – 2012. – С.30-34. 3. *Б.Л. ван дер Варден* Алгебра. – Москва, Наука. – 1979. – 623 с. 4. `MatLab2010 Control Toolbox. – Users Guide. – 2010. – 78р.`

Надійшла до редколегії 03.04.2012

А.Н. БОРИСЕНКО, д-р техн. наук, НТУ «ХПИ»;
Б.И. КУБРИК, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Е.В. СОСИНА, асист., НТУ «ХПИ»;
В.Ф. ЧЕРНАЙ, канд. техн. наук, с. н. с., НТУ «ХПИ»

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЙ ДИЗЕЛЬ-ГЕНЕРАТОРА С ТУРБОКОМПРЕССОРОМ НА БАЗЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

В статті пропонуються методика та алгоритм отримання квазіоптимальних законів керування подачею палива і повітря в циліндри дизельного двигуна при перехідних режимах його роботи, які ґрунтуються на принципі максимуму Понтрягіна.

В статье предлагаются методика и алгоритм получения квазиоптимальных законов управления подачей топлива и воздуха в цилиндры дизельного двигателя при переходных режимах его работы, основанных на принципе максимума Понтрягина.

In the article the technique and algorithm of reception quasioptimal control law by submission of fuel and air to cylinders of the dieselengine is offered at modes of its work, which are based on a Pontryagin's principle of maximum.

Постановка проблеми. В настоящее время к силовым установкам на базе дизелей предъявляются все более жесткие требования не только к топливной экономичности, но и к токсичности отработавших газов, что, в свою очередь, выдвигает повышенные требования к функциональным возможностям систем управления (СУ) этих установок.

Анализ литературы. В научных публикациях последних лет [1-7, 9] рассматриваются вопросы синтеза и анализа двумерных СУ двигателей внутреннего сгорания (ДВС), где в качестве управляющих воздействий используются выход рейки топливного насоса h_p и расход дополнительно подаваемого воздуха Q_g или h_p , а также фаза (угол опережения) впрыскивания топлива θ .

Цель работы заключается в синтезе квазиоптимальных по топливной экономичности и токсичности отработавших газов законов управления h_p , θ и Q_g дизель-генератора с газотурбинным наддувом на основе принципа максимума.

Рассмотрим в качестве примера критерий качества для СУ стационарного агрегата. Основными показателями качества переходных режимов, вызванных резкими изменениями нагрузки, являются отклонение частоты вращения от заданного уровня, длительность переходного процесса, дымность и токсичность отработавших газов, а также расход топлива на этих режимах. Дымность и расход топлива не противоречат друг другу, так как

при прочих равных условиях дымность тем больше (меньше), чем больше (меньше) расход топлива [7]. Однако отклонение частоты вращения при набросах нагрузки и длительность переходного процесса сокращаются с ростом расхода топлива, то есть в данном случае имеет место противоречие между управлением и показателями качества СУ. Для снижения дымности и расхода топлива в случае наброса нагрузки необходимо увеличивать воздушный заряд в цилиндрах двигателя, например, путем подачи дополнительного воздуха в агрегат.

Одним из факторов, существенно влияющих на расход топлива в переходных режимах и токсичность отработавших газов двигателя, является угол опережения впрыскивания топлива θ [7]. Однако здесь отсутствует однозначная зависимость между θ и указанными показателями, так как в одних случаях изменение указанного угла приводит к снижению (росту) расхода топлива и снижению (росту) содержания соединений углерода в отработавших газах дизеля и увеличению (снижению) доли соединений азота в этих газах [7], то есть наблюдается полное противоречие между управляющим воздействием и показателями качества СУ ДВС.

Следовательно, возникает задача оптимизации процесса управления. В общем виде эта задача заключается в синтезе управлений, оптимизирующих один или несколько показателей качества, с учетом требований к остальным параметрам в виде ограничений на их значения [9].

Как уже отмечалось, требования малых провалов частоты вращения и длительности переходного процесса, с одной стороны, и низкого расхода топлива, с другой стороны, и ограниченные дымность и содержание вредных токсичных компонентов в отработавших газах двигателя, с – третьей являются противоречивыми. В связи с этим критерий качества управления может быть различным. Применительно к рассматриваемому случаю можно отметить, что необходимо минимизировать как положительные, так и отрицательные отклонения угловой скорости вала от заданного значения, особенно большие по абсолютной величине. Кроме того, необходимо снизить в особенности большие расходы топлива и близкие к допустимым нормам значения токсичности отработавших газов. Поэтому представляется целесообразным и оправданным введение в критерий качества квадратов указанных показателей. Сам же этот критерий можно представить в виде аддитивного функционала.

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \left\{ \left[\omega_n - \omega(t) \right]^2 + \lambda_1 h_p^2(t) + \lambda_2 v^2 \right\} dt,$$

где t_0 – момент начала переходного процесса; t_k – момент окончания переходного процесса; ω_n – номинальная угловая скорость вала; $\omega(t)$ – текущая угловая скорость в переходном режиме дизеля; $h_p(t)$ – текущее значение выхода рейки топливного насоса; v – количество токсичных

выбросов в отработавших газах дизеля; λ_1 и λ_2 – весовые коэффициенты.

Задачей оптимального управления является отыскание управлений $h_p(t)$, $Q_g(t)$ и $\theta(t)$ из области допустимых управлений U , переводящих объект регулирования из состояния X_0 в конечное состояние X_1 в течение времени $[t_0, t_k]$ и минимизирующее критерий-функционал.

Динамика объекта задана системой дифференциальных уравнений (1), (2) при начальных условиях (3–5) и обозначены ограничения в виде неравенств (6–8):

$$\begin{cases} J_k \frac{d\omega_k}{dt} = M_T - M_k, \\ J \frac{d(\omega + \xi)}{dt} = M_i - M_{II} - M_H, \end{cases} \quad (1)$$

где J – момент инерции вращающихся частей дизеля; J_k – момент инерции вращающихся частей турбокомпрессора; $M_T = M_T(\omega, \omega_k, B_v)$ – крутящий момент турбины; $M_k = M_k(Q, \omega_k)$ – момент сопротивления компрессора; ω_k – угловая скорость ротора турбокомпрессора; B_v – часовой расход топлива двигателя; M_H – момент нагрузки на валу дизеля; M_i , M_{II} – соответственно индикаторный момент и момент потерь двигателя; Q – расход воздуха через компрессор; ξ – девиация угловой скорости коленчатого вала;

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & b_1 + b_2 h_p + b_3 Q_g + b_4 h_p Q_g + b_5 h_p^2 + b_6 Q_g h_p^2 + \\ & + \beta_1 \theta + \beta_2 h_p \theta + \beta_3 Q_g \theta + \beta_4 \theta^2 + \beta_5 Q_g \theta^2 + \beta_6 h_p \theta^2; \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega_k}{dt} = b_7 + b_8 Q_g + b_9 Q_g h_p + b_{10} Q_g^2 + b_{11} Q_g^2 h_p + b_{12} h_p; \quad (2)$$

$$\omega_{(0)} = \omega_n, \quad \omega_{k(0)} = \omega_{ki}, \quad \theta_{(0)} = \theta_{ki}; \quad (3)$$

$$0 < h_p \leq h_{p \max}; \quad (4)$$

$$0 < Q \leq Q_{g \max}; \quad (5)$$

$$0 < \theta \leq \theta_{\max}. \quad (6)$$

В фазовом пространстве $X(\omega, \omega_k)$ движения объекта даны две точки X_0 и X_1 и требуется из всех допустимых управлений $h_p(t)$, $Q_g(t)$, $\theta(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, переводящих изображающую точку из положения X_0 в положение X_1 , выбрать такое, которое придает функционалу минимально возможное значение.

Для оптимальности (в смысле минимума критерия-функционала)

процесса $h_p(t)$, $Q_g(t)$, $\theta(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо существование такой константы $\Psi \leq 0$ и такого нетривиального решения $\Psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ системы

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{dH[\Psi, X(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{dX_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

что для любого момента t выполнено условие максимума.

Так

$$\max H[\psi(t), x(t), h_p(t), \theta(t), Q_g(t)] \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad h_p, \theta, Q_g \in U, \quad (9)$$

где

$$H(\Psi, X, h_p, Q, \theta) = \sum_{i=0}^n \Psi_i f_i(X, h_p, Q_g, \theta) \quad (10)$$

Ψ_i – сохраненная переменная; f_i – уравнение движения объекта регулирования; H – гамильтониан (оператор набла); n – количество уравнений объекта регулирования.

Условие равенства нулю максимума гамильтониана (9) справедливо для рассматриваемого объекта регулирования, поскольку система уравнений консервативная, время окончания переходного процесса не задано и подынтегральная функция критерия-функционала консервативная. Тогда система уравнения (7), (9), (10) гамильтониана имеет такую форму

$$\begin{aligned} H\{\psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)\} = & \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 [b_1 + \\ & + b_2 h(p) + b_3 Q_g(t) + b_4 Q_g(t) h_p(t) + b_5 h_p^2 + b_6 Q_g(t) h_p^2(t)] + \\ & + \psi_2 [b_7 + b_8 Q_g(t) + b_9 Q_g(t) h_p(t) + b_{10} Q_g(t) + b_{11} Q_g^2(t) h_p(t) + \\ & + b_{12} h_p(t)] + \psi_3 [\beta_1 \theta(t) + \beta_2 h_p(t) \theta(t) + \beta_3 Q_g(t) \beta_4 \theta^2(t) + \\ & + \beta_5 Q_g(t) \theta^2(t) + \beta_6 Q_g(t) \theta^2(t)], \end{aligned} \quad (11)$$

где f_0 – подынтегральная функция критерия-функционала; u – управление.

В уравнении (11) кроме управлений $h_p(t)$, $Q_g(t)$ и $\theta(t)$ неизвестными являются также $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$, так как сопряженное уравнение

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\sum \frac{\partial f_k}{\partial X_i} \Psi_k, \quad (i = \overline{0, n}; t_0 < t < t_1)$$

однородно относительно Ψ_i и можно произвольным образом выбрать константу в уравнении:

$$\Psi_0(t) = const \leq 0, \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Принимаем $\Psi(t) = -1$.

Для решения уравнения (11) относительно неизвестных $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и Ψ_3 и получения уравнений, из которых можно найти оптимальные

величины $h_p(t)$, $Q_g(t)$, $\theta(t)$, воспользуемся следующим положением принципа максимума: если точка $u(t)$ является внутренней точкой области управления u , то для выполнения условия максимума (9) необходимо равенство нулю следующих частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H[\Psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{\partial h_p} &= 0; \\ \frac{\partial H[\Psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{\partial Q_g} &= 0; \\ \frac{\partial H[\Psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Систему уравнений (12) с учетом (11) представим в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H[\psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{\partial h_p} &= \psi_0 \frac{\partial f_0(x, u)}{\partial h_p} + \\ &+ \psi_1(t)[b_2 + b_4 Q_g(t) + 2b_5 h_p(t) + 2b_6 Q_g(t) h_p(t)] + \\ &+ \psi_2(t)[b_9 Q_g(t) + b_{11} Q_g^2(t) + b_{12}] + \psi_3(t)[\beta_2 \theta(t) + \beta_6 \theta^2(t)] = 0 \\ \frac{\partial H[\psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{\partial Q_g} &= \psi_0 \frac{\partial f_0(x, u)}{\partial Q_g} + \\ &+ \psi_1(t)[b_3 + b_4 h_p(t) + b_6 h_p^2(t)] + \psi_2(t)[b_8 + b_9 h_p(t) + \\ &+ 2b_{10} Q_g(t) + 2b_{11} h_p Q_g] + \psi_3(t)[\beta_3 \theta(t) + \beta_5 \theta^2(t)] = 0; \\ \frac{\partial H[\Psi(t), x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)]}{\partial \theta} &= \Psi_0 \frac{\partial f(x, u)}{\partial \theta} + \\ &+ \Psi_3(t)[\beta_1 + \beta_2 h_p(t) + \beta_3 Q_g(t) + 2\beta_4 \theta(t) + 2\beta_5 Q_g \theta(t) + \\ &+ 2\beta_6 h_p(t) \theta(t)] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (11) и система (13) образуют систему 4 уравнений, которые надо решать относительно трех неизвестных $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$. В результате получим некоторую функцию вида

$$F[x(t), h_p(t), Q_g(t), \theta(t)] = 0. \quad (14)$$

Это равенство определяет необходимое условие оптимальности управления.

Поскольку приращения момента M_n нагрузки, вызывающие переходный процесс, различны по величине, а основные показатели рабочего процесса дизеля (мощность, частота вращения и др.) во время переходного

процесса зависят от времени, то и оптимальные управляющие воздействия должны быть функциями момента нагрузки и времени, т.е. $h_p = h_p(t, M_n)$; $Q_g = Q_g(t, M_n)$; $\theta = \theta(M_n, t)$. Координаты точки состояний объекта регулирования $x(t)$ определяются значениями $\omega(t)$ и $\omega_k(t)$. С учетом этого выражение (8) можно записать следующим образом:

$$F[\omega(t), \omega_k(t), h_p(t, M_n), Q_g(t, M_n), \theta(t, M_n), M_n] = 0. \quad (15)$$

Управление (15) является решением задачи вычисления оптимальных управляющих воздействий. Это значит, что в любой точке фазового пространства можно определить такие управляющие воздействия $h_p(t, M_n)$, $Q_g(t, M_n)$, $\theta(t, M_n)$, принадлежащие области управлений U , $t_0 \leq t \leq t_k$, при которых выполняется равенство (15). Согласно *принципу максимума* таких сочетаний управляющих воздействий h_p , θ , Q_g будет несколько.

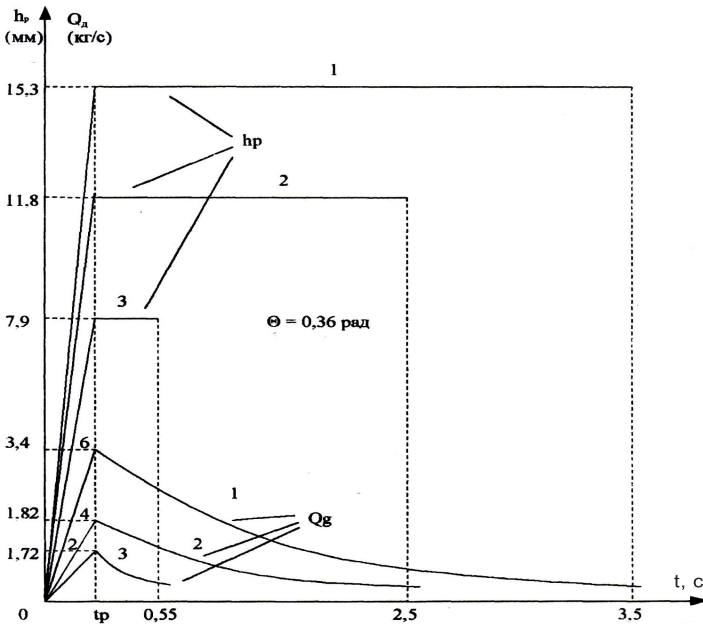


Рисунок 1 – Оптимальные зависимости $h_p(t)$ и $Q_g(t)$ при набросе нагрузки:

1 – $M_H = M_{HH}$; 2 – $M_H = 0,75M_{HH}$; 3 – $M_H = 0,5M_{HH}$.

Задачу определения оптимальных законов управления фазой и количеством подаваемого топлива, а также массой дополнительно подаваемого воздуха решали с помощью компьютера.

В результате расчета квазиоптимальных управлений получены траектории $h(t)$, $Q_g(t)$, $\theta(t)$ для агрегата Д80, приведенные на рис. 1 – 4.

Результаты натурных испытаний одноцилиндрового агрегата Д80, проведенные на ГП «Завод имени Малышева», подтвердили правильность теоретического анализа. При этом максимальное отклонение расчетных и экспериментальных траекторий $h_p(t, M_n)$, $\theta(t, M_n)$, $Q_g(t, M_n)$ не превышает 10%, что вполне приемлемо в рамках решаемой задачи.

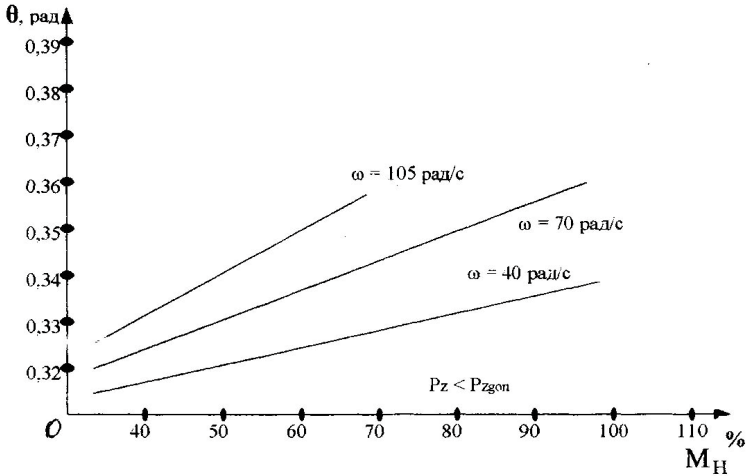


Рисунок 2 – Оптимальные зависимости $\theta(\omega)$ при $M_H = const$ и $P_z < P_{zdon}$.

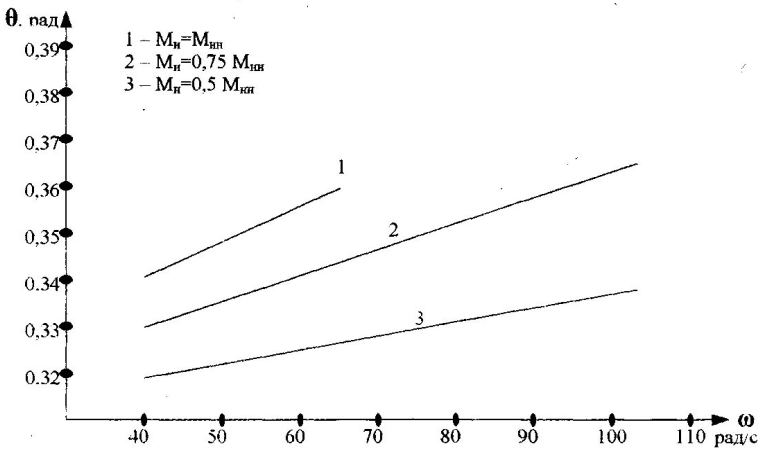


Рисунок 3 – Оптимальная зависимость $\theta(M_H)$ при $\omega = const$.

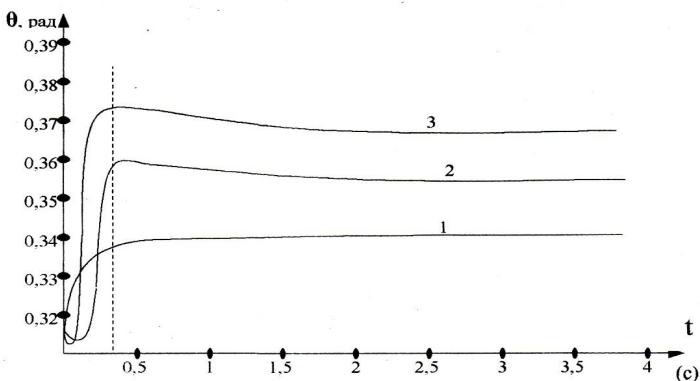


Рисунок 4 – Оптимальная зависимость при $\theta(t)$ при $P_Z < P_{Z\text{дон}}$.

Выводы. Полученные результаты показывают, что близкие к желаемым законы управления топливopодачей и воздуxоснабжением реального объекта могут быть достигнуты при оснащении его соответствующими электронными средствами. При наличии же только штатной гидромеханической системы реализация указанных законов невозможна.

Перспективы дальнейших исследований. Дальнейшие исследования должны быть направлены на реализацию квазиоптимальных управлений по топливopодаче и воздуxоснабжению многоцилиндровых дизель-генераторов по замкнутому алгоритму, предусматривающему возможность текущего контроля фактических значений h_p , θ и Q_g в переходных режимах.

Представляется также целесообразным учет возможной неравномерности загрузки дизеля и его текущего технического состояния при формировании квазиоптимальных управлений $h_p(t, M_n)$, $\theta(t, M_n)$, $Q_g(t, M_n)$, что в свою очередь, требует создания многофункциональной информационно-измерительной системы.

Список литературы: 1. Marine application of emission methods law speed diesel engines/Grohe Ote//Hansa.-1990.-127,№22. – С.1526-1530. Англ. 2. Котиков Ю.Г., Горев А.Э., Блякинштейн Н.М. Цифровые системы автоматического управления силовыми установками автомобилей с дизельными двигателями (обзор). //Двигателестроение, – №4, – 1985. 3. Итоги науки и техники. Двигатели внутреннего сгорания. Т.4. В.А. Лурье, В.А. Мангушев, И.В. Маркова, Б.Я. Черняк. – М.:1985 – 284с. 4. Пинский Ф.И., Мельдзин Н.Х. Структурные особенности электронных адаптивных систем управления дизелем. //Двигателестроение. – 1988, – №6, – С.14-16. 5. Пинский Ф.И. Оптимизация режима работы дизелей электронным управлением впрыска топлива. – Автореф. дис. доктора техн. наук. – Харьков, М., 1987. – 32с. 6. Долгих И.Д. Разработка систем автоматического непрерывно дискретного регулирования транспортных дизелей. – Автореф. дис. доктора техн. наук. – Харьков, ХИИТ., 1993. – 47с. 7. Лиханов В.А., Сайкин А.М. Снижение токсичности автотракторных дизелей. – М.:ВО АГРОПРОМИЗДАТ, 1991 – 208с. 8. Атаке М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, -1968, – 764с. 9. Борисенко А.М. Теорія и практика комп'ютеризованих інформаційно-вимірвальних систем для управління та діагностики дизель-генераторів: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора техн. наук/ Інститут електродинаміки НАН України. – Київ, 2010. – 31с.

Поступила в редколлегию 20.04.2012

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИНТОВЫХ ВОЛН ТРАНСЛЯЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ КОНТИНУУМАХ, ВИБРИРУЮЩИХ СИНФАЗНО

Запропоновані фізична концепція і математична модель активного механічного середовища, здатного передавати хвилі трансляції з квантованою амплітудою коливань і створювати фундаментальні силові поля, подібні до електромагнітного та гравітаційного поля. Розкрито взаємозв'язок між однорідним полем коливань тиску і хвильовим синфазним полем поперечних коливань, досліджений механізм передачі енергії в хвильовому полі. Для низькочастотних коливань пружини виявлено довгі хвилі трансляції, що мають форму солітонів. Отримано рівняння хвильового поля для середньочастотних синфазних коливань пружини, запропоновано використати гвинтовий стрижень як хвилевід або сонотрод ультразвукової резонансної техніки.

Предложены физическая концепция и математическая модель активной механической среды, способной передавать волны трансляции с квантованной амплитудой колебаний и создавать фундаментальные силовые поля, подобные электромагнитному или гравитационному полю. Раскрыта взаимосвязь однородного поля колебаний давления и волнового синфазного поля поперечных колебаний, исследован механизм передачи энергии в волновом поле. Для низкочастотных колебаний пружины обнаружены длинные волны трансляции, имеющие форму солитонов. Получены уравнения волнового поля высокочастотных синфазных колебаний пружины и предложено использовать винтовой стержень как волновод или сонотрод для ультразвуковой техники.

In describing a physical concept and mathematical of an active mechanical medium, which is able to transmit translation waves with quantized amplitude of oscillation and create fundamental force fields, similar to electromagnetic or gravity fields. The interrelationship between uniform field of pressure variations and in-phase wave field of lateral oscillations of a medium, as well as way of transmitting energy in the wave field, are discovered. Long waves of translation, which have a form of soliton wave, are discovered in a low-frequency oscillation of a spring. Equations of wave field of high-frequency in-phase oscillations of the spring are developed. Spiral core is suggested for using as duct or sonotrode for ultrasound devices.

Введение и постановка задачи. Дальнейшее развитие математического моделирования в направлении углубления и уточнения анализа быстропротекающих процессов, с привлечение новых идей и технических решений, является предпосылкой для внедрения многих современных технологий. Работа посвящена освоению новых способов передачи энергии механических колебаний в устройствах для ультразвуковой обработки материалов. Известные недостатки имеющихся способов (быстрое угасание колебаний, высокую жёсткость передающих звеньев, неоднородность амплитуды) можно преодолеть, если перенять опыт природы и перейти с коротких волн на длинные. Для совершения перехода волновод обязан иметь соответствующую кривизну границы (или так называемую внутреннюю кривизну, которую образуют мелкие дефекты упругости в материале).

Для изучения этого опыта во многих областях современной науки активно исследуется особая форма автоколебаний, представленная длинными

уединёнными волнами трансляции – солитонами. Такие волны (фононы) были обнаружены и при решении уравнений механики нелинейного упругого континуума. Фонон является квантовым объектом, имеющим классическое описание. Считается, что изучение фононов, движущихся по активной механической среде (напр., по пористому упругому телу, вибрирующему синфазно), позволит объединить классическую и квантовую механику и подобрать ключи к решению универсальных проблем физики и техники. Но начинать изучение этих волн следует на одномерных задачах, примером которых является моделирование волновых полей тонкого винтового стержня. Фононы и волновые поля в винтовых стержнях ранее не изучались, но именно они могут привести к более эффективному способу передачи энергии ультразвуковыми колебаниями в различных технических устройствах.

Отметим, что полученные в работе результаты моделирования волновых полей в винтовых стержнях являются следствием анализа трёхмерных моделей нелинейных колебаний упругой среды. Задача этой части исследования состояла в изучении основных принципов устойчивого движения винтовой волны трансляции по активной механической среде, вибрирующей синфазно и обладающей свойствами физического пространства. Предполагается, что эти принципы найдут практическое применение на субатомном уровне (в нанотехнологиях), а разработанные методы электромеханической аналогии – при анализе колебаний в упругих элементах машин.

Состояние научной проблемы. В [1,2] выполнен обзор известных математических моделей сплошной упругой среды и винтовых цилиндрических стержней, а также методов расчёта их волн трансляции. Основной акцент сделан на соответствии модели свойствам физического пространства, а также практической направленности методов и их актуальности в условиях перемен, которые происходят в машиностроении и других областях техники с внедрением высоких (в частности, ультразвуковых) технологий.

Проанализированы теории физического пространства, основанные на концепции пассивной механической среды: теория увлечения эфира, теория вытеснения пространства, теория газо-подобного эфира, моментная теория упругости, и некоторые другие. Для первых двух теорий описаны простейшие математические модели. Отмечена особая роль уравнений Максвелла, которыми в современной физике описывают электромагнитное и гравитационное поле; соответствующая лоренц – инвариантная теория гравитации разработана *О. Хэвисайдом* [3] и является линейной аппроксимацией общей теории относительности для слабых полей.

В [4] представлена модель активной механической среды, основанная на гистерезисных свойствах упругопластической деформации материала, обладающего неоднородными механическими свойствами, и на взаимодействии однородного поля колебаний давления и синфазного поля поперечных колебаний (в литературе её называют *активной средой Максвелла*). Материал

среды медленно расширяется, и его состоянию в данный момент времени соответствует точка M_0 на рис.1 (где p – давление, ρ – плотность). Давлению p_0 отвечает также точка M_1 с меньшей плотностью. В распространяющейся волне трансляции происходит переход материала по пути $M_0 M_\infty M_1$, и его потенциальная энергия сжатия преобразуется в кинетическую форму.

В [2] проанализированы модели, описывающие нелинейные связанные колебания винтового цилиндрического стержня: *В. А. Светлицкого* и *С. В. Нарайкина* [5], *А. Г. Асланяна*, *А. В. Гулина* и *С. В. Картышова* [6], *А. И. Деряченко* [7], а также ряд более ранних линейных моделей *М.В. Хвингши*, *Л.В. Корчемного*, *Д.Ф. Полищука*, *П.Е. Товстика*, *А.А. Грунауэра* и др. авторов. Намечены пути для их совершенствования в соответствие с задачами работы.

Чтобы упростить и систематизировать анализ, все известные модели были записаны в единой матричной форме, а их параметры приведены к безразмерному виду:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega yx \\ \Omega yx & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & \Omega yx^T \\ \Omega yx^T & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

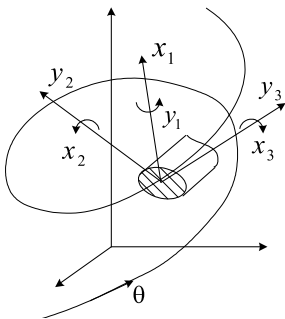


Рисунок 2 – Координаты сечения.

где τ, θ – время и натуральный параметр винтовой оси; векторы Vx, Vy составлены из линейных и угловых скоростей продольного $x_{1,2,3}$ и поперечного $y_{1,2,3}$ смещения сечения (рис.2); Qx, Qy – отвечающие им силы и моменты силы; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения; I, Θ – единичная и нулевая матрицы; $B, \Omega x, \Omega y, \Omega yx, \Omega yx^T$ – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат.

В работе [7] был выполнен частотный анализ уравнений линеаризованной модели вида (1) и построены дисперсионные диаграммы, пример которой приведен на рис. 3. Указывалось на наличие частот синфазных однородных колебаний пружины, а также на схожесть систем

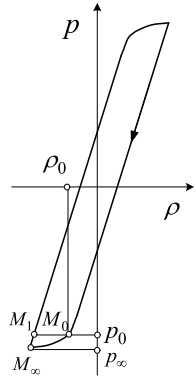


Рисунок 1 – Петля статического упругого гистерезиса.

уравнений для продольных и поперечных колебаний, но практической пользы из этих наблюдений извлечено не было. Отмечалось, что учёт сдвиговых и продольных деформаций оси (чего нет в моделях других авторов) не только уточняет получаемые результаты, но для высокочастотных колебаний изменяет их качественно. Однако эти факторы учитывались частично, для линейных колебаний малой амплитуды: в матрицы связи координат они не входили, и к образованию волнового поля син-

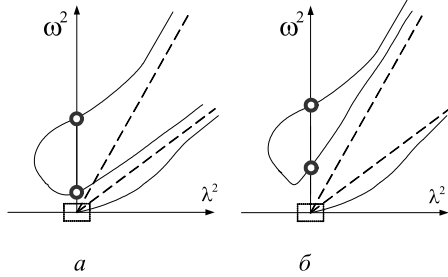


Рисунок 3 – Зависимости волнового числа λ от частоты ω для продольных (а) и поперечных (б) колебаний стержня.

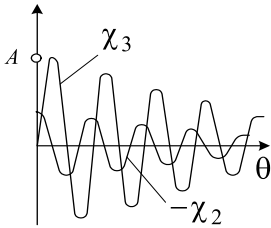


Рисунок 4 – Изменения кривизны χ_2 и кручения χ_3 .

фазных колебаний не приводили.

В [8-10] рассматривалась модель короткой винтовой волны трансляции для связанных колебаний пружины. Волне отвечали точки средней ветви рис.3 а, имеющей прямолинейное протекание; форма колебаний на начальном участке волны показана на рис.4. Энергия волны оказалась пропорциональна частоте; в формулу для коэффициента пропорциональности (аналога постоянной Планка \hbar) кроме геометрических параметров вошёл декремент затухания колебаний.

В этой модели высокочастотные продольные колебания получали энергию от низкочастотных поперечных колебаний (конкретно – от равномерного расширения пружины, что отвечает известным представлениям об источнике энергии для физического пространства). Показано, что для поддержания постоянной амплитуды A волны трансляции интенсивность этого расширения должна быть чрезмерно велика: скорость витка будет близка к скорости звука в материале пружины. Следовательно, запасённая энергия должна быть потенциальной, и может переходить в кинетическую форму только в том месте, где находится волна. Такими свойствами обладают активные среды.

Активная механическая среда Максвелла, использующая энергию гистерезисного перехода, пока изучается на математических моделях. Но открытые на этой основе механизмы образования волнового синфазного поля можно использовать и в пассивных средах, в том числе в волноводе и в излучателе колебаний, применяемых при ультразвуковой обработке материалов: сварке, резке, финишной доводке поверхностей, и т.д. Так, при ультразвуковой сварке пластмасс [11] используются длинные пластинчатые волноводы (сонотроды), которые благодаря специально разработанной форме имеют в уз-

ком диапазоне частот выровненную амплитуду колебаний; такими же свойствами обладают волновые поля цилиндрической пружины.

Модели для анализа винтовых волн переноса деформации в сплошной среде. В [4] выявлена формальная аналогия между уравнениями линейной теории упругости и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Уравнение для поперечных смещений \vec{u} сплошной среды

$$\rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -G \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \rho \vec{f},$$

где t – время; ρ – плотность; G – модуль сдвига; $\rho \vec{f}$ – плотность массовых сил, получило факторизации (3) и (4) в форме соотношений Максвелла (2)

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t, & \operatorname{div} \vec{E} = q, & \operatorname{div} \vec{J} + \partial q / \partial t = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + c^{-1} \vec{J}, & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\vec{E} = G \operatorname{rot} \vec{u} - \rho \vec{L}$, $\vec{H} = (G/c) \partial \vec{u} / \partial t$, $q = -\rho \operatorname{div} \vec{L}$, $\vec{J} = \rho \partial \vec{L} / \partial t$, (3)

или $\vec{E} = G \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \rho \vec{f}$, $\vec{H} = (G/c) \partial \operatorname{rot} \vec{u} / \partial t$, $q = -\rho \operatorname{div} \vec{f}$, $\vec{J} = \rho \partial \vec{f} / \partial t$; (4)

$c = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения волн поперечных смещений; $\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{L}$.

Величины q, \vec{J} в системе (2) играют роль плотностей зарядов и токов.

Для системы (2) в [4] получено обобщение *теоремы Умова – Пойтинга*.

Пусть величина $w(t) = \iiint_{P \in T} (k/2)(\vec{E}^2(P,t) + \vec{H}^2(P,t)) dV$, где $k > 0$ (5)

определяет энергию колебаний среды в области T , где $q(P,t) = 0, \vec{J}(P,t) = 0$.

Тогда

$$\partial w(t) / \partial t = \Pi_{\partial T}(\vec{S}) = \oiint_{\partial T} (\vec{S}, \vec{n}) d\sigma, \text{ где } \vec{S} = k \cdot c \left[\vec{E}, \vec{H} \right].$$

Для факторизации (3) константа $k = G^{-1}$, вектор Пойтинга $\vec{S} = [\vec{\tau}, \vec{v}]$, а кинетическая и потенциальная энергии колебаний определяются скоростями

$\vec{v} = \partial \vec{u} / \partial t$ и напряжениями кручения

$\vec{\tau} = G \operatorname{rot} \vec{u}$. Поле возникает при переме-

щении или вращении источников.

Можно принять, что $\vec{L} = \operatorname{rot} \vec{h}$ и $q \equiv 0$,

но если силовое поле $\rho \vec{f}$ локальное и разрывное, то векторные линии его потен-

циала \vec{L} и токи \vec{J} , полученные известными методами, оказываются не-

замкнутыми. В таких задачах выполнить условие $q \equiv 0$ сложно, а для дальне-

го поля элемент пульсирующего тока удобно заменять в расчёте элементар-

ным дипольным излучателем [12].

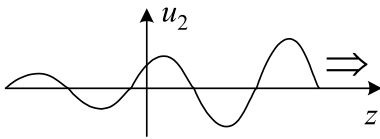


Рисунок 5 – Амплитудная функция волны.

Рисунок 5 – Амплитудная функция волны.

В [4] приводится пример использования этой теоремы для анализа энергетического обмена в волне трансляции, образованной плоской волной крутильной деформации среды (рис.5)

$$\vec{u} = \Delta u \cdot \{0; r; 0\} \cdot e^{-f(\omega t - \lambda z)} \cdot \sin(\omega t - \lambda z), \quad \omega t - \lambda z \geq 0$$

и связанными колебаниями упругой оболочки (рис.6).

Для факторизации (4) кинетическая и потенциальная формы функционала (5) образуются угловыми скоростями $\vec{\omega} = \partial \vec{\psi} / \partial t$ и плотностями упругой силы $\vec{\sigma} = G \text{rot } \vec{\psi}$, где $\vec{\psi} = \text{rot } \vec{u}$. Она позволяет моделировать движение источников поля. Пусть такой источник занимает малый объём ΔV_i и перемещается по среде с относительной скоростью \vec{v}_i . Тогда в системе координат, движущейся и вращающейся вместе со средой, на него будет действовать сила

$$\vec{F} = \Delta V_i \cdot \vec{E} + \Delta V_i \cdot c^{-1} [\vec{v}_i, \vec{H}],$$

где первое слагаемое пропорционально переносному, а второе – кориолисовому ускорению. Для поля поперечных смещений $q \equiv 0$, но в среде Максвелла возникают заряды, индуцирующие на своей границе центральное распределение напряжений и ускорений.

Среду Максвелла описывает уравнение нелинейной теории упругости

$$\partial(\rho \partial \vec{u} / \partial t) / \partial t = \text{grad}(K \text{div } \vec{u}) - \text{rot}(G \text{rot } \vec{u}) + \rho \vec{f}, \quad (6)$$

где K – модуль сжатия. Среда имеет мелкие дефекты сжимаемости (например, поры) и её низкочастотные колебания давления p описываются волновым уравнением, а высокочастотные – уравнением Клейна – Гордона:

$$a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p; \quad a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - (\omega_* / a)^2 (p - p_0), \quad (7)$$

где $a = \sqrt{K / \rho}$, $\omega_* = \sqrt{3\varepsilon a / R_d}$, R_d , ε – средний радиус и объёмная доля дефектов.

Уравнения (7) имеют решение $p = p_o \psi(\omega_o t) + p_* \sin \omega_* t$, где первое слагаемое описывает медленное изменение давления вдоль гистерезисной кривой (рис.1), вблизи точки M_0 : $\psi(\omega_o t) = 1 - \omega_o t \approx 1$, $p_o \approx p_0$. Заметим, что однородные колебания давления происходят из-за изменения объёма пор, то есть для упругой среды они внутренние.

В среде возникают однородные поля колебаний плотности и модуля:

$$\rho = \rho_o \psi(\omega_o t) + \rho_* \sin \omega_* t, \quad G = G_o \psi(\omega_o t) + G_* \sin \omega_* t.$$

Этому отвечает синфазные волновые поля смещений и ускорений

$$\vec{u} = \vec{u}_o \psi(\omega_o t) + \vec{u}_* \sin \omega_* t, \quad \vec{f} = \vec{f}_o \psi(\omega_o t) + \vec{f}_* \sin \omega_* t;$$

частоты ω изменения амплитуд \vec{u}_o , \vec{u}_* , \vec{f}_o , \vec{f}_* отвечают условию $\omega_o \ll \omega \ll \omega_*$.

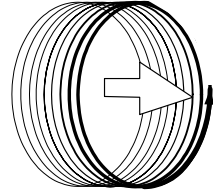


Рисунок 6 – Форма оболочки.

Подстановка в (6) и усреднение приводит к уравнениям двух *синфазных полей* – *расширяющегося и пульсирующего*:

$$\rho_o \partial^2 \bar{u}_o / \partial t^2 = -G_o \text{rot rot } \bar{u}_o + \rho_o \bar{f}_o, \quad \rho_* \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 = -G_* \text{rot rot } \bar{u}_* + \rho_* \bar{f}_*$$

чему отвечают уравнения Максвелла вида (2) и факторизации вида (4):

$$\bar{E}_o = G_o \text{rot rot } \bar{u}_o - \bar{f}_o, \quad \bar{H}_o = (G_o / c_o) \partial \text{rot } \bar{u}_o / \partial t, \quad q_o = -\rho_o \text{div } \bar{f}_o, \quad \bar{J}_o = \rho_o \partial \bar{f}_o / \partial t,$$

$$\bar{E}_* = G_* \text{rot rot } \bar{u}_* - \bar{f}_*, \quad \bar{H}_* = (G_* / c_*) \partial \text{rot } \bar{u}_* / \partial t, \quad q_* = -\rho_* \text{div } \bar{f}_*, \quad \bar{J}_* = \rho_* \partial \bar{f}_* / \partial t,$$

где $c_o = \sqrt{G_o / \rho_o}$, $c_* = \sqrt{G_* / \rho_*}$, причём здесь $q_o \neq 0, q_* \neq 0$ и $c_o = c_* = a$.

В тех областях среды, где $q_* \neq 0$, уравнение (7) принимает вид (см. [13])

$$a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - [(\omega_* - \omega)^2 / a^2](p - p_o), \quad (8)$$

и реализуются его решения, отвечающие заряженным и незаряженным частицам. Учитываемое в (8) изменение синфазной частоты ω_* происходит под действием двух факторов: она возрастает при увеличении температуры среды и уменьшается при гистерезисном переходе материала.

У зарядов изменение амплитуды p_* квантовано, имеет сферическую симметрию и при малых значениях r (рис.7) описывается формулой:

$$p_*(r) = \pm(p_o - p_\infty) \cdot \sin(\lambda_* r) / (\lambda_* r),$$

где $\lambda_* = \sqrt{2\omega_*\omega_3 - \omega_3^2} / a$ – радиальное волновое число, частота ω_3 отвечает центру заряда. Минимальный размер заряда соответствует условию $\omega_3 = \omega_*$, что необходимо для его устойчивости. Как следствие, все пульсирующие устойчивые заряды имеют одинаковую производительность, образуют диполи и взаимодействуют с силой (см. [14]), аналогичной силе Лоренца из электродинамики. Одноименные заряды отталкиваются, сонаправленные токи притягиваются. В результате пульсирующее синфазное поле среды Максвелла оказывается изоморфным электромагнитному полю.

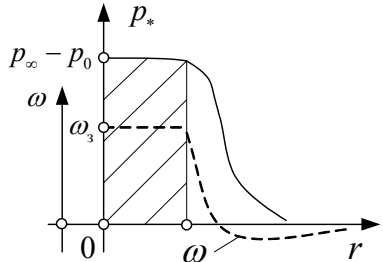


Рисунок 7 – Радиальные формы для заряда.

Для плотного грунта при параметрах пористости $R_d = 1 \text{ мкм}$, $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-16}$ получаем $\omega_* \approx 50 \text{ с}^{-1}$, что отвечает частоте колебаний 8 Гц, известной как альфа – ритм; радиус заряда оценивается величиной 90 м, в его объём попадают $4 \cdot 10^8$ дефектов. Если для эфира принять $\varepsilon = 10^{-13}$ (что соответствует отношению объёмов ядра и атома), то классическому радиусу заряда $2.8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ будут отвечать значения радиуса дефекта $R_d = 5 \cdot 10^{-22} \text{ м}$ и частоты 10^{23} Гц ; в объём заряда попадут $2 \cdot 10^6$ дефектов.

Незаряженным частицам пульсирующего поля отвечают винтовые волны давления (спиноры)

$$p = p_0 - (p_0 - p_\infty) \Psi_n(r) \sin(\omega_* t - \lambda z - n\varphi) \eta(z - at),$$

где r, z, φ – цилиндрические координаты; $\eta(x)$ – функция Хэвисайда; $n = 1, 2$; λ, λ_* – волновые числа (осевое и радиальное), $\lambda_* = \sqrt{2(\omega_* - \omega_3)\omega_3} / a$; зависимость $\Psi_n(r)$ описывается функциями Бесселя, Неймана и Ханкеля n -го порядка (рис.8);

$$\tilde{J}_n(x) = J_n(x) / J_n'(n) - N_n(x) / N_n'(n),$$

что отвечает условиям

$$\tilde{J}_n'(n) = \tilde{J}_n''(n) = 0. \quad (9)$$

Такие частицы имеют момент количества движения (спин) и ядро, в котором выполняется условие гистерезисного перехода $p = p_\infty$; непрерывное выполнение этого условия необходимо для устойчивости волны. Форма ядра винтового фонона для $n=1$ показана на рис.9. Ядро вращается с угловой скоростью $(\omega_* - \omega_3) / n$ и движется поступательно со скоростью a .

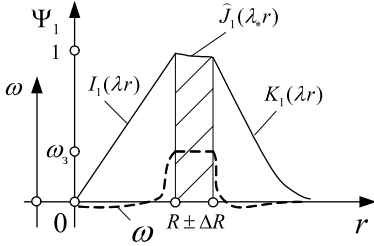


Рисунок 8 – Радиальные формы для спинора.

Диссипативные факторы компенсируются выделением кинетической энергии в ядре, что увеличивает давление за прямоугольным фронтом волны (его формируют условия (9)) и как бы «подталкивает» её.

Непрерывный гистерезисный переход материала приводит к условию $q_0 \neq 0$, что создаёт заряд m поля расширения, причём все заряды этого поля имеют один знак, но разную величину. Для винтового фонона, показанного на рис.9, весь этот заряд располагается на расстоянии R от оси вращения, и выполняются условия:

$$m R^2 (\omega_* - \omega_3) = \hbar \cdot n / 2, \quad m = \hbar \omega_3 / a^2,$$

то есть спин не зависит от длины волны. Константа \hbar определяется свойствами пористой среды и может быть получена экспериментально.

Суммарный заряд $m_\Sigma = \sum m_j$ расширяющегося поля определяется скоростью расширения ω_0 и является константой (аналог законов сохранения массы и энергии).

В работе [16] показано, что неподвижные заряды этого поля притягиваются с силой, изменяющейся по закону обратных квадратов, а движущиеся заряды взаимодействуют с силой, анало-

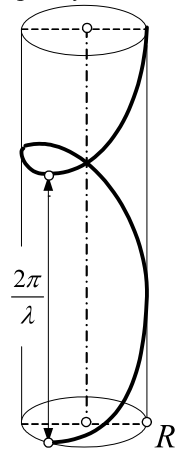


Рисунок 9 – Ядро спинора.

гичной силе Лоренца; при этом сонаправленные токи отталкиваются. В результате расширяющееся синфазное поле среды Максвелла оказывается изоморфным лоренц - инвариантному гравитационному полю.

Расширяющееся поле обладает индукцией, но все заряды имеют один знак, и поэтому её влияние невелико. В [14] *доказана следующая теорема.* Пусть заряды области T_1 создают стационарное синфазное расширяющееся поле, и внутри области T_2 поле гравитационной силы является однородным. Тогда отношение суммарных сил индукции F_χ и гравитации F_γ , действующих на заряды из области T_2 , удовлетворяет неравенству

$$F_\chi / F_\gamma \leq v_1 \cdot v_2 / c^2, \quad (7)$$

где v_1, v_2 – максимальные скорости движения зарядов в областях.

Аналогичная теорема справедлива для пульсирующего синфазного поля, но при условии, что в областях $T_{1,2}$ все его заряды имеют один знак. В прикладных задачах электродинамики такое условие выполняется редко.

Нелинейные модели для анализа волн трансляции в винтовом стержне. На основе анализа и синтеза известных математических моделей в [2] разработана новая динамическая модель винтового стержня, предназначенная для исследования нелинейных колебаний и автоколебаний в широком диапазоне частот и длин волн. К отличительным особенностям модели относятся следующие её качества: рассматриваются связанные колебания групп продольных и поперечных деформаций; уравнения имеют симметричную матричную форму (1); число коэффициентов взаимного влияния групп увеличено до 6-ти, а с учётом конвективных членов – до 12-ти.

Матрицы нелинейной связи координат имеют в модели следующую форму:

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\varepsilon_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega y x = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\chi_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega x y = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\chi_{1,2,3}$ – кривизны и кручение; $\varepsilon_{1,2,3}$ – деформации сдвига и сжатия стержня.

Проанализированы решения дисперсионного уравнения модели и показано, что они слабо зависят от коэффициентов влияния, выявлена и обоснована прямолинейность протекания средних ветвей для решений этого уравнения (рис.3), получены формулы для частот синфазных колебаний (на рис.3 им отвечают точки на оси ω^2). В основу модели положена гипотеза С.П. Тимошенко о равномерной форме деформации тонких стержней, и было необходимо проверить её правомочность в области высокочастотных и коротковолновых колебаний. В ходе проверки, при использовании трёхмерной

модели линейной теории упругости в [15] решена задача о распространении экспоненциальных волн переноса по цилиндрическому стержню. Решения используют бегущие скалярные и векторные потенциалы:

$$\vec{u} = \vec{\Psi}(r, \varphi) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \eta(\omega t - \lambda z) = C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 + C_3 \vec{u}_3,$$

$$\vec{u}_1 = \text{rot}(\Phi_1(r, \varphi) \cdot e^{\omega t - \lambda z} \vec{k}); \vec{u}_2 = \text{rot rot}(\Phi_2(r, \varphi) \cdot e^{\omega t - \lambda z} \vec{k}); \vec{u}_3 = \text{grad}(\Phi_3(r, \varphi) \cdot e^{\omega t - \lambda z})$$

связанные граничными условиями на боковой поверхности (при $r = R$):

$$\text{def } \vec{u}_{r,r} + [\mu / (1 - 2\mu)] \text{div } \vec{u} = 0; \text{def } \vec{u}_{r,z} = 0; \text{def } \vec{u}_{r,\varphi} = 0.$$

Потенциалы $\Phi_{1,2,3}(r, \varphi)$ выражены через функции Бесселя n -го порядка, а трансцендентные дисперсионные уравнения после локализации корней решались методом дихотомии. Были исследованы осесимметричные ($n=0,1,2, \dots$, кручение и $n=0,1$, продольная деформация), а также секторальные

волны переноса ($n=1$). Полученные решения для области волновых чисел $\lambda \cdot R < 1$ (отрезок $1'$, рис.10, а) подтвердили, а в случае более коротких волн – уточнили результаты применения классической теории тонких стержней.

Кроме известных решений получены короткие волны переноса импульса (неравномерного сдвига сечения, рис.11), не описываемые классической теорией. Оказалось, что если граничное сечение стержня закреплено только в концах диаметра, то центральная и периферийная (при углах $|\varphi| > 30^\circ$) зоны сечения получат возможность смещаться при аperiодических поперечных колебаниях в противоположные стороны. Что приведёт к значительному увеличению напряжений, и это нужно учитывать при

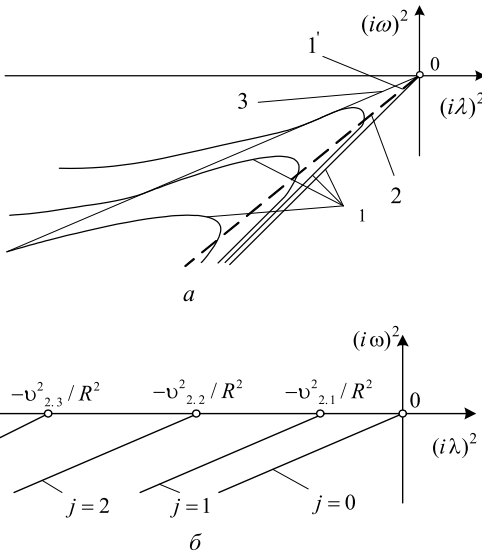


Рисунок 10 – Дисперсионные диаграммы для продольного сжатия (а, 2 – классическое решение) и вращения стержня (б, классическое – $j=0$, зональное – $j > 0$).

Прямая 3 соединяет точки перегиба и удовлетворяет уравнению $\omega^2 = (G/\rho)\lambda^2$.

проектировании и прочностном расчёте.

Попутно в [16] получены формулы для расчёта кинетической энергии, которую переносят экспоненциальные волны деформации кручения стержня, имеющие постоянную (квантованную) амплитуду и определённую форму

деформации сечения. Показано, что при равномерных деформациях сечения энергия волны пропорциональна «частоте» ω , причём значению постоянной Планка отвечает стержень, радиус которого близок к радиусу ядра атома.

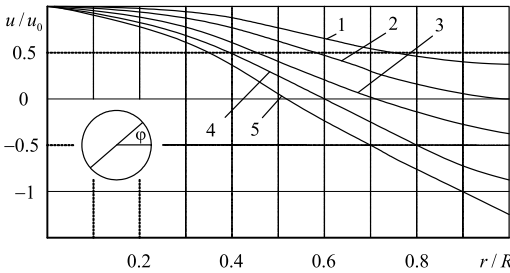


Рисунок 11 – Поперечный сдвиг для точек сечения (1 – $\varphi = 0^0$, 2 – $\varphi = \pm 30^0$, 3 – $\varphi = \pm 45^0$, 4 – $\varphi = \pm 60^0$, 5 – $\varphi = \pm 90^0$).

нии формы деформации энергия изменяется дискретно в соответствии с квантовым постулатом Нильса Бора. Эти результаты указывают на существование более тесной связи между классическими и новыми разделами механики, чем считалось ранее.

В [17] выполнена нелинейная аппроксимация низкочастотных связанных нелинейных колебаний пружины по её дисперсионному уравнению (рис.12).

Колебания описываются системой вида (1)

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} -B^T & \Omega \\ \Omega & B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & 0 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_3 = Cx_3 Qx_3 - \chi_3^0$.

Показано, что эти колебания описываются одномерными уравнениями Кортевега – де Фриза: (классическим, в случае значительной начальной деформации кручения χ_3^0 , или модифицированным, если этой деформацией

Для неравномерных деформаций сечения частота, волновое число и энергия волны при изменении скорости переноса подчиняются *релятивистскому преобразованию Лоренца*, а её реальная длина укорачивается в соответствии с *гипотезой Фитцджеральда*. При измене-

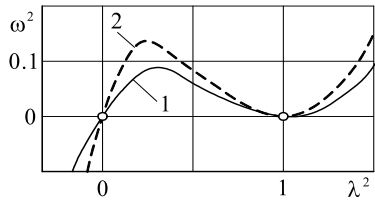


Рисунок 12 – Нижние ветви дисперсионной диаграммы (1 – продольные, 2 – поперечные колебания; на рис. 3 участок обозначен прямоугольником).

можно пренебречь):

$$u'_t + (u + u^2 + u''_{xx})'_x = 0, \quad u'_t + (u + u^3 + u''_{xx})'_x = 0. \quad (11)$$

Получены формулы, связывающие скорость v , энергию E_c , импульс P_c и другие характеристики уединённой нелинейной волны переноса (классического или модифицированного солитона Рассела) с амплитудой A_c кручения проволоки. Для модифицированного солитона (рис.13) они имеют вид:

$$v_c = v_0(1 + A_c^2/2), E_c = [\pi/(4(1 + \mu)z_{\text{п}})]Gd^3 A_c, P_c = (\pi^2/4)d^3 \sqrt{\rho G},$$

где $d, z_{\text{п}}$ – диаметр проволоки и индекс навивки; ρ, G – её плотность и модуль сдвига; v_0 – скорость линейной волны при продольной деформации пружины; μ – коэффициент Пуассона. По условиям прочности стержня

$$A_c < \Delta\tau \cdot z_{\text{п}},$$

где $\Delta\tau = \tau_k/E = 0.005...0.01$, τ_k – предельно допустимое касательное напряжение; E – модуль Юнга. Как следствие характерной особенностью изучаемых солитонов является узкий диапазон их скоростей, которые отличаются от скорости v_0 на доли процента.

Благодаря этому свойству, а также пропорциональности энергии и амплитуды и независимости момента количества движения от амплитуды, солитон оказывается подобным фотону.

Обнаруженные солитоны имеют эффективную длину 10...20 витков, то есть относятся к диапазону длинных волн и, если их не генерируют специально, могут наблюдаться только в длинных пружинах (например, в длинных пружинах растяжения, где легко обеспечить устойчивость, или в винтовой обмотке струны). Они способны аккумулировать и переносить значительную энергию, что открывает перспективу использования этих волн в виброударных установках различного назначения. Предельное значение энергии солитона в стальной пружине определяется формулой $E_M = 5 \cdot 10^9 d^3$; так, для пружины с диаметром проволоки $d = 20$ мм эта величина составляет 4кДж.

В [20] изучен механизм образования в тонком винтовом стержне волнового синфазного поля, который отличается от описанного выше тем, что синфазная частота ω_* однородных колебаний плотности определяется не радиусом кривизны внутренних дефектов, а кривизной стержня. На нижней синфазной частоте поперечных колебаний ω_* (рис.3 б, нижняя точка пересечения графика с осью ω^2) их форма имеет вид:

$$(Vy, Qy) = A_* \cdot ((0 \quad -0.5/z_{\text{п}} \quad 0)^T \cos(\omega_* t); (0 \quad 0 \quad 1)^T \sin(\omega_* t)),$$

то есть в колебаниях участвуют радиальная скорость и напряжение сжатия

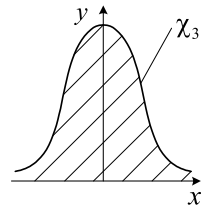


Рисунок 13 –
Изменение
кручения стержня
внутри солитона.

винтовой оси. Кроме того эти напряжения могут медленно изменяться (напр., уменьшаться) по линейному закону $\psi(\omega_0 t) = 1 - \omega_0 t \approx 1$. В результате происходит изменение и пульсация значений погонной плотности и зависящих от неё матриц $M = M_x, M_y$ и $C = C_x, C_y$:

$$\rho = \rho_o \psi(\omega_0 t) + \rho_* \sin \omega_* t, \quad M = M_o \psi(\omega_0 t) + M_* \sin \omega_* t, \\ C^{-1} = C_o^{-1} \psi(\omega_0 t) + C_*^{-1} \sin \omega_* t,$$

а также матрицы связи Ω . Систему (9) приводим к форме операторного уравнения

$$\begin{bmatrix} M_x & \Theta \\ \Theta & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}'' = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} C_x^{-1} & \Theta \\ \Theta & C_y^{-1} \end{bmatrix} \times \\ \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & \Omega^T \\ \Omega^T & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

и ищем решение в виде: $\bar{x} = \bar{x}_o \psi(\omega_0 t) + \bar{x}_* \sin \omega_* t$, $\bar{y} = \bar{y}_o \psi(\omega_0 t) + \bar{y}_* \sin \omega_* t$, где частоты ω изменения амплитуд \bar{x}_* , \bar{y}_* , \bar{x}_o , \bar{y}_o отвечают условию $\omega_o \ll \omega \ll \omega_*$ (эти условия выполняются для ветвей, показанных на рис.12).

Усреднение и факторизация операторного уравнения приводит к двум *синфазным полям – расширяющемуся и пульсирующему*, причём оба поля описываются системой (10), но с матрицами связи $\Omega = \Omega_o$ и $\Omega = \Omega_*$, где

$$\Omega_o = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{3,o} & 0 \\ -\chi_{3,o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_* = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{3,*} & 0 \\ -\chi_{3,*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{3,0} = Cx_3 Qx_{3,o} - \chi_3^0, \\ \chi_{3,*} = \sqrt{\chi_{3,0}^2 + (3/4)(Cx_3 Qx_{3,*})^2}.$$

Как и для среды Максвелла, волновое расширяющееся поле пружины оказывается слабым и технических приложений не имеет. В пульсирующем поле амплитудные функции Vx_* , Vy_* , Qx_* , Qy_* имеют большую длину волны и слабое затухание, что открывает широкие перспективы для приложений.

Изучена возможность образования солитона волнового пульсирующего поля пружины. Форма матрицы влияния Ω_* показывает, что в этом поле, не зависимо от величины χ_3^0 , получим модифицированное уравнение (11). У соответствующего солитона максимальная амплитуда продольных колебаний равняется $\Delta h = (\sqrt{2}/4)\pi z_{\text{п}} d$, что на 2...3 порядка превышает её уровень для ультразвуковой техники, а максимальная линейная скорость перемещения близка к скорости звука в материале. Характерно, что относительные скорости деформации в волновом солитоне невелики, и пружина выдержит такие интенсивные колебания, но возбудить их известными методами сложно.

Приложения синфазных колебаний для ультразвуковой обработки материалов. В соответствующих устройствах для передачи упругой энергии

используют стержни и др. элементы, длина которых кратна длине полуволны возбуждаемых колебаний. При резонансной частоте 22 кГц, на которой работают многие устройства, длина полуволны для прямых стальных стержней составляет 112 мм, титановых – в 1.2 раза больше. Для винтового стержня, колеблющегося с синфазной частотой, этого ограничения нет.

Разработан порядок возбуждения такого поля и изучены факторы, определяющие синфазную частоту $\nu_* = \omega_*/(2\pi)$ и влияющие на её изменения при работе стержня. Оказалось, что она определяется формулой

$$\nu_* = \sqrt{E/\rho} \sqrt{1 + 0.5\chi_3^2(1 + 0.5/(1 + \mu))} / (2\pi R_{кр} [1 + 1/(4z_{п}^2)]),$$

где $R_{кр}$ – радиус кривизны стержня, $R_{кр} = R_{в} / \cos^2 \delta$; $R_{в}, \delta$ – радиус навивки и угол подъёма спирали; $\chi_3 = tg\delta_0$ – изменение кручения при начальном сжатии. Фактически, эта частота определяется скоростью распространения волны продольной деформации по витку пружины, не зависит от формы сечения и является стабильной величиной. Для тонкого стального стержня при индексе $z_{п} > 5$ и температуре $t_{п} < 120$ С имеем простую зависимость

$$R_{кр} = 0.77 / (\nu_* / 10^3)^3.$$

Для частоты 22 кГц получаем радиус кривизны 36 мм, а диаметр стержня $d=8...10$ мм. Пружина из такой проволоки выдерживает сжимающую и сдвигающую нагрузку $F_{д}=6...10$ кН. Если частота увеличена до 130 кГц, то $R_{кр} \approx 10$ мм, $d=2...3$ мм, а сила $F_{д}=200...300$ Н.

Чтобы возбудить волновое поле нужно обеспечить поперечное колебание опоры в точке закрепления пружины. Показано, что если относительное отклонение частоты ν_* не превосходит величины $\Delta\nu_* = 0.2/i_b$, где i_b – число витков пружины, то искажениями в работе волнового синфазного поля можно пренебречь. В частности, амплитуда указанного колебания будет образовывать однородное поле, а соответствующую жёсткость при расчёте устройства допустимо считать бесконечной. В тоже время коэффициенты жёсткости пружины при продольном сжатии и сдвиге, а также аналогичные коэффициенты для волнового поля синфазных колебаний, будут на один – два порядка ниже, чем у других элементов волноводной системы.

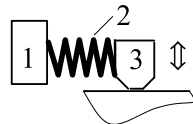


Рисунок 14 –
Схема
устройства.

Изучены факторы, влияющие на прочность стержня при его колебаниях на режимах волнового поля. Оказалось, что они аналогичны требованиям, которые предъявляют к интенсивности динамической деформации стержня на низких частотах, но вместо скорости смещения опоры здесь ограничивается скорость изменения амплитуды её колебаний. В частности, для обеспечения усталостной прочности материала необходимо и достаточно, чтобы максимальная скорость изменения амплитуды не превосходила величины

$\Delta\nu = 5 \text{ мкм/мкс}$; для устройств резонансной техники это условие выполняется с запасом.

В современной технологии безабразивной ультразвуковой финишной обработки поверхности металла пружину предлагается использовать как элемент волноводной системы (рис.14). Пружина 2 устанавливается между магнитострикционным элементом 1, генерирующим поперечные колебания с частотой 22 кГц (или 50 кГц, 80 кГц) и амплитудой 5...25 мкм, и индентором 3, что существенно повышает функциональные качества системы. Жёсткость пружины достаточна, чтобы обеспечить необходимое усилие прижатия $F_T = 100...300 \text{ Н}$. Аналогичную схему можно применять и при ультразвуковой сварке металлов.

Ультразвуковая сварка или резка мягких пластмасс осуществляется на резонансной частоте 18...50 кГц при амплитуде продольных деформаций 30...70 мкм и усилии прижатия $F_T = 50...150 \text{ Н}$; для этих условий рекомендуется использовать схему рис.14. При сварке жёстких пластмасс необходимо обеспечить поперечные колебания излучателя тепловой энергии – сонотрода, работающего с амплитудой 40 мкм и частотой 22 кГц, причём амплитуда должна быть выровненной на участке, длина которого превышает длину возбуждающей волны на порядок. Известное решение использует пластину специальной формы, к которой подключают 5 генераторов колебаний. Более эффективное решение даёт пружина, в которой возбуждаются синфазные поперечные колебания. Тогда можно использовать один генератор, а частоту колебаний повысить до уровня 130...150 кГц.

В волноводных системах резонансной ультразвуковой техники для увеличения амплитуды колебаний используют трансформаторы упругих колебаний; их часто изготавливают в виде прямого стержня переменного сечения, площадь которого изменяют по ступенчатому или непрерывному закону. Такое же усиление для амплитуды продольных колебаний обеспечит винтовой стержень переменного сечения, если при его навивке обеспечить постоянный радиус кривизны нейтрального волокна (как в конструкции штопора), или плавно изменять угол δ подъёма спирали.

Винтовой титановый стержень (рис.15), навитый с углом подъёма $\delta \approx 75...80^\circ$, рекомендуется использовать как сонотрод для ультразвуковых гомогенизаторов. Это обеспечит поперечный размер, как у его аналогов, но продольный размер можно увеличить на порядок (он ограничен только величиной отклонения частоты $\Delta\nu_*$), что позволит применять гомогенизатор в узких длинных каналах. Поперечные однородные колебания сонотрода можно совместить с его продольными синфазными колебаниями, что улучшит кавитацию.

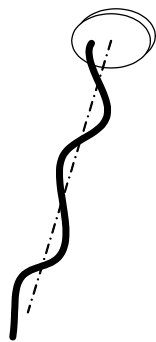


Рисунок 15 –
Винтовой
сонотрод.

Выводы. На основе гистерезисных свойств деформации материала разработана оригинальная физическая концепция и новая математическая модель для активной механической среды, способной передавать волны трансляции с квантованной амплитудой колебаний и создавать фундаментальные силовые поля, подобные электромагнитному полю и лоренц - инвариантному гравитационному полю, обладающему индукцией. Получена эффективная оценка для индукции поля. Раскрыта взаимосвязь между однородным полем колебаний давления и волновым синфазным полем поперечных колебаний среды, а также исследован механизм передачи энергии в волновом поле.

Внесены необходимые уточнения в матричную и векторную модели связанных нелинейных колебаний тонкого цилиндрического стержня и получены уравнения волнового поля среднечастотных синфазных колебаний пружины.

Выполнена нелинейная аппроксимация уравнений низкочастотных связанных колебаний тонкого винтового стержня и для продольных деформаций пружины получены длинные волны трансляции, имеющие форму солитонов.

Составлена трёхмерная математическая модель для исследования волн переноса деформации по цилиндрическому стержню и разработан аналитический метод решения её уравнений, использующий бегущие потенциалы Герца.

Показано, что задачи динамического деформирования упругого тела с внутренними (в т.ч. пульсирующими) источниками напряжения могут решаться при использовании уравнений Максвелла и методов расчёта электромагнитного поля.

Выявлено, что при интенсивном деформировании в пружине возникают нелинейные бегущие волны – винтовые солитоны. Они концентрируют напряжения и их нужно учитывать при прочностных расчётах. Они переносят значительную энергию и импульс, и их можно использовать в виброударных системах.

Выяснено, что при соответствующих граничных условиях в стержнях и валах возникают внутренние колебания, отличающиеся неравномерной деформацией поперечного сечения. Такие колебания не описываются классической теорией тонких стержней, но их нужно учитывать при прочностном расчёте.

Показано, что использование винтового стержня в качестве волновода для ультразвуковой резонансной техники позволит передавать энергию колебаний посредством длинных волн синфазного волнового поля; такое решение минимизирует потери и улучшает функциональные свойства передачи. При сварке, резке и финишной обработке материалов повышается предельная частота колебаний, сокращаются габариты установки и длительность технологической операции. Значительно возрастает предельная длина сонотрода, работающего от одного генератора колебаний.

Список литературы: 1. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Критический анализ некоторых современных моделей физического пространства // Вестник НТУ «ХПИ». –2012.– № 2.– С.31-53. 2. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». –2008.– № 47. – С.92-104. 3. *Heaviside O.* A gravitational and electromagnetic analogy. – Part I.–The Electrician, 31.–1893.–P.281-282. 4. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». –2010. –№ 37. –С.59-68. 5. *Светлицкий В.А., Нарайкин О.С.* Упругие элементы машин. –М.: Машиностроение, 1989.–264 с.

6. Асланян А.Г., Гулин А.В., Кармышов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование – Т.2.–1990.–№ 8.– С.21-30. 7. Григорьев А.Л., Деряченко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків, 2004. – Вип. 2 (9). – С.257-264. 8. Ванін В.А., Григорьев А.А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С.23-37. 9. Григорьев А.А., Деряченко А.И. Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13.–С.39-54. 10. Ванін В.А., Григорьев А.А. Моделирование характеристик устойчивой волны переноса упругопластической деформации в винтовом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 42. – С.22-36. 11. Сенченков И.К. Модальная классификация и проектирование сонотродов для ультразвуковой сварки пластмасс // Акустичний вісник. –1998.– 1, №4.–С.55-64. 12. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля.– М.: Высшая школа, 1964. 13. Ванін В.А., Григорьев А.А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». –2010. – № 69. – С.35-45. 14. Ванін В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 15. Ванін В.А., Григорьев А.А., Деряченко А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 16. Ванін В.А., Григорьев А.А. Квантовая релятивистская механика уединённых экспоненциальных волн переноса деформации кручения по цилиндрическому стержню // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011.– № 42. – С.14-32. 17. Ванін В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». –2009. – № 30.–С.20-30.

Поступила в редколлегию 03.05.2012

УДК 17.27

Р.В. ДАЛЛАКЯН, канд. физ.-мат. наук, ГИУА, Ереван

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ U_α

Доведено теорему, що оцінює ступінь зростання для деяких класів гармонійних функцій, та проаналізовано її наслідки.

Доказана теорема, оцінювальна ступень росту для некоторых классов гармонических функций, и проанализированы её следствия.

Teorema proved that evaluates the degree of growth for some classes of harmonic functions, and analyzed its implications.

Введение. В этой работе доказана одна теорема о росте гармонических функций класса U_α , введенных М. М. Джрбашяном (смотри [1], [2]). В частном случае $\alpha = 0$ эта теорема доказана А. Г. Нафтаевичем. Далее приводятся некоторые следствия этой теоремы.

Ключевые слова: оператор интегро-дифференцирования произвольного порядка в смысле Римана-Лиувилля, ядра типа Коши, Шварца и Пуассона,

α - характеристика мероморфных функций, классы U_α и N_α .

Основные определения. Сначала дадим некоторые предварительные сведения о классах N_α и U_α (смотри [1], гл. IX, [2]), введенные М. М. Джрбашьяном. Заметим, что классы N_α являются естественными обобщениями классов N мероморфных функций, введенных *Р. Неванлинной* [3].

Дробная первообразная Римана-Лиувилля порядка α ($0 < \alpha < +\infty$) функции $f(z)$, заданной в круге $D = \{z; |z| < 1\}$, формально определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(re^{i\theta}) dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tz) dt, \\ z = re^{i\theta} \in D.$$

Производная D^0 – это тождественный оператор, то есть

$$D^0 f(z) = f(z), \quad z \in D,$$

а дробная производная порядка α ($0 < \alpha < \infty$) определяется формулой

$$D^\alpha f(re^{i\theta}) = \frac{\partial^{p-1}}{\partial r^{p-1}} \left\{ D^{-(p-\alpha)} f(re^{i\theta}) \right\}, \quad re^{i\theta} \in D,$$

где $p \geq 1$ – целое число, удовлетворяющее неравенству $p-1 < \alpha \leq p$.

Пусть $f(z)$ – мероморфная в D функция. Для любого значения t ($0 < t < 1$) через $n(t, 0)$ и $n(t, \infty)$ обозначим соответственно число нулей a_v и полюсов b_v , лежащих в круге $|z| \leq t$. Через $n(0, 0)$ и $n(0, \infty)$ обозначим соответственно кратность нуля и полюса функции $f(z)$ в точке $z = 0$. Далее для $-1 < \alpha < +\infty$ определим

$$m_\alpha(\rho; f) = \frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \ln |f(\rho; e^{i\theta})| d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha} f = \begin{cases} D^{-\alpha} f, & \text{если } D^{-\alpha} f \geq 0 \\ 0, & \text{если } D^{-\alpha} f \leq 0, \end{cases}$$

а также

$$N_\alpha(\rho; f) = \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_\nu^\rho \frac{(\rho-t)^\alpha}{t} [n(t, \infty) - n(0, \infty)] dt + \frac{n(0, \infty)}{\Gamma(1+\alpha)} (\ln \rho - k_\alpha),$$

где

$$k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Далее пусть

$$T_\alpha(\rho; f) = m_\alpha(\rho; f) + N_\alpha(\rho; f).$$

Через N_α обозначается множество мероморфных в единичном круге D функций f , для которых при данном α ($-1 < \alpha < +\infty$) выполняется условие

$$T_\alpha(f) = \sup_{0 < r < 1} \{T_\alpha(r; f)\} < +\infty.$$

Класс N_0 совпадает с классом N Р. Неванлинны.

Для любого значения параметра α ($-1 < \alpha < +\infty$) введем в рассмотрение следующие ядра типа Коши, Шварца и Пуассона:

$$C_\alpha(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}, \quad z \in D,$$

$$S_\alpha(z) = 2C_\alpha(z) - C_\alpha(0) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad z \in D,$$

$$P_\alpha(\varphi; r) = \operatorname{Re} S_\alpha(re^{i\varphi}) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad re^{i\varphi} \in D.$$

При этом для любого значения параметра α ($-1 < \alpha < +\infty$) и для любого $re^{i\varphi} \in D$ имеют место следующие равенства:

$$C_0(re^{i\varphi}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} C_\alpha(re^{i\varphi}), \quad C_\alpha(re^{i\varphi}) = r^\alpha D^\alpha C_0(re^{i\varphi}),$$

$$S_0(re^{i\varphi}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} S_\alpha(re^{i\varphi}), \quad S_\alpha(re^{i\varphi}) = r^\alpha D^\alpha S_0(re^{i\varphi}),$$

$$P_0(\varphi; r) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} P_\alpha(\varphi; r), \quad P_\alpha(\varphi; r) = r^\alpha D^\alpha P_0(\varphi; r).$$

Обозначим через U_α ($-1 < \alpha < +\infty$) множество гармонических в круге D функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |u_\alpha(re^{i\phi})| d\phi \right\} < +\infty.$$

Известно, что (смотри [1] гл. IX, [2]) класс U_α ($-1 < \alpha < +\infty$) совпадает с множеством гармонических в круге D функций $u(z)$, представленных в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\alpha(\varphi - \theta; r) d\psi(\theta), \quad z = re^{i\varphi} \in D, \quad (\text{A})$$

где $\psi(\theta)$ – вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi; \pi]$. Мера $\psi(\theta)$ в представлении функции $u(z) \in U_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$) может быть найдена посредством следующего аналога формулы обращения Стильбеса:

$$\psi(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^\theta u_\alpha(re^{i\theta}) d\theta \text{ для п.в. } \theta \in [-\pi; \pi],$$

где

$$u_\alpha(re^{i\theta}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} u(re^{i\theta}), \quad re^{i\theta} \in D.$$

В этой работе доказано одно утверждение, которое в частном случае $\alpha = 0$ было доказано А. Г. Нафтаевичем [4].

Теорема. Пусть $u(z) \in U_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$). Тогда, если

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\alpha_0}, z \in D} (1 - |z|)^{1+\alpha} |u(z)| = k > 0, \quad (1)$$

то скачок функции $\psi(\theta)$ в точке $\theta = \alpha_0$ не меньше, чем $\frac{k\pi}{\Gamma(1+\alpha)}$, то есть

$$|\psi(\alpha_0 + 0) - \psi(\alpha_0 - 0)| \geq \frac{k\pi}{\Gamma(1+\alpha)}. \quad (2)$$

Если же обозначить

$$\psi(\alpha_0 + 0) - \psi(\alpha_0 - 0) = 2\pi s, \quad (3)$$

то имеет место следующее представление:

$$u(z) = u_1(z) + s\Gamma(1+\alpha) \operatorname{Re} \left\{ \frac{2e^{i(1+\alpha)\alpha_0}}{(e^{i\alpha_0} - z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (4)$$

где функция $u_1(z)$ принадлежит классу U_α и такова, что

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\alpha_0}, z \in D} (1 - |z|)^{1+\alpha} |u_1(z)| = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (1). Тогда существует последовательность $\{\lambda_j\} \equiv \{|\lambda_j| e^{i\alpha_j}\} \subset D$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = e^{i\alpha_0}, \quad |u(\lambda_j)| = \frac{k + \varepsilon_j}{(1 - |\lambda_j|)^{1+\alpha}}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0.$$

Далее, выбрав любую последовательность вещественных чисел $\{\varphi_j\}$ такую, чтобы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0, \quad \alpha_j - \varphi_j < \alpha_0 < \alpha_j + \varphi_j \text{ и } \left| e^{i(\alpha_j \pm \varphi_j)} - \lambda_j \right| \geq \sqrt{1 - |\lambda_j|}, \quad (6)$$

и, воспользовавшись представлением (А) функции $u(z)$, получаем:

$$\frac{k + \varepsilon_j}{(1 - |\lambda_j|)^{1+\alpha}} = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P_\alpha(\alpha; -\theta), |\lambda_j|) d\psi(\theta) \right| \leq |I_1^j| + |I_2^j|, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$I_1^j = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_j - \varphi_j}^{\alpha_j + \varphi_j} \left(P_\alpha(\alpha; -\vartheta), |\lambda_j| \right) d\psi(\vartheta),$$

$$I_2^j = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [\alpha_j - \varphi_j, \alpha_j + \varphi_j]} \left(P_\alpha(\alpha; -\vartheta), |\lambda_j| \right) d\psi(\vartheta).$$

Оценивая эти интегралы по отдельности, очевидно получим

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_j - \varphi_j}^{\alpha_j + \varphi_j} |d\psi(\vartheta)| \sup_{\alpha_j - \varphi_j < \vartheta < \alpha_j + \varphi_j} \left| P_\alpha(\alpha_j - \vartheta, |\lambda_j|) \right|, \quad j = 1, 2, \dots$$

Далее, обозначив вариацию функции $\psi(\vartheta)$ в отрезке $[\alpha_j - \varphi_j, \alpha_j + \varphi_j]$ через V_j и пользуясь одним представлением (смотри выше) ядра типа Пуассона, при любом $j = 1, 2, \dots$ получим

$$\begin{aligned} |I_1^j| &\leq \frac{V_j}{2\pi} \sup_{\alpha_j - \varphi_j < \vartheta < \alpha_j + \varphi_j} \left| P_\alpha(\alpha_j - \vartheta, |\lambda_j|) \right| = \\ &= \frac{V_j}{2\pi} \sup_{\alpha_j - \varphi_j < \vartheta < \alpha_j + \varphi_j} \left| \operatorname{Re} \Gamma(1 + \alpha) \left[\frac{2}{\left(1 - |\lambda_j| e^{i(\alpha_j - \vartheta)}\right)^{1 + \alpha}} - 1 \right] \right| \leq \\ &\leq \frac{V_j}{2\pi} \sup_{\alpha_j - \varphi_j < \vartheta < \alpha_j + \varphi_j} \left\{ \frac{2\Gamma(1 + \alpha)}{\left|1 - |\lambda_j| e^{i(\alpha_j - \vartheta)}\right|^{1 + \alpha}} + \Gamma(1 + \alpha) \right\} \leq \\ &\leq \frac{V_j}{2\pi} \left[\frac{2\Gamma(1 + \alpha)}{\left(1 - |\lambda_j|\right)^{1 + \alpha}} + \Gamma(1 + \alpha) \right] = \frac{V_j}{2\pi} \Gamma(1 + \alpha) \left[\frac{2}{\left(1 - |\lambda_j|\right)^{1 + \alpha}} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующие оценки:

$$\left| I_1^j \right| = \frac{V_j}{2\pi} \Gamma(1 + \alpha) \left[\frac{2}{\left(1 - |\lambda_j|\right)^{1 + \alpha}} + 1 \right], \quad j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Обозначим полную вариацию функции $\psi(\vartheta)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ через V и оценим теперь интегралы $|I_2^j|$, ($j = 1, 2, \dots$):

$$\left| I_2^j \right| \leq \frac{V_j}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [\alpha_j - \varphi_j, \alpha_j + \varphi_j]} |d\psi(\vartheta)| \sup_{\vartheta \notin [\alpha_j - \varphi_j, \alpha_j + \varphi_j]} \left| P_\alpha(\alpha_j - \vartheta, |\lambda_j|) \right| \leq$$

$$\leq \frac{V}{2\pi} \sup_{\vartheta \in [\alpha_j - \phi_j, \vartheta < \alpha_j + \phi_j]} \left| P_\alpha(\alpha_j - \vartheta, |\lambda_j|) \right|.$$

Далее, используя вид вышеупомянутого представления ядра типа Пуассона, при любом $j = 1, 2, \dots$ получим:

$$\begin{aligned} |I_2^j| &\leq \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta \in [\alpha_j - \varphi, \alpha_j + \varphi_j]} \left| \Gamma(1+\alpha) \left[\operatorname{Re} \frac{2}{\left(1 - |\lambda_j| e^{i(\alpha_j - \vartheta)}\right)^{1+\alpha}} \right] \right| = \\ &= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta \in [\alpha_j - \varphi, \alpha_j + \varphi_j]} \left| \Gamma(1+\alpha) \left[\operatorname{Re} \frac{2}{\left(1 - |\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) - i |\lambda_j| \sin(\alpha_j - \vartheta)\right)^{1+\alpha}} - 1 \right] \right| = \\ &= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta \in [\alpha_j - \varphi, \alpha_j + \varphi_j]} \left| \Gamma(1+\alpha) \left[\operatorname{Re} \frac{2(1 - 2|\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) - i |\lambda_j| \sin(\alpha_j - \vartheta))^{1+\alpha}}{\left(1 - |\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) - i |\lambda_j| \sin(\alpha_j - \vartheta)\right)^{1+\alpha}} - 1 \right] \right| = \\ &= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta \in [\alpha_j - \varphi, \alpha_j + \varphi_j]} \left| \Gamma(1+\alpha) \left[\frac{2(1 - 2|\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) + |\lambda_j|^2)^{(1+\alpha)/2}}{\left(1 - |\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) - i |\lambda_j| \sin(\alpha_j - \vartheta)\right)^{1+\alpha}} - 1 \right] \right| = \\ &= \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta \in [\alpha_j - \varphi, \alpha_j + \varphi_j]} \left| \Gamma(1+\alpha) \left[\frac{2}{\left(1 - 2|\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) + |\lambda_j|^2\right)^{(1+\alpha)/2}} - 1 \right] \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $j = 1, 2, \dots$

$$|I_2^j| \leq \frac{V}{2\pi} \sup_{\theta \in [\alpha_j - \varphi, \alpha_j + \varphi_j]} \left| \Gamma(1+\alpha) \frac{2}{\left(1 - 2|\lambda_j| \cos(\alpha_j - \vartheta) + |\lambda_j|^2\right)^{(1+\alpha)/2}} - 1 \right|. \quad (9)$$

Далее, нетрудно видеть, что при любом $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \left| \exp i(\alpha_j \pm \varphi_j) - \lambda_j \right|^2 &= \left| \cos(\alpha_j \pm \varphi_j) + i \sin(\alpha_j \pm \varphi_j) - |\lambda_j| \cos \alpha_j - i |\lambda_j| \sin \alpha_j \right|^2 = \\ &= \cos^2(\alpha_j \pm \varphi_j) - 2|\lambda_j| \cos(\alpha_j \pm \varphi_j) \cos \alpha_j + |\lambda_j|^2 \cos^2 \alpha_j + \\ &\quad + \sin^2(\alpha_j \pm \varphi_j) - 2|\lambda_j| \sin(\alpha_j \pm \varphi_j) \sin \alpha_j + \end{aligned}$$

$$+|\lambda_j|\cos(\alpha_j \pm \varphi_j)\cos\alpha_j + \sin(\alpha_j \pm \varphi_j)\sin\alpha_j + |\lambda_j|^2 = 1 - 2|\lambda_j|\cos\varphi_j + |\lambda|^2.$$

Итак,

$$\left| \exp i(\alpha_j \pm \varphi_j) - \lambda_j \right|^2 = 1 - 2|\lambda_j|\cos\varphi_j + |\lambda_j|^2, \quad j = 1, 2, \dots$$

и, ввиду (6)

$$1 - 2|\lambda_j|\cos\varphi_j + |\lambda_j|^2 \geq 1 - |\lambda_j|, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тем самым, из (9) получаем

$$\left| I_2^j \right| \leq \frac{V\Gamma(1+\alpha)}{2\pi(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Теперь из (7), (8) и (9) следует, что при $j = 1, 2, \dots$

$$\frac{k + \varepsilon_j}{(1-|\lambda_j|)^{1+\alpha}} \leq |I_1^j| + |I_2^j| \leq \frac{V_j\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \left[\frac{2}{(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}} + 1 \right] + \frac{V\Gamma(1+\alpha)}{2\pi(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{k + \varepsilon_j}{(1-|\lambda_j|)^{1+\alpha}} \leq \frac{V_j\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \left[\frac{2}{(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}} + 1 \right] + \frac{V\Gamma(1+\alpha)}{2\pi(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}}$$

или

$$\frac{k + \varepsilon_j}{(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)}} - \frac{V\Gamma(1+\alpha)}{2\pi(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}} \leq \frac{V_j\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \left[\frac{2}{(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}} + 1 \right],$$

и, окончательно,

$$\frac{\pi(k + \varepsilon_j)}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{V(1-|\lambda_j|)^{(1+\alpha)/2}}{2} \leq V_j + \frac{V_j(1-|\lambda_j|)^{1+\alpha}}{2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Однако, $\varepsilon_j \rightarrow 0$ и $|\lambda_j| \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$. Тем самым, при достаточно большом j_0 справедливо неравенство

$$V_j \geq \frac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad j \geq j_0. \quad (10)$$

Далее, поскольку $\psi(\vartheta)$ – это вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi, \pi]$, то ее можно записать в виде разности

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\pi, \pi],$$

где $\psi_1(\vartheta)$ и $\psi_2(\vartheta)$ – монотонно возрастающие, ограниченные функции на $[-\pi, \pi]$. Следовательно, при любом $j = 1, 2, \dots$

$$V_j = V_j(\psi_1) - V_j(\psi_2),$$

где $V_j(\psi_1)$ и $V_j(\psi_2)$ – вариации функций $\psi_1(\vartheta)$ и $\psi_2(\vartheta)$ в отрезке $[\alpha_j - \varphi_j, \alpha_j + \varphi_j]$. Однако, очевидно, что для любого $j = 1, 2, \dots$

$$V_j(\psi_1) = \psi_1(\alpha_j + \varphi_j) - \psi_1(\alpha_j - \varphi_j), \quad V_j(\psi_2) = \psi_2(\alpha_j - \varphi_j) - \psi_2(\alpha_j + \varphi_j).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} V_j &\leq \psi_1(\alpha_j + \varphi_j) - \psi_1(\alpha_j - \varphi_j) + \psi_2(\alpha_j - \varphi_j) - \psi_2(\alpha_j + \varphi_j) = \\ &= \left| \psi_1(\alpha_j + \varphi_j) - \psi_1(\alpha_j - \varphi_j) \right|. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (10), имеем:

$$\left| \psi(\alpha_j + \varphi_j) - \psi(\alpha_j - \varphi_j) \right| \geq \frac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad j \geq j_0.$$

Устремив теперь $j \rightarrow +\infty$ получаем

$$\left| \psi(\alpha_0 + 0) - \psi(\alpha_0 - 0) \right| \geq \frac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)},$$

то есть скачок функции $\psi(\theta)$ в точке α_0 не меньше, чем $\frac{\pi k}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Если же $\psi(\alpha_0 + 0) - \psi(\alpha_0 - 0) = 2\pi s$, то функцию $\psi(\vartheta)$ можем представить в виде суммы $\psi(\vartheta) = \psi_3(\vartheta) + \psi_4(\vartheta)$, где

$$\psi_3(\vartheta) = \begin{cases} \psi(\vartheta), & \text{при } \vartheta < \alpha_0 \\ \psi(\vartheta) - 2\pi s, & \text{при } \vartheta > \alpha_0 \\ \psi(\alpha_0 - 0), & \text{при } \vartheta = \alpha_0, \end{cases}$$

$$\psi_4(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \vartheta < \alpha_0 \\ 2\pi s, & \text{при } \vartheta > \alpha_0 \\ \psi(\alpha_0 - 0), & \text{при } \vartheta = \alpha_0, \end{cases}$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} u(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha}(\varphi - \vartheta, r) d\psi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha}(\varphi - \vartheta, r) d\psi_1(\vartheta) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha}(\varphi - \vartheta, r) d\psi_2(\vartheta) = u_1(re^{i\varphi}) + s\Gamma(1+\alpha) \operatorname{Re} \left[\frac{2}{(1 - re^{i(\varphi - \alpha_0)})^{1+\alpha}} - 1 \right] = \\ &= u_1(re^{i\varphi}) + s\Gamma(1+\alpha) \operatorname{Re} \left[\frac{2e^{i(\alpha+1)\alpha_0}}{(e^{i\alpha_0} - re^{i\varphi})^{1+\alpha}} - 1 \right], \quad re^{i\varphi} \in D, \end{aligned}$$

где

$$u_1(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha}(\phi - \vartheta, r) d\psi_3(\vartheta), \quad re^{i\phi} \in D.$$

Таким образом,

$$u(re^{i\phi}) = u_1(re^{i\phi}) + s\Gamma(1+\alpha) \operatorname{Re} \left[\frac{2e^{i(\alpha+1)\alpha_0}}{(e^{i\alpha_0} - re^{i\phi})^{1+\alpha}} - 1 \right], \quad re^{i\phi} \in D,$$

где функция $u_1(z)$, что очевидно, принадлежит классу U_{α} . Причем, так как функция $\psi_3(\vartheta)$ непрерывна в точке α_0 , то

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow e^{i\alpha_0}, z \in D} (1-|z|)^{1+\alpha} |u_1(z)| = 0.$$

Теорема доказана.

Следствия.

Следствие 1. Если $u(z) \in U_{\alpha} (-1 < \alpha < +\infty)$, то почти всюду на окружности $|z|=1$

$$\lim_{|z| \rightarrow 1-0} (1-|z|)^{1+\alpha} |u(z)| = 0,$$

а если функция $\psi(\vartheta)$ представления (A) непрерывна всюду в $[-\pi, \pi]$ и $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$, то

$$\lim_{|z| \rightarrow 1-0} (1-|z|)^{1+\alpha} |u(z)| = 0.$$

Если функция $F(z)$ аналитична в D , не имеет там нулей, то $F(z)$ принадлежит классу $N_{\alpha} (-1 < \alpha < +\infty)$ (смотри [1], гл. IX, [2]) в том и только том случае, когда $\log|F(z)| \in U_{\alpha}$. Тем самым, мы приходим также к следующему очевидному следствию теоремы.

Следствие 2. Если функция $F(z)$ аналитична в D , не имеет там нулей и $F(z) \in N_{\alpha} (-1 < \alpha < +\infty)$, то

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\alpha_0}, z \in U} (1-|z|)^{1+\alpha} |\ln|F(z)|| = 0, \quad \text{для п. в. } \vartheta \in [-\pi, \pi].$$

Список литературы. 1. Джрбациян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / 1966. – Наука, Москва. 2. Джрбациян М. М., Захарян В. С. Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге / 1993. – Наука, Москва. 3. Nevanlinna R. Eindeutige Analytische Funktionen / 1937. – Springer, Berlin. 4. Нафтаевич А. Г. Об интерполировании функций ограниченного вида // Уч. Зап. Вильнюсского унив. – 1956. – т.5. – С.5-27.

Поступила в редколлегию 27.03.2012

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. преп., НТУ «ХПИ»

ПОЧТИ АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ КАК КОМПАКТНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ

Показано, що по будь-якій майже автоморфній функції, визначеній на групі, можна ввести топологію і будь-яка компактна безперервна в цій топології функція є майже автоморфною; для абстрактних функцій справедлива теорема Віча – майже автоморфність всіх здвижок рівнозначна майже періодичності функції.

В работе показано, что по любой почти автоморфной функции, заданной на группе, можно ввести топологию и любая компактная непрерывная в этой топологии функция является почти автоморфной; для абстрактных функций справедлива теорема Вича - почти автоморфность всех сдвижек равносильна почти периодичности функции.

In the paper is shown that for any almost automorphic function, defined on the group, the topology can be introduced, and any compact continuous function in this topology is almost automorphic function. Veech's theorem, stated that the almost automorphy of all translations is equivalent to almost periodicity of the function, is true for abstract functions as well.

Введение. Определения (по Бохнеру и по Бору) числовых почти автоморфных функций даны В. Вичем [5]. А. Райх [4] и Б. Болес [2] показали, что ограниченные числовые L – почти периодические функции совпадают с непрерывными почти автоморфными функциями. Б. Болес [2] перенес этот результат и на функции со значениями в банаховых пространствах. В. Вич[5] показал, что если числовая функция $f(x)$ почти автоморфна и любая полученная по ней предельная функция почти автоморфна, то она почти периодична. Цель настоящей работы показать, что результаты Вича, Райха и Болеса переносятся на абстрактные функции со значениями в пространствах Фреше. Особенно полезно показать, что почти автоморфные функции являются непрерывными функциями в специальной топологии. Это дает возможность использовать хорошо разработанный аппарат для непрерывных функций. С другой стороны можно исследовать единым образом почти периодические, L – почти периодические и почти автоморфные функции как компактные равномерно непрерывные, как неограниченные непрерывные и как компактные непрерывные функции на группе, соответственно.

Вспомогательные утверждения и определения. Работа является продолжением статьи [3] и в ней использованы основные обозначения и определения из [3]. G – это σ – компактная топологическая группа, Y – сепарабельное пространство Фреше, $f(t)$ – абстрактная функция, отображающая G в Y . Абстрактная функция $f_h(t) = f(th)$ – сдвигка, когда h – элемент

группы, а когда h – последовательность элементов $h = \{h_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty \in G$, то $f_h(t)$ – поточечный предел (если он существует) последовательности $f_h(th_\alpha)$. С каждой функцией $f(x)$ связано множество

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho[f(atb); f(ab)] < \varepsilon \right\},$$

$\rho(\dots)$ – метрика в Y , N – компактное множество в G , $\varepsilon > 0$.

Определение 1. Непрерывная функция f называется почти автоморфной, если из любой последовательности $\{y_\beta\}_{\beta=1}^\infty \in G$ можно извлечь подпоследовательность

$$\{x_\beta\}_{\beta=1}^\infty \quad \text{так, что} \quad \lim_{\beta} f(x_\beta t) = g(t),$$

$$\lim_{\beta} g(x_\beta^{-1} t) = f(t) \quad \text{и} \quad \lim_{\beta} f(tx_\beta) = g(t), \quad \lim_{\beta} g(tx_\beta^{-1}) = f(t), \quad \forall t \in G.$$

Определение 2. Согласно [3] непрерывная функция $f(x): G \rightarrow Y$ называется L – почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $N \subset G$, существует относительно плотное множество $E \subset G$ такое, что

$$E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}, \quad \text{где} \quad B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho[f(atb); f(ab)] < \varepsilon \right\}.$$

Определение 3. Как и в [3] будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$ обладает свойством (A), если: для каждого компактного множества $N \subset G$ и для каждой последовательности $\{x_\beta\}_{\beta=1}^\infty$ из существования предела $\lim_{\beta} f(sx_\beta x_\beta^{-1}t) = g(sx_\beta^{-1}t)$, для любых $s, t \in G$, $\beta = 1, 2, 3, \dots$ следует

существование подпоследовательности $\{y_\beta\}_{\beta=1}^\infty \subset \{x_\beta\}_{\beta=1}^\infty$, для которой $\lim_{\beta} g(sy_\beta^{-1}t) = f(st)$, $\forall s, t \in G$.

Предложение 1. Если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $N \subset G$, существует относительно плотное множество $E \subset G$ такое что $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$, то функция $f(x)$ обладает свойством (A) [3].

Предложение 2. Если функция $f(x)$ обладает свойством (A), то для любого множества $B_{N,f,\varepsilon}$ существуют $\delta > 0$ и компактное множество M такие, что $B_{M,f,\delta}^{-1} \cdot B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$ [3].

Из результатов работы [3] вытекает, что теоремы Б. Болеса [2] и А. Райха [4] о совпадении L – почти периодических и почти автоморфных функ-

ций, верны и для пространств Фреше.

Следствие. *В пространствах Фреше класс компактных L – почти периодических функций совпадает с классом непрерывных почти автоморфных функций.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ компактна. Из произвольной последовательности $\{y_\beta\}_{\beta=1}^\infty \in G$ выбираем подпоследовательность $\{x_\beta\}_{\beta=1}^\infty$ так, чтобы существовали пределы $\lim_{\beta'} f(sx_\beta^{-1}x_{\beta'}t) = g(sx_\beta^{-1}t)$, $\lim_{\beta} g(sx_\beta^{-1}t) = h(st)$.

Так как функция $f(x)$ L – почти периодична, то по предложению 1 следует, что функция обладает свойством (A) , и тогда по определению 3 $h(x) = f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ почти автоморфна.

Обратно, если функция $f(x)$ почти автоморфна, то она обладает свойством (A) и для нее справедливо предложение 2, то есть для любого множества $B_{N,f,\varepsilon}$ существует $\delta > 0$ и компактное множество M , такие, что $B_{M,f,\delta} \cdot B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$, где множество $B_{M,f,\delta}$ относительно плотно. Следовательно, функция $f(x)$ L – почти периодична.

По заданной почти автоморфной функции $f(x)$ на группе G можно ввести топологию \mathfrak{F}_f с помощью относительно плотных множеств $B_{N,f,\varepsilon}$. Пополненная группа является компактной, и её будем далее в работе обозначать через T . Следствие доказано.

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть задана почти автоморфная функция $f(x)$ и по ней введена топология \mathfrak{F}_f на группе G . Любая компактная функция $g(x)$, заданная на группе G и непрерывная в топологии \mathfrak{F}_f , почти автоморфна.*

Доказательство. Топологию \mathfrak{F}_f вводим при помощи окрестностей $B_{N,f,\varepsilon}$. Пусть задана последовательность $\{y_\beta\}_{\beta=1}^\infty \in G$. Из нее выбираем подпоследовательность $\{x_\beta\}_{\beta=1}^\infty$ такую, что существуют пределы

$$\lim_{\beta} g(sx_\beta^{-1}x_{\beta'}t) = h(sx_\beta^{-1}t), \quad \lim_{\beta} h(sx_\beta^{-1}t) = l(st).$$

Выбираем сходящуюся подпоследовательность $\{z_\gamma\}_{\gamma=1}^\infty \subset \{x_\beta\}_{\beta=1}^\infty$ в T .

Из сходимости $\lim_{\gamma', \gamma \rightarrow \infty} z_{\gamma'}^{-1} z_{\gamma} = e$ и непрерывности функции $g(x)$ в топологии \mathfrak{T}_f следует что, $l(st) = \lim_{\gamma', \gamma \rightarrow \infty} g(s z_{\gamma'}^{-1} z_{\gamma} t) = g(st)$. Следовательно, $g(x)$ почти автоморфна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Функция $f(x)$ почти периодична тогда и только тогда, если она почти автоморфна, и для любой сдвижки функция $f_h(t)$ также почти автоморфна.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – почти автоморфная функция и любая функция $f_h(t)$ также почти автоморфна. Возьмем $y^* \in Y^*$, тогда числовые функции, $\langle y^*, f(t) \rangle$, $\langle y^*, f_h(t) \rangle$, $y^* \in Y^*$ удовлетворяют условиям теоремы В. Вича ([5] теорема 3.3.1) и значит, почти периодичны. Поскольку $f(x)$ слабо почти периодична, то она равномерно слабо непрерывна в топологии \mathfrak{T}_f . Любая компактная слабо непрерывная функция сильно непрерывна. Таким образом, функция $f(x)$ L – почти периодична. Так как функция $f(x)$ компактна и равномерно слабо непрерывна, то ее можно доопределить на компактной группе T . Любая компактная слабо непрерывная функция сильно непрерывна на T и значит, является сильно почти периодической функцией.

Обратно, из почти периодичности тривиально следует почти автоморфность. Это верно и для предельных функций. Таким образом, они почти автоморфны.

Выводы. Полученные результаты показывают, что абстрактные почти автоморфные функции – это компактные L – почти периодические функции и это функции, которые компактны и непрерывны в подходящей топологии, в которой окрестности относительно плотные множества. Дана характеристика почти периодических функций: в классе почти автоморфных функций – почти автоморфная функция почти периодична тогда и только тогда, если все ее сдвиги – почти автоморфные функции.

Список литературы: 1. Левин Б.Я. О почти периодических функциях Левитана// УМЖ. Т.1, № 1. 1949, С. 49-101. 2. Болес Басит Р., Некоторые задачи теории почти - периодических функций // Канд. дис., МГУ, 1971. 3. Димитрова-Бурлаенко С.Д., Представление L – почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе. Вісник національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – №68. – С. 65-75. 4. Reich A. Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität//Math. Z.,116, p.216-234. 5. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups// Amer. J. Math., 87, №3, 1965, p.719-751.

Поступила в редколлегию 25.05.2012

А.Г. КОШОВИЙ, ст. викл., НАУ «ХАІ», Харків;

Г.І. КОШОВИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НАУ «ХАІ» Харків

ДЕКАРТОВІ ДОБУТКИ ОДНОВИМІРНИХ ФРАКТАЛІВ: ФРАКТАЛЬНІ МЕРЕЖІ НА ПЛОЩИНІ

Досліджуються декартові квадрати та добутки ніде не щільних досконалих множин на прямій. Доведено, що ці декартові добутки являються фрактальними множинами в площині. Детально проаналізовані три класи фрактальних мереж у площині та проведено їх узагальнення. Виявлені можливості насичення чи розрідження мереж за допомогою зміни фрактальної розмірності.

Проводиться исследование декартовых квадратов и произведений нигде не плотных совершенных множеств на прямой. Доказано, что эти декартовы произведения являются фрактальными множествами на плоскости. Детально проанализированы три класса фрактальных сетей на плоскости и проведено их обобщение. Обнаружены возможности насыщения или разрежения сетей с помощью изменения фрактальной размерности.

Cartesian squares and products of nowhere dense perfect sets in line are studied. Has been proved that these products are the fractal sets in the plane. Three classes of fractal networks in the plane and their generalizations have been analyzed in details. The possibilities of saturation or rarefaction for networks by changing the fractal dimension are found.

Вступ. Для спостереження за станом складного об'єкту (літака, турбіни, нафтопроводу, мосту тощо) використовують мережі вбудованих датчиків. Вони забезпечують інформацією про стан конструкції об'єкта, про режим роботи окремих вузлів і тому подібне. Це може бути більш досконалим і менш затратним, коли мережа матиме дофрактальну структуру. Впорядкованість мережі у відповідності до певної стадії побудови самоподібного фракталу на площині є найбільш природною[1]. Зрозуміло, що при цьому мають бути відповідні класи двовимірних фрактальних множин (ФМ), які відображають, зокрема, конструкцію всього об'єкта та певних його частин.

В даній роботі проводиться дослідження кількох класів ФМ на площині. За основу їх творення беруться класи ФМ на прямій та їх системний аналіз [2,3]. При цьому використовуються декартові квадрати та добутки одновимірних ФМ. Зрозуміло, що ФМ на площині є ідеальним математичним об'єктом, але стадії її побудови, які можна назвати *дофрактальними множинами*, є реальними. Як раз вони і можуть вказувати на математичний закон розташування датчиків в мережі. Відповідно такі мережі доречно називати дофрактальними.

Найпростішим двовимірним фракталом є пил Кантора[4]. Він є декартовим квадратом ніде не щільної досконалої множини (НЩДМ) на сегменті, яку називають дисконтинуумом Кантора[1]. Використовуючи узагальнення цієї НЩДМ, що приводить до НЩДМ чи ФМ зі змінною розмірністю Хаусдорфа, перейдемо до дослідження їх декартових квадратів.

Декартові квадрати НЩДМ. Почнемо з найпростішого класу НЩДМ на прямій, розмірність Хаусдорфа для яких визначається виразом $\ln 2 : \ln \kappa$, де κ – коефіцієнт самоподібності [3]. Класична НЩДМ (*дисконтинуум Кантора*) є частинним випадком з $\kappa = 3$. У загальному випадку κ є дійсним числом, більшим за 2. Оскільки утворювач кожної множини даного класу

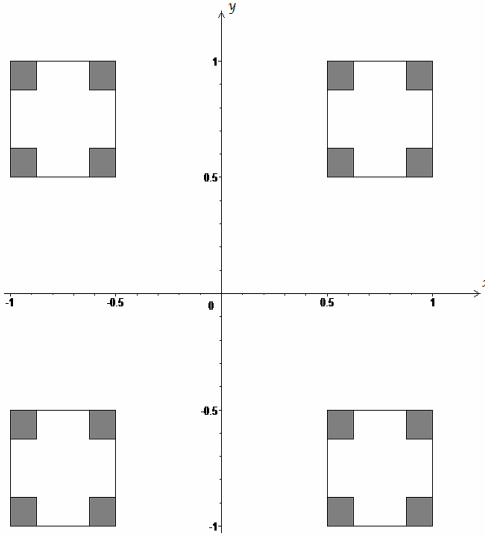


Рисунок 1 – Дві стадії побудови $C_2^2(4)$.

складається з двох сегментів, то позначимо їх $C_2(\kappa)$. Щоб розібратись в деталях з декартовим добутком

$$C_2^2(\kappa) = C_2(\kappa) \times C_2(\kappa),$$

взьмемо у якості її носія декартовий квадрат сегмента $[-1, 1]$. Далі побудуємо декартовий квадрат утворювача $C_2(4)$, що відповідає чотирьом великим квадратам, зображеним на рис.1. Друга стадія, що відповідає зменшенню лінійних розмірів і заміщенням, зображена шістьнадцятьма маленькими квадратами. Для стадії побудови з номером n маємо 4^n елементів (квадратів), які зменшені, у порівнянні з носієм у κ^{2n} разів за площею. Якщо спробу-

вати знайти площу $C_2^2(\kappa)$, то маємо границю послідовності $(4 : \kappa^2)^n$. За рахунок того, що $\kappa > 2$, маємо

$$S(C_2^2(\kappa)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\kappa} \right)^{2n} = 0.$$

Більш того, оскільки $C_2(\kappa)$ не може містити в собі жодного інтервалу, то теж саме можна казати і про $C_2^2(\kappa)$. Отже, топологічна розмірність $C_2^2(\kappa)$, як і $C_2(\kappa)$, є нульовою. Ось чому $C^2(3)$ називають *двовимірним пилом Кантора*.

Розрахуємо розмірність Хаусдорфа (PX чи dH). Для цього повернемося до стадії побудови за номером n , що складається з 4^n квадратів зі стороною $2 : \kappa^n$. Їх діаметр (він є діагональною) буде $\delta_n = 2\sqrt{2} : \kappa^n$. Для визна-

чення s -міри Хаусдорфа маємо досліджувати границю послідовності

$$4^n \cdot \delta_n^s = \left(\frac{4}{\kappa^s} \right)^n \cdot 2 \cdot 2^{\frac{3s}{2}}.$$

Те значення параметра s , при якому здійснюється перехід від нескінченності до нуля, і є розмірністю Хаусдорфа. Очевидно, що критичне значення знаходиться з рівності $4 = \kappa^{s_0}$ натуральним логарифмуванням. Отже, $s_0 = dH = \ln 4 : \ln \kappa = 2 \ln 2 : \ln \kappa$. Якщо порівняти цей вираз зі значенням PX для $C_2(\kappa)$, то отримаємо наступне співвідношення:

$$dH(C_2^2) = 2dH(C_2). \quad (1)$$

Зрозуміло, що воно є природним для розмірностей, але зовсім не елементарним. Це ми побачимо при дослідженні декартових добутків для різних представників навіть одного класу ФМ.

В залежності від коефіцієнта самоподібності дофрактальна мережа може бути і надзвичайно розрідженою і досить наповненою. Її наповненість можна також збільшувати, обираючи інший клас ФМ. Покажемо це на прикладі наступного класу НЩДМ, який позначимо $C_3(\kappa)$. Тут у якості утворювача буде три сегменти з однаковою відстанню між ними. Цей клас, як і попередній, був детально досліджений на рівні системного аналізу [3]. Зокрема була розроблена структурна схема процесу побудови довільного представника цього класу ФМ. Вона відіграла провідну роль при створенні математичних моделей взаємодії плоско поляризованої електромагнітної хвилі з дофрактальною системою стрічок. Ця структурна схема є важливою і для дослідження фрактальних мереж на площині.

Дослідження фрактальної мережі $C_3^2(\kappa)$ почнемо з першої стадії його побудови – дофрактала першої генерації. Використовуючи попередній носій для $C_3^2(\kappa)$ отримаємо систему квадратів, що налічує дев'ять елементів. Четверта частина цієї дофрактальної мережі для $\kappa = 5$ зображена на рис.2.

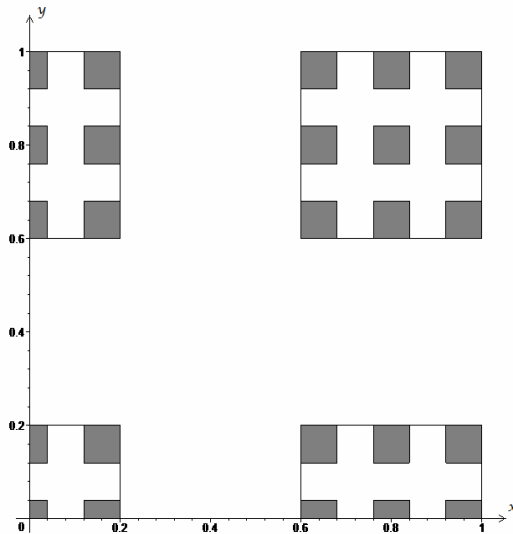


Рисунок 2 – Четверть перших двох стадій $C_3^2(5)$.

На повному квадраті першої стадії зображено дев'ять квадратів другої генерації. Всього їх буде $81 = 9^2$. Для генерації з номером n кількість квадратів буде 9^n . Їх діаметри (те ж саме, діагоналі) зменшилися у порівнянні з носієм у κ^n разів. Тобто, для РХ маємо наступний вираз $dH = \ln 9 : \ln \kappa$. Якщо $\kappa = 5$, тобто розміри сегмента утворювача $C_3(5)$ однакові зі щілинами між ними, маємо

$$dH(C_3^2(5)) = 2dH(C_3(5)) = 2 \ln 3 : \ln 5.$$

Взагалі, для декартових квадратів ФМ будь-якого класу має місце співвідношення (1). При навіть поверхневому порівнянні рис.1 з рис.2 очевидна більша насиченість мережі $C_3^2(\kappa)$. Коли взяти ще більшим нижній індекс, то отримаємо ще більшу насиченість. Зрозуміло, що насиченість мережі суттєво залежить від κ .

Отже, структура дофрактальної мережі $C_n^2(\kappa)$, що являє собою певну стадію побудови декартового добутку НЦДМ на сегменті $[-1, 1]$, складається з блоків по n^2 квадратів. Відстань між елементами кожного блоку окремо і відстань між блоками визначається коефіцієнтом подібності ФМ. Параметри n ($n \in \mathbb{N}$) та κ повністю визначають РХ певного класу фрактальних мереж:

$$dH(C_n^2(\kappa)) = 2dH(C_n(\kappa)) = 2 \ln n : \ln \kappa.$$

При цьому $\kappa > n$: сегменти утворювача $C_n(\kappa)$ мають бути відокремленими хоч і досить маленькими щілинами. Слід також зазначити, що κ є дійсним числом на відміну від натурального n .

Окрім декартових добутків $C_n(\kappa)$ самих з собою можна утворювати добутки $C_n(\kappa_1) \times C_n(\kappa_2)$, $C_n(\kappa) \times C_m(\kappa)$ та $C_n(\kappa_1) \times C_m(\kappa_2)$. Це значно розширює поняття фрактальної мережі. Проведемо дослідження по одному з наведених вище трьох

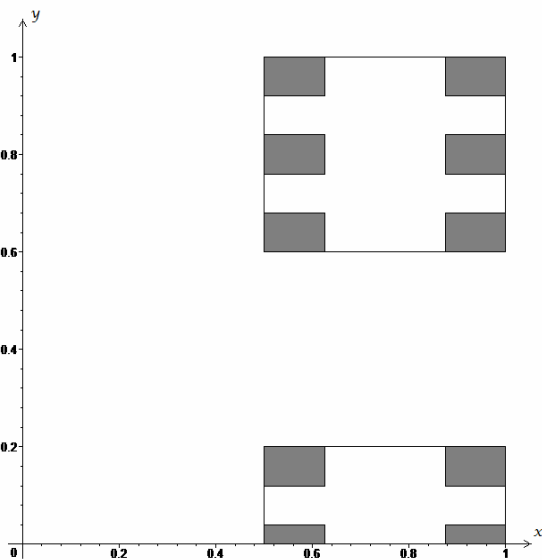


Рисунок 3 – Чверть двох перших генерацій $C_2(4) \times C_3(5)$.

класів декартових добутків.

Декартові добутки НЩДМ. Почнемо з декартового добутку $C_2(3) \times C_2(4)$. Подібно до декартових квадратів у якості носія беремо $[-1,1]^2$. На n -тому кроці побудови отримуємо 4^n прямокутників зі сторонами $2/3^n$ та $2/4^n$. Їх діаметри (діагоналі) визначаються

$$2\sqrt{\frac{1}{9^n} + \frac{1}{16^n}} = \frac{2}{3^n} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}} = \delta_n$$

Мінімальне покриття $C_2(3) \times C_2(4)$ з цим значенням δ_n налічує 4^n кругів. Для обчислення s -міри Хаусдорфа слід досліджувати границю послідовності

$$4^n \delta_n^s = \left(4/3^s\right)^n 2^s \left(1 + (3/4)^{2n}\right)^{s/2}.$$

Те значення параметра s при якому здійснюється перехід від нескінченності до нуля для s -міри і є розмірністю Хаусдорфа. Очевидно, $dH = \ln 4 / \ln 3$. Таким чином,

$$dH(C_2(3) \times C_2(4)) = 2dH(C_2(3)) \neq dH(C_2(3)) + dH(C_2(4)).$$

У загальному випадку, якщо $\kappa_1 < \kappa_2$, то маємо

$$dH(C_n(\kappa_1) \times C_n(\kappa_2)) = 2dH(C_n(\kappa_1)).$$

Наступним декартовим добутком буде $C_2(\kappa_1) \times C_3(\kappa_2)$. Розмірковування подібні до попередніх приводять до картини, четверта частина якої наведена на рис.3. Тут зображена чверть декартового добутку другої генерації $C_2(3) \times C_3(5)$. Маємо представників різних класів з різними коефіцієнтами самоподібності. Це найбільш загальний випадок декартового добутку. Для n -тої стадії побудови фрактальної мережі буде 6^n елементів. Покриття з

$$\delta_n = \sqrt{1/3^n + 1/5^n} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} (1/3^n) \sqrt{1 + (3/5)^n}$$

приводить до наступного виразу s -міри Хаусдорфа:

$$H^s = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\delta_n}^s = \lim_{n \rightarrow \infty} 6^n \cdot \frac{1}{(3^s)^n} \left(2 \left(1 + (3/5)^n\right)\right)^{s/2}.$$

Звідси отримаємо вираз для розмірності Хаусдорфа

$$dH = \log_3 6 = 1 + \log_3 2.$$

Цей вираз виникає перетворенням співвідношення $6 = 3^{dH}$ за допомогою логарифмування за основою 3. Очевидно,

$$dH(C_2(3) \times C_3(5)) \neq dH(C_2(3)) + dH(C_3(5)).$$

При узагальненні на довільні коефіцієнти подібності виникає наступний

вираз для РХ:

$$dH(C_2(\kappa_1) \times C_3(\kappa_2)) = \log_{\min(\kappa_1, \kappa_2)} 6.$$

Відповідно в ще більш загальному випадку

$$dH(C_n(\kappa_1) \times C_m(\kappa_2)) = \log_{\min(\kappa_1, \kappa_2)} n \cdot m.$$

І, нарешті, частинний випадок евклідового добутку $C_n(\kappa) \times C_m(\kappa)$ розберемо на прикладі параметрів $n = 2$, $m = 3$, $\kappa = 5$. Але перед цим слід зазначити, що $\kappa > \max(n, m)$, та сегменти утворювача мають бути відокремленими. З огляду на рис.3., де приведена чверть перших двох стадій побудови евклідового добутку $C_2(5) \times C_3(5)$, для покриття фрактальної мережі з $\delta_n = \sqrt{2}/5^n$ маємо 6^n елементів. Тому, дослідження s -міри Хаусдорфа приводить до границі послідовності $(6/5^5)^s \sqrt{2}^s$. Звідси маємо рівність $6 = 5^n$.

Або логарифмуючи її за основою 5 перейдемо до формули

$$dH(C_2(5) \times C_3(5)) = \log_5 6.$$

Узагальнюючи на довільні n та m і $\kappa > \max(n, m)$ отримаємо наступний вираз:

$$dH(C_n(\kappa) \times C_m(\kappa)) = \log_\kappa n \cdot m = \log_\kappa n + \log_\kappa m.$$

Тобто,

$$dH(C_n(\kappa) \times C_m(\kappa)) = dH(C_n(\kappa)) + dH(C_m(\kappa))$$

і маємо властивість розмірності евклідового квадрата.

Висновки. Проведений детальний математичний аналіз декартових квадратів та добутків трьох класів одновимірних фрактальних множин зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Доведена, зокрема, фрактальність отриманих двовимірних множин на основі розрахунку розмірностей Хаусдорфа. Встановлені певні зв'язки між розмірностями декартових добутків та відповідних одновимірних фрактальних множин. Проведено узагальнення розглянутих детально трьох класів площинних самоподібних фракталів. Виявлені можливості насичення чи розрідження дофрактальних мереж за допомогою зміни розмірності.

Список літератури: 1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, – 2002, – 656с. 2. *Кошовий Г.І.* Системний підхід до дослідження дофрактальних дифракційних ґраток. //Радіофізика та електроніка, – 2011, Том 2(16), – №1. – С.3-10. 3. *Кошовий Г.І., Кошовий А.Г.* Одновимірні самоподібні фрактали та їх використання у моделюванні. //Вісник Національного політехнічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», – 2011. – Вип. №42. – С. 82-89. 4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001, – 528с.

Надійшла до редакції 03.04.2012

Л.В. КУРПА, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;

Г.Н. ТИМЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;

Н.А. БУДНИКОВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

ВЫНУЖДЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НЕСИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

Запропоновано метод дослідження динамічної поведінки багат шарових пологих оболонок несиметричної структури, що знаходяться під дією поперечного навантаження. Новий метод базується на застосуванні теорії R-функцій, методів Рітца і Бубнова-Галёркіна. Особливістю даного підходу є метод дискретизації переміщень за часом. Для математичної постановки задачі використана класична геометрично нелінійна теорія. Виконана чисельна реалізація розробленого алгоритму в системі POLE-RL, побудовані резонансні криві для вимушених коливань двох шарових ортогонально-армованих оболонок складної форми.

Предложен метод исследования динамического поведения многослойных пологих оболочек несимметричной структуры, находящихся под действием поперечной нагрузки. Новый метод базируется на применении теории R-функций, методов Ритца и Бубнова-Галёркина. Особенностью данного подхода является метод дискретизации перемещений по времени. Для математической постановки задачи использована классическая геометрически нелинейная теории. Выполнена численная реализация разработанного алгоритма в системе POLE-RL, построены резонансные кривые для вынужденных колебаний двухслойных ортогонально-армированных оболочек сложной формы.

The method for studying the dynamic behavior of the unsymmetrical laminated shallow shells under the transverse load is proposed. New method is based on the R-functions theory, Ritz and Bubnov-Galerkin method. A feature of this approach is the method of discretization of the displacements in time. Formulation is carried out in the classical geometrically nonlinear theory. The numerical implementation of the developed algorithm is fulfilled in the framework POLE-RL, the resonance curves are constructed for the forced vibrations of two-layered cross-ply shells of the complex shape.

Введение. Исследование динамического поведения композитных многослойных пологих оболочек со сложной формой плана и различными способами закрепления краёв является одной из актуальных проблем нелинейной динамики. В общем случае эта задача может быть решена только с помощью приближенных методов, к числу которых относится метод конечных элементов (МКЭ), как один из наиболее применяемых и универсальных методов.

В работах [1,2] был предложен альтернативный МКЭ численно-аналитический метод, существенным образом использующий теорию R-функций. Этот метод был разработан для исследования свободных геометрически нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек симметричного строения. В настоящей работе метод обобщен для решения задач о вынужденных колебаниях многослойных оболочек несимметричного строения. В этом случае выражения для усилий и моментов существенно усложняются и имеют вид:

$$\begin{aligned}\{N\} &= \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = [C] \cdot \{\varepsilon\} + [K] \cdot \{\chi\}, \\ \{M\} &= \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = [K] \cdot \{\varepsilon\} + [D] \cdot \{\chi\}.\end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}[C] &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{12}\}^T, \{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \chi_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Заметим, что для оболочек несимметричного строения матрица K не является нулевой.

Постановка задачи. В рамках классической теории рассматривается задача о вынужденных геометрически нелинейных колебаниях композитной оболочки постоянной толщины h , находящейся под действием поперечной периодической нагрузки $F(t) = P_0 \cos \Omega t$. В соответствии с этой теорией, уравнения движения многослойной полой оболочки представляются в виде [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} + \\ + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F(t) + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями.

Метод решения задачи. Следуя предложенному в работах [1,2] алгоритму, в случае многомодовой аппроксимации, неизвестные компоненты вектора перемещений u, v, w будем раскладывать в ряды по собственным функциям. Для оболочек несимметричного строения они представляются в виде:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) u_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) y_j(t) u_{ij}(x, y), \\ v(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) v_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) y_j(t) v_{ij}(x, y), \\ w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) w_i^{(c)}(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $u_i^{(c)}(x, y)$, $v_i^{(c)}(x, y)$, $w_i^{(c)}(x, y)$ – собственные функции, которые находятся в ходе решения соответствующей линейной задачи о свободных колебаниях композитной оболочки с учетом сил инерции в плоскости [4]. Функции $u_{ij}(x, y)$ и $v_{ij}(x, y)$ являются решениями последовательности задач, математическая постановка которых сводится к системам уравнений типа Ламе с правой частью, зависящей от собственных функций. Решение вспомогательных задач осуществляется с помощью *вариационно-структурного метода* (RFM). При решении нелинейной задачи будем пренебрегать силами инерции в плоскости оболочки. Согласно такому представлению перемещений, первые два уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно. Применяя *процедуру Бубнова-Галёркина* к третьему уравнению системы (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned} y_s''(t) + \omega_{L_s}^2 y_s(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{(s)} y_i(t) y_j(t) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk}^{(s)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) = \tilde{F}_s(t), \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражения для коэффициентов этой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(s)} &= \frac{-1}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 M_{11}^{(N)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(N)}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(N)}}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(N_{11}^{(L)} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(L)} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} + 2 N_{12}^{(L)} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} \right) - k_1 N_{11}^{(N)} - k_2 N_{22}^{(N)} \right] w_s^{(c)} d\Omega, \\ \gamma_{ijk}^{(s)} &= -\frac{1}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(N)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(N)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial y^2} + 2 N_{12}^{(N)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x \partial y} \right] w_s^{(c)} d\Omega, \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_s(t) = P_s \cos \Omega t, \quad \text{где } P_s = \frac{P_0}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_s^{(c)} d\Omega,$$

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \{ \varepsilon^{(L)} \} + [K] \{ \chi \},$$

$$\begin{aligned}
N^{(N)} &= \{N_{11}^{(N)}; N_{22}^{(N)}; N_{12}^{(N)}\}^T = [C] \{ \mathcal{E}^{(N)} \}, \\
M^{(N)} &= \{M_{11}^{(N)}; M_{22}^{(N)}; M_{12}^{(N)}\}^T = [K] \{ \mathcal{E}^{(N)} \}, \\
\{ \mathcal{E}^{(L)} \} &= \left\{ \frac{\partial u_i^{(c)}}{\partial x} + k_1 w_i^{(c)}; \frac{\partial v_i^{(c)}}{\partial y} + k_2 w_i^{(c)}; \left(\frac{\partial u_i^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial v_i^{(c)}}{\partial x} \right) \right\}^T, \\
\{ \mathcal{E}^{(N)} \} &= \left\{ \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x}; \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial y}; \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial y} \right\}^T, \\
\{ \mathcal{X} \} &= \{ \chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12} \}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w_i^{(c)}}{\partial x^2}; -\frac{\partial^2 w_i^{(c)}}{\partial y^2}; -2 \frac{\partial^2 w_i^{(c)}}{\partial x \partial y} \right\}^T.
\end{aligned}$$

Для решения системы (3) с заданными начальными условиями могут быть использованы различные приближенные методы. Если ограничиться одномерной аппроксимацией, система (3) сводится к одному уравнению:

$$y''(t) + \omega_L^2 y(t) + \beta y^2(t) + \gamma y^3(t) = \bar{F}(t). \quad (4)$$

Начальные условия были приняты в виде:

$$w|_{t=0} = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты β и γ получены из соотношений для $\beta_{ij}^{(s)}$ и $\gamma_{ijk}^{(s)}$ при $i = j = k = 1$. В этом простейшем случае, применяя процедуру Бубнова-Галёркина, зависимость отношения $\nu = \Omega / \omega_L$ от амплитуды $A = w_{\max} / h$ колебаний оболочки может быть определена по формуле [5]:

$$(\Omega / \omega_L)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2 \pm \frac{R_1}{A}. \quad (6)$$

Численные результаты. Численная реализация предложенного подхода выполнена в рамках системы POLE-RL. Для проверки достоверности разработанного программного обеспечения было выполнено сравнение полученных результатов с известными в литературе для свободно опертой однослойной полой оболочки, опирающейся на прямоугольный план [5]. Максимальное отличие полученных результатов от результатов работы [5] не превосходит 3%.

Для иллюстрации возможностей предложенного метода рассмотрим двухслойную ортогонально-армированную оболочку, ($0^\circ/90^\circ$), изготовленную из стеклопластика ($E_1/E_2 = 3$, $G_{1,2}/E_2 = 0.5$, $\nu_1 = 0.25$). Геометрические характеристики следующие: $b/a = 1$, $h/a = 0.01$, $d = R = 0.2a$. Форма оболочки представлена на рис. 1. Предполагается, что граничные условия

моделируют условия неподвижного шарнира:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (7)$$

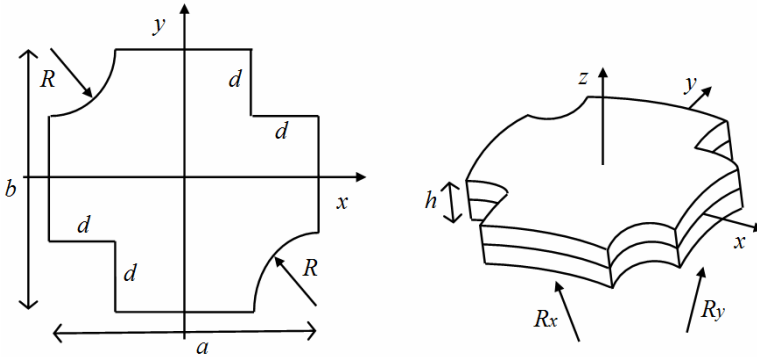


Рисунок 1 – Геометрия оболочки.

Структура решения для данной задачи, удовлетворяющая всем граничным условиям, имеет вид:

$$u = \omega \Phi_1, \quad v = \omega \Phi_2, \\ w = \omega \Phi_3 - \frac{\omega^2 A_1}{2(A_1^2 + \omega^2)} \left[A_1(2D_1\Phi_3 + \Phi_3 D_2\omega) + 2A_2 T_1 \Phi_3 - \frac{1}{\rho} A_3 \Phi_3 \right].$$

Выражения для A_i , $i = \overline{1,3}$ имеют такой же вид, как и в [4], дифференциальные операторы D_1 , D_2 и T_1 подробно описаны в монографии В. Л. Рвачева [6].

Здесь $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное [6] уравнение границы области, Φ_1, Φ_2, Φ_3 – неопределенные компоненты структуры решения. Построение границы области выполнено с помощью RFM.

Неопределенные компоненты в структурных формулах были аппроксимированы степенными полиномами до 7 степени для u и v , и до 8 степени для w . Это соответствует 36 координатным функциям для u и v , и 45 координатным функциям для w . Вычисление интегралов для матрицы Рунца выполнено с помощью 8-точечных квадратурных формул Гаусса, обобщенных на двумерный случай.

Первые три формы колебаний и соответствующие им линейные частоты $\Omega_i = \frac{\omega_{Li} a^2}{h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_2}}$ двухслойной сферической свободно опертой оболочки представлены на рис. 2.

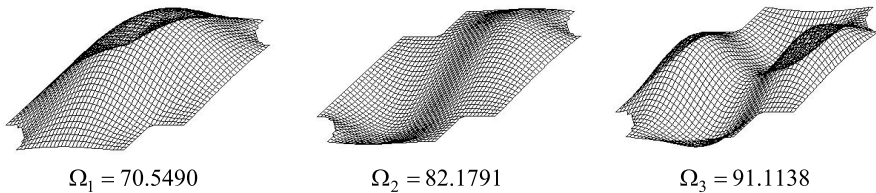


Рисунок 2 – Формы и линейные частоты колебаний оболочки.

Резонансные кривые для свободных и вынужденных колебаний пластин, цилиндрических, сферических оболочек, а также оболочек с поверхностью гиперболического параболоида представлены на рис. 3. При этом поперечная нагрузка была выбрана в виде $\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t$.

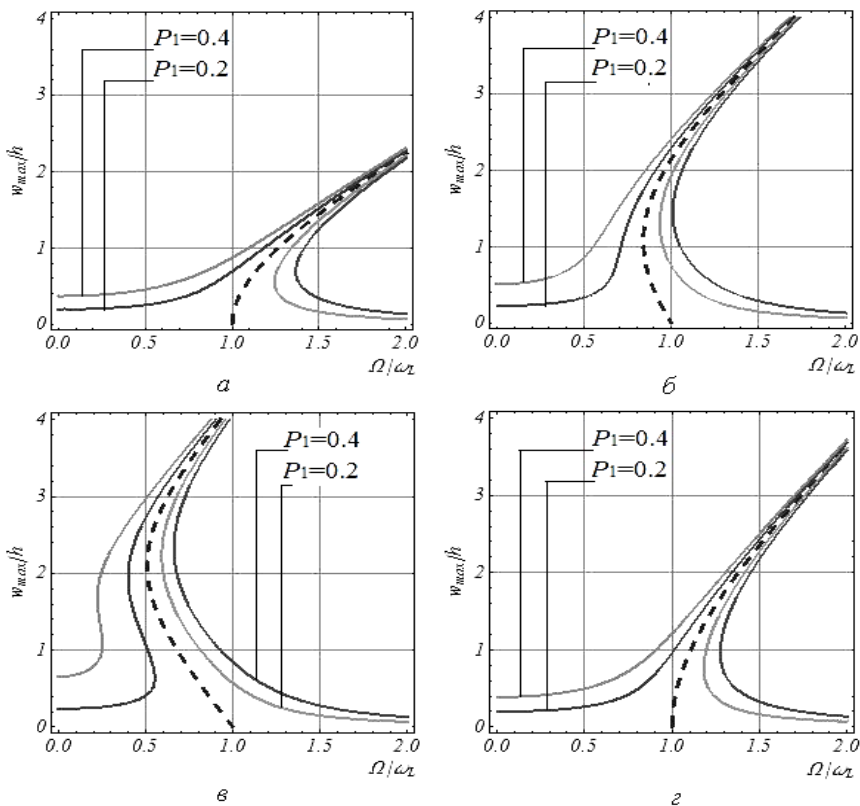


Рисунок 3 – Резонансные кривые колебаний двухслойной оболочки:

- а) $R_x = R_y = \infty$ (пластина); б) $R_x = \infty, R_y/a = 10$;
- в) $R_x/a = 10, R_x/R_y = 1$; г) $R_x/a = 10, R_x/R_y = -1$.

Как видно из рис. 3, скелетные кривые для цилиндрических и сферических оболочек имеют мягкий тип. При этом, чем больше нагрузка, тем резонансные кривые более удалены от соответствующей скелетной кривой.

Выводы. В статье предложен алгоритм исследования вынужденных колебаний многослойных пологих оболочек сложной формы в плане. Постановка задачи рассмотрена в рамках классической геометрически нелинейной теории многослойных пологих оболочек. С помощью предложенного подхода построены резонансные кривые для свободных и вынужденных колебаний многослойных пологих оболочек со сложной формой плана. Достоверность предложенного алгоритма подтверждена сравнением результатов, полученных в случае однослойных пологих оболочек прямоугольной формы с результатами, приведенными в литературе.

Список литературы: 1. *Курпа Л.В., Будніков М.А.* Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – 51, №2. – С. 75-85. 2. *Курпа Л.В.* Дослідження нелінійних вимушених коливань багатослойних пластин складної форми // Вісник НТУ «ХПІ», 13'2011. – с. 124–133. 3. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с. 4. *Курпа Л.В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Х.: НТУ «ХПІ», 2009. – 408 с. 5. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 6. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

Поступила в редколлегию 8.05.2012

УДК 519.2: 621.9.

Н.Ю. ЛАМНАУЭР, канд. техн. наук, доц., УИПА, Харьков

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ИЗДЕЛИЙ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ

Запропонована одномодальна чотирьохпараметрична модель розподілу розмірів виробів. Для цієї моделі одержані оцінки параметрів. Користуючись цією моделлю, розглянуто аналіз точності обробки виробів.

Предложена одномодальная четырёхпараметрическая модель распределения размеров изделий. Для этой модели получены оценки параметров. С использованием этой модели рассмотрен анализ точности обработки изделий.

The single-modal four-parameter model of the distribution of the sizes of articles is proposed. The estimations of the parameters are obtained for this model. With the use of this model the accuracy analysis of working articles is examined.

Вступление. В современных условиях развития машиностроения большое внимание уделяется достижению высокой точности обработки изделий. Это вполне оправдано, так как точность непосредственно связана с повышением качества изготовления как отдельных деталей, так машин в целом. Обеспечить точность обработки изделий можно только в том случае, когда технологический процесс будет глубоко изучен как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения. В процессе изготовления деталей машин их качество и, в частности, точность воспроизведения размеров зависят от большого числа технологических факторов, влияющих в различной степени на точность обработки. Зависимости эти носят вероятностный характер.

Анализ последних исследований. Профессор А. А. Маталин [1] для различных квалитетов точности определяет законы распределения размеров изготовленных изделий. Так, при точности 8, 9 и 10-го квалитетов и грубее имеем *нормальный закон распределения размеров* изделий. Для обработки заготовок 7 и 8-го и в некоторых случаях 6-го квалитетов распределение размеров подчиняется *закону Симпсона*, а для квалитетов точности 5-й, 6-й и выше – *равномерный закон*. Заметим, что все эти законы симметричны относительно своего математического ожидания и для нормального закона и закона Симпсона мода совпадает с математическим ожиданием, а у равномерного закона, как известно, мода равняется 0.

Массовые обмеры изготавливаемых валов колёсных пар [2] показали, что посадочный размер вала имеет асимметричное распределение с модой, отличающейся от среднего значения. Существующие методики [3] настройки станка на нужный размер предполагают производить настройку на среднее, а не на модальное значение размера, что может привести к увеличению возможного брака, вместо его уменьшения.

Постановка задачи. Нормальный закон для решаемой задачи физически неадекватен, поскольку не имеет верхнего и нижнего порога размеров и симметричен. Равномерный закон на своих пороговых значениях имеет разрыв, который физически нельзя объяснить. Поэтому возникла проблема создания адекватной модели, близкой к *моделям Маталина*, имеющей различную форму одномодальной модели для величин размеров с нижним и верхним порогом, у которой мода не всегда совпадает с математическим ожиданием. Определение оценок параметров данной модели и оценки её моды позволит точнее осуществлять настройку станка.

Математическая модель. Предлагается использовать функцию плотности $f(x)$ для случайных величин размера X изделий в таком виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin (b, c), \\ \frac{1+k}{c-b} \left[1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{\frac{1}{k}} \right], & \text{при } x \in [b, a], \\ \frac{1+k}{c-b} \left[1 - \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^{\frac{1}{k}} \right], & \text{при } x \in (a, c], \end{cases} \quad (1)$$

где a – модальное значение; b – нижний порог и c – верхний порог размера, k – параметр формы размеров.

Для различных параметров формы $0 < k < 1$ получаем различные, физически более адекватные, выпуклые плотности распределения. Если $k > 1$, то получаем вогнутые плотности распределения. При $k = 1$ имеем треугольное распределение. При малых k имеем распределение, близкое к равномерному, с пороговыми значениями и модой. Графики функции плотности для различных параметров формы приведены на рис. 1.

Математическое ожидание для данной случайной величины имеет вид:

$$M(X) = (b + c + 2ka + kb + kc) / (4k + 2). \quad (2)$$

Из (2) видно, что математическое ожидание зависит от всех параметров задачи.

Для того чтобы центральные моменты выражались через теоретический размах $c - b$, определим модальное значение a как дробно-рациональную функцию отношения q длины отрезка к величине $c - b$. Отсюда получим:

$$a = (bq + c) / (1 + q). \quad (3)$$

В этом случае для модели (1) дисперсия случайной величины размера имеет вид:

$$\mu_2 = \frac{(c-b)^2 (k+1)(2k^2q + 7k^2 + 7k^2q + (4k+1)(q+1)^2)}{12(2k+1)^2(1+q)^2(3k+1)}. \quad (4)$$

Найдём центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = \frac{(c-b)^3 (k+1)k^2(q-1)((q^2+1)(4k^2+3k+1) + 2q(4k^2+5k+1))}{4(2k+1)^3(1+q)^3(4k+1)(3k+1)} \quad (5)$$

и центральный момент четвёртого порядка:

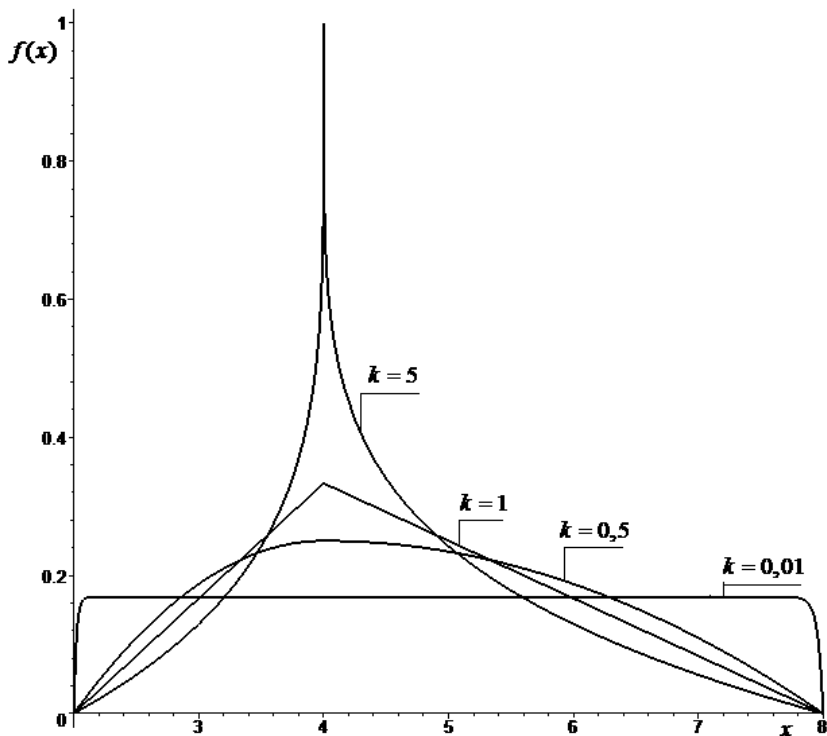


Рисунок 1 – Функции плотности распределения размеров (1) при параметрах $a = 4$, $b = 2$, $c = 8$ и $k = 5$, $k = 1$, $k = 0,5$ и $k = 0,01$.

$$\begin{aligned}
 \mu_4 = & (c-b)^4 (k+1)((1+q)^4(1+15k) + (1+q^4) \times \\
 & k^2(102+366k+813k^2+1011k^3+572k^4) + \\
 & + (1+q^2)qk^2(368+1184k+1932k^2+1684k^3 + \\
 & + 528k^4) + q^2k^2(532+1636k+2958k^2+2546k^3 + \\
 & + 872k^4)) / (80(2k+1)^4(1+q)^4(5k+1)(4k+1)(3k+1)).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда квадрат асимметрии $\beta_1^2 = \mu_3^2 / \mu_2^3$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \beta_1^2 = & 108(4k^2q^2 - 4k^2 + 4k^2q^3 - 4k^2q + 3kq^3 + 7kq^2 - \\
 & - 3k - 7kq - 1 - q + q^2 + q^3)^2 k^4 (3k+1) / ((k + \\
 & + 1)(2k^2q + 7k^2 + 7k^2q^2 + 4k + 8kq + 4kq^2 + \\
 & + 1 + 2q + q^2)^3 (4k+1)^2),
 \end{aligned} \tag{7}$$

а эксцесс $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$ определяется формулой:

$$\begin{aligned} \beta_2 = & 9(3k+1)(1+90kq^2+60kq+1184k^3q^3+368k^2q+1011k^5+ \\ & +572k^6+813k^4+4q^3+366k^3+6q^2+102k^2+q^4+532k^2q^2+ \\ & +1184k^3q+1636k^3q^2+1932k^4q+1932k^4q^3+2958k^4q^2+ \\ & +102k^2q^4+1684k^5q+1011k^5q^4+366k^3q^4+572k^6q^4+ \\ & +528k^6q^3+528k^6q+813k^4q^4+60kq^3+368k^2q^3+ \\ & +1684k^5q^3+2546k^5q^2+872k^6q^2+4q+15k+ \\ & +15kq^4)/(5(2k^2q+7k^2+7k^2q^2+4k+8kq+4kq^2+1+ \\ & +2q+q^2)^2(4k+1)(5k+1)(k+1)). \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнявая величину β_1^2 к квадрату эмпирической исправленной асимметрии $\tilde{\beta}_1^2$ и величину β_2 к эмпирическому исправленному эксцессу $\tilde{\beta}_2$, получаем систему, которая имеет двенадцать решений, причём как действительных, так и комплексных. Выбор нужного единственного действительного решения определяется из условия что, $k > 0$ и $q > 1$ при $\tilde{\beta}_1 > 0$ и $0 \leq q < 1$, если $\tilde{\beta}_1 < 0$. Оценку теоретического размаха $c - b > 0$ можно получить из (4), приравнявая μ_2 к исправленной дисперсии s^2 . Второе уравнение системы для неизвестных b и c получаем, приравнявая математическое ожидание $M(X)$ к выборочному среднему \bar{x} , где $M(X)$ получено подстановкой (3) в (2):

$$M(X) = ((bq+c)(3k+1) + (1+k)(cq+b))/((4k+2)(q+1)). \quad (9)$$

Система, состоящая из линейного уравнения (9) и оценки для теоретического размаха, даст единственное решение для оценок параметров b и c . Подставляя полученные оценки параметров b , c и q в (3), находим оценку \tilde{a} моды a .

Модель (1) имеет функцию распределения вида:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq b; \\ \left\{ x - b + k(x - a) \left[1 - \left(\frac{x - a}{b - a} \right)^{\frac{1}{k}} \right] \right\} / (c - b), & \text{при } b < x \leq a; \\ \left\{ x - b + k(x - a) \left[1 - \left(\frac{x - a}{c - a} \right)^{\frac{1}{k}} \right] \right\} / (c - b), & \text{при } a < x \leq c; \\ 1, & \text{при } x > c. \end{cases} \quad (10)$$

Проведенный статистический анализ по 30 точкам, использующий моделирование распределения (10) при заданных параметрах, показал, что при объеме оценок параметров модели (1) $n = 25$, оценки параметров предложенным методом имеют небольшую дисперсию и оказываются практически несмещёнными.

По 200 измерениям посадочных мест валов колёсных пар была построена модель (1) с найденными параметрами распределения и показано, что она согласуется по критерию Пирсона при уровне значимости $\varepsilon = 0,05$.

Использование только критерия согласия для проверки модели на адекватность недостаточно, так как согласование при заданном уровне значимости ε не означает, что модель адекватна. Действительно, опровержение той или иной гипотезы ни в коем случае не является логическим доказательством, равно как и её подтверждение не является логическим доказательством справедливости гипотезы. В самом деле, опровержение гипотезы может произойти и в случае, когда она справедлива.

Итак, из вышесказанного следует, что для проверки на адекватность модели нам необходимы, помимо критерия согласия, и другие характеристики. Одной из таких характеристик являются « λ – характеристика». Форма кривой « λ – характеристики» устанавливается по опытным данным и является существенным основанием для выбора того или иного аналитического типа функции распределения. Эта характеристика широко применяются в теории надежности.

« λ – характеристика» – это интенсивность отказов [4], а её формула имеет вид:

$$\lambda(x) = f(x)/(1 - F(x)).$$

Для данной модели (1) « λ – характеристика» определяется равенством:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{(k+1) \left(-1 + \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{\frac{1}{k}} \right)}{-c + x + kx - kx \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{\frac{1}{k}} - ka + ka \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{\frac{1}{k}}}, & \text{при } b < x \leq a; \\ \frac{(k+1) \left(-1 + \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^{\frac{1}{k}} \right)}{-c + x + kx - kx \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^{\frac{1}{k}} - ka + ka \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^{\frac{1}{k}}}, & \text{при } a < x < c. \end{cases} \quad (11)$$

Форма кривой « λ – характеристики» зависит от всех параметров модели (1).

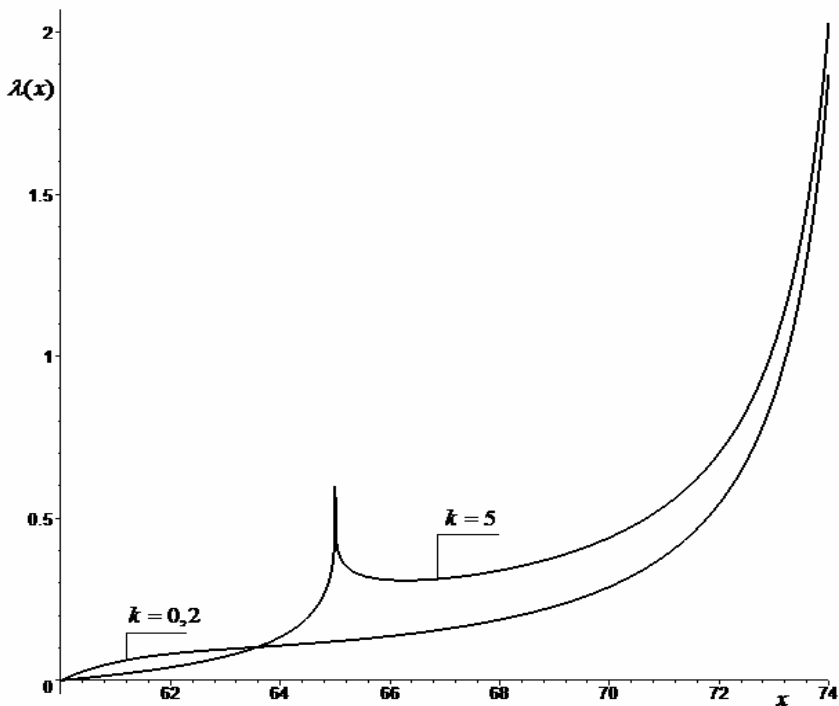


Рисунок 2 – Кривые $\lambda(x)$ модели (1) для различных k и одинаковым параметром $a = 65$, $b = 75$ и $c = 75$.

На практике широко используется оценка « λ – характеристики» [4]:

$$\lambda(r_{(i)}) = \frac{n(x_{(i)})}{\left[n - \sum_{j=1}^{i-1} n(x_{(j)}) \right] (x_{(i)} - x_{(i-1)})}, \quad (12)$$

где $n(x_{(i)})$ – частота появления размера со средней величиной размера $x_{(i)}$.

По 200 измерениям посадочных мест валов колёсных пар была построена эмпирическая « λ – характеристика» (12) и теоретическая (11) с найденными параметрами распределения (1). Точки эмпирической « λ – характеристики» практически легли на теоретическую « λ – характеристику», что говорит о возможности применения модели (1) для описания случайной величины размера изделия.

Всё это происходит не случайно, так как увеличение параметров модели приближает используемую модель к истинной модели. Проблема только в

том, как найти хорошие оценки параметров модели. В данном случае можно считать, что данная проблема получила частичное решение, так как всегда есть возможность улучшить оценки параметров модели (1).

Анализ точности обработки изделий. Поле рассеяния размеров (размах $c - b$) достаточно просто можно определить с помощью модели (1); оценка этой величины имеет вид: $\tilde{c} - \tilde{b}$. Так как для одномодального не симметричного распределения, имеющего как положительный, так и отрицательный коэффициент асимметрии, модальное значение более удалено от среднего значения поля рассеяния, чем математическое ожидание, то правильно было бы ввести коэффициент относительной асимметрии, заменяя математическое ожидание в [3] модальным значением. В этом случае для модели (1) коэффициент относительной асимметрии имеет вид:

$$\alpha = (2a - b - c)/(c - b). \quad (13)$$

Если x_0 – координата середины поля допуска, δ – половина установленного поля допуска, то коэффициент точности для модели (1) определяется формулой:

$$\eta = (c - b)/2\delta. \quad (14)$$

Так как для одномодального распределения, имеющего как положительный, так и отрицательный коэффициент асимметрии, вероятность появления размеров в некоторой симметричной окрестности моды больше, чем в этой же окрестности относительно математического ожидания, то, желательное, в коэффициенте настроенности процесса $E = [M(X) - x_0]/\delta$ заменить математическое ожидание модой. В этом случае для модели (1) коэффициент настроенности процесса имеет вид:

$$E = [a - x_0]/\delta. \quad (15)$$

Модель (1) ограничена слева и справа, поэтому доля дефектных изделий, вышедших за границы поля допуска, определится в зависимости от взаимного расположения поля допуска 2δ и поля рассеяния $c - b$.

Определим долю дефектных изделий через коэффициенты относительной асимметрии (13), точности (14) и настроенности процесса (15).

Если дефектные изделия отсутствуют, то $b \geq x_0 - \delta$ и $c \leq x_0 + \delta$. В этом случае должны выполняться неравенства: $\eta(1 + \alpha) \leq 1 + E$, $\eta(1 - \alpha) \leq 1 - E$, такие же, как до замены математического ожидания модой. В случае, когда только поле рассеяния размеров выходит за левую границу поля допуска, то есть $x_0 - \delta \geq b$, а $c \leq x_0 + \delta$, доля дефектных изделий имеет вид:

$$p_1 = \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{1 + E}{2\eta} \left(k \left(\frac{1 + E}{\eta(1 + \alpha)} \right)^{1/k} - k - 1 \right),$$

где $a \geq x_0 - \delta$.

Эта доля зависит от параметра формы k , как и в случае, когда только поле рассеяния размеров выходит за правую границу поля допуска, то есть $x_0 + \delta \leq c$ и $b \geq x_0 - \delta$. Тогда доля дефектных изделий для $a \leq x_0 + \delta$ имеет вид:

$$p_2 = -\frac{\alpha - 1}{2} - \frac{1 - E}{2\eta} \left(-k \left(\frac{1 + E}{\eta(\alpha - 1)} \right)^{1/k} + k + 1 \right).$$

Если поле рассеяния размеров выходит за обе границы поля допуска и имеет место неравенство $x_0 - \delta \leq a \leq x_0 + \delta$, то доля дефектных изделий равна $p_1 + p_2$.

В общем случае достаточно воспользоваться формулой (10) и формулами:

$$a = E\delta + x_0; \quad b = E\delta + x_0 - \alpha\delta\eta - \delta\eta; \quad c = E\delta + x_0 - \alpha\delta\eta + \delta\eta.$$

Решить обратную задачу по заданным долям неисправимого и исправимого брака, определять коэффициенты η – точности и E – настроенности технологического процесса вполне возможно в системе *MAPLE*, если определены параметр формы k и коэффициент относительной асимметрии α модели (1).

Перспективы дальнейших исследований. В дальнейшем неплохо было бы найти несмещённые, состоятельные и эффективные оценки моды a , параметров b и c нижнего и верхнего порога предложенной модели (1). А также для этой модели, с учётом возможных экономических потерь, решить задачу оптимизации настройки станка на поле допуска по полученным оценкам параметров a , b и c .

Выводы. Предложенная модель распределения размеров изделий физически адекватна, так как имеет верхний и нижний порог размеров изделия. Данная модель близка к ранее определённым моделям ввиду имеющего у неё параметра формы, и она более адекватна к истинной модели распределения размеров изделий, потому что имеет моду в любой точке размаха.

Найденные оценки параметров этой модели позволяют использовать её в практических целях.

Настройка станка на середину поля допуска для среднего размера изделия может дать процент брака больший, чем его настройка на модальное значение или другое значение размера.

Для модели (1) введено уточнённое понятие коэффициента относительной асимметрии, поскольку асимметрия определяется не математическим ожиданием, а модой. Поэтому для предложенной модели введены характеристики анализа точности обработки изделий, где среднее значение размеров изделия заменено на модальное значение. Такие характеристики более эффективно проведут анализ точности обработки изделий.

Список литературы: 1. *Маталин А.А.* Технология машиностроения: Учебник для машиностроительных вузов по специальности «Технология, металлорежущие станки и инструменталь». -Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1985. -496с. 2. *Андреев Г.Я.* Тепловая сборка колесных пар. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 1965. – 227 с. 3. *Сизенов Л.К., Лохманов В.Н.* Вероятностный анализ точности обработки деталей в машиностроении. Учебное пособие. РИО МГТУ им. А.Н.Косыгина, 2010.-212 с. 4. Надёжность технических систем: Справочник / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырёв, В. В. Болотин и др.; Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985, - 608 с.

Поступила в редколлегию 17.04.2012

УДК 621.43

А.М. ЛЕВТЕРОВ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Л.И. ЛЕВТЕРОВА, вед. инженер, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Н.Ю. ГЛАДКОВА, вед. инженер, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
В.П. МАРАХОВСКИЙ, мл. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
А.Н. АВРАМЕНКО, канд. техн. наук, науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМОБИЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА БЕНЗОЭТАНОЛЬНЫХ СМЕСЯХ

Наводятся результаты числового эксперимента та моторних випробувань автомобільного двигуна MeMZ 307-1. В якості моторного палива розглядаються бензоетанольні паливні композиції. Розрахункові дослідження ґрунтуються на квазівимірній термодинамічній моделі робочого процесу з двохзонною моделлю згоряння, випробування виконуються на моторному стенді.

Приводятся результаты численного эксперимента и моторных испытаний автомобильного двигателя MeMZ 307-1. В качестве моторного топлива рассматриваются бензоэтанольные топливные композиции. Расчетные исследования базируются на квазиметрической термодинамической модели рабочего процесса с двухзонной моделью сгорания, испытания проводятся на моторном стенде.

In article results of numerical experiment and motor tests of engine MeMZ 307-1 are resulted. As motor fuel are considered petrol-ethanol fuel compositions. Settlement researches are based on quasimetric thermodynamic model of working process with two-zoned model of combustion, tests are carried out on the motor stand.

Введение и постановка задачи. Использование в широких масштабах этанола и его смесей с бензином в качестве моторного топлива неоспоримо и уже не вызывает проблем, когда есть соответствующая инфраструктура и сопутствующее законодательство. В странах ЕС, Северной и Южной Америке этанольное альтернативное топливо давно заняло свою нишу. В Украине, где есть соответствующее законодательство и есть возможность применять

такое топливо с экологическим и экономическим эффектом для транспорта (особенно, когда речь идет о рациональном использовании отходов спиртового производства), но нет инфраструктуры и четких нормативных рекомендаций по адаптации двигателя, исследование моторных свойств топлива и его непосредственного применения в двигателях внутреннего сгорания различного типа своевременно и необходимо.

В ИПМаш НАН Украины в течение последних нескольких лет в рамках бюджетных и договорных обязательств, проводятся расчетно-экспериментальные исследования бензоэтанольных смесей применительно к конкретным двигателям [1, 2, 3].

В предлагаемой статье приводятся численные исследования, касающиеся прогнозирования основных характеристик двигателя, эмиссии вредных веществ в отработавших газах, и результаты моторных испытаний двигателя MeM3 307-1.

Численное прогнозирование характеристик двигателя. Расчетные мощностные, экономические показатели и показатели токсичности двигателя получены с помощью квазимерной термодинамической математической модели рабочего цикла поршневого двигателя. Эффективная вычислительная способность таких моделей, простота в использовании делают их популярными и полезными в исследовании рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания до настоящего времени, несмотря на существование детальных (но очень дорогих и трудоемких) вычислительных комплексов, созданных ведущими моторостроительными фирмами и лабораториями.

Математическая модель рабочего цикла двигателя объединяет все его процессы (наполнение, сжатие, сгорание, расширение) по ходу изменения текущего объема (V) в цилиндре двигателя в соответствии с заданным шагом по углу поворота коленчатого вала

$$V = V_a / \varepsilon \cdot \left\{ \left[1 + (\varepsilon - 1) / 2 \cdot \left[1 + 1/\lambda - \cos \phi - (1 - \lambda^2 \cdot \sin \phi)^{0.5} \right] \right] \right\},$$

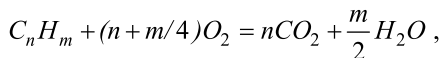
где V_a – максимальный объем цилиндра; ε – геометрическая степень сжатия; ϕ – угол поворота коленчатого вала; λ – геометрический параметр кривошипно-шатунного механизма.

На участках сжатия и расширения математическая модель процесса основана на уравнении закона сохранения энергии в дифференциальной форме

$$dU = -pdV + dQ,$$

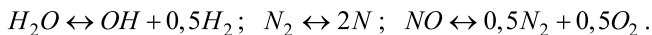
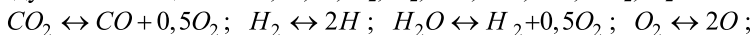
для участка расширения оно дополняется системой уравнений, определяющих равновесный состав продуктов сгорания.

При огромном разнообразии углеводородных топлив состав продуктов их полного сгорания одинаков:



а основные реакции горения углеводородов протекают быстро и можно счи-

тать, что сначала устанавливается равновесное состояние с повышением температуры, а затем протекают более медленные реакции. С учетом диссоциации продуктов сгорания семь общепринятых равновесных реакций горения можно записать с помощью 11 реагентообразующих и продуктообразующих индивидуальных веществ – N, O, H, N₂, O₂, NO, OH, CO, CO₂, H₂O:



Полученные равновесные концентрации продуктов сгорания, кроме того, позволяют упростить уравнения химической кинетики для расчета образования монооксидов азота по *механизму Зельдовича*, который используется при выполнении расчета исследуемого рабочего процесса.

Алгоритм принятого в модели *двухзонного механизма сгорания* $u, s, v, g_1, g_2, x \rightarrow T_1, T_2, p$ [4] осуществляется численным решением соответствующей системы уравнений при известных теплофизических свойствах индивидуальных веществ и топлива:

$$(1-x) \cdot u(T_1, g_1) + x \cdot u(T_2, g_2) = u; \quad (1-x) \cdot R(g_1) \cdot T_1 + x \cdot R(g_2) \cdot T_2 = p \cdot v;$$

$$s_T(g_1, T_1) - R(g_1) \cdot \ln p = s; \quad v_2 = R(g_2) \cdot T_2 / p;$$

$$c_i = \psi(T_2, v_2), \quad g_{2i} = \mu_i \cdot v_2 \cdot c_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где индекс 1 относится к параметрам зоны заряда, 2 – к параметрам зоны продуктов сгорания; x – доля выгоревшей топливовоздушной смеси, задается тем или иным законом выгорания топливовоздушной смеси; $u(T_k, g_k)$ – удельная внутренняя энергия соответствующей зоны; v_k – удельный объем соответствующей зоны; u – удельная внутренняя энергия системы; v – удельный объем системы; $R(g_k)$ – газовая постоянная смеси; g_k – вектор равновесного состава смеси соответствующей зоны в массовых долях; p – давление; s – удельная энтропия зоны заряда, s_T – ее температурная составляющая; c – вектор концентраций компонент; μ_i – молярная масса i -го компонента смеси; N – количество компонент в продуктах сгорания; ψ – процедура решения системы уравнений для определения вектора концентраций продуктов сгорания.

Величины u и s определяются интегрированием дифференциальных уравнений для *первого и второго законов термодинамики*:

$$dU = -pdV - dQ_1 - dQ_2; \quad dS = dQ_1 / T_1,$$

где dQ_1 и dQ_2 элементы теплоотдачи в стенки цилиндра от зон свежего заряда и продуктов сгорания.

Метод численного исследования [5] позволяет рассмотреть характеристики двигателя на всем спектре возможных бензоэтанольных топливных композиций – от «чистого бензина» до «чистого этанола» с любым процентным содержанием того и другого и в широком диапазоне изменения регули-

руемых параметров двигателя.

На рис. 1 – 4 приводятся некоторые результаты такого исследования. Показатели эмиссии монооксидов азота (NO) как функции коэффициента избытка воздуха (α) и угла опережения зажигания (φ) при фиксированной степени сжатия (ε) для топлива, содержащего 30% этанола (Е 30), показаны на рис. 1, а рис. 2 иллюстрирует зависимость NO от доли этанола (G_z) в топливной смеси (G_z) и коэффициента избытка воздуха. Рис. 3 дает представление о возможности поиска компромисса между коэффициентом полезного действия (η) и эмиссией NO путем оптимизации угла опережения зажигания и коэффициента избытка воздуха.

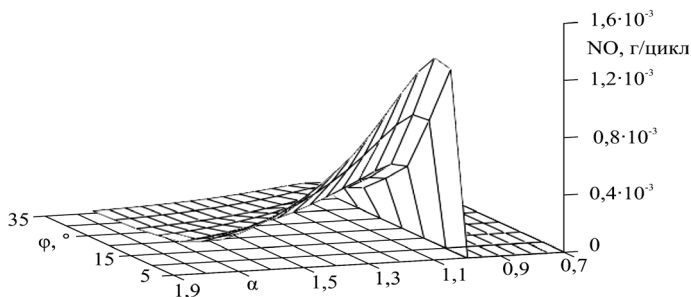


Рисунок 1 – Зависимость эмиссии монооксида азота от коэффициента избытка воздуха и угла опережения зажигания для топлива Е 30.

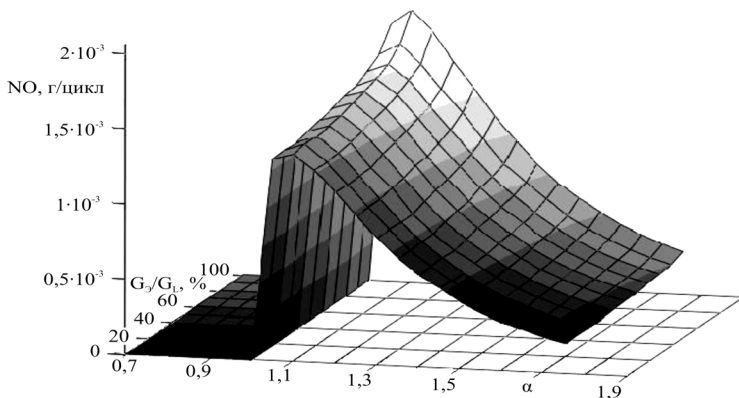


Рисунок 2 – Уровень эмиссии NO в зависимости от доли этанола в смесевом топливе и коэффициента избытка воздуха.

Как уже отмечалось, целью расчетных исследований являлось прогнозирование основных характеристик двигателя, работающего на бензоэтанольном топливе. Соотношение этанол/бензин влияет как на экономические и мощностные показатели двигателя, так и на показатели токсичности отра-

ботавших газов. На рис. 2 видно, как растет эмиссия NO с увеличением содержания этанола в смеси, а о том, как изменяются основные индикаторные показатели двигателя можно судить по рис. 4.

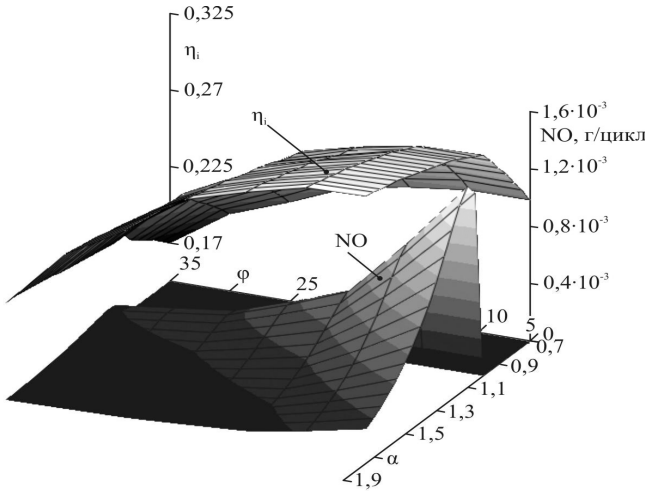


Рисунок 3 – Взаимовлияние коэффициента полезного действия, угла опережения зажигания, коэффициента избытка воздуха и эмиссии NO.

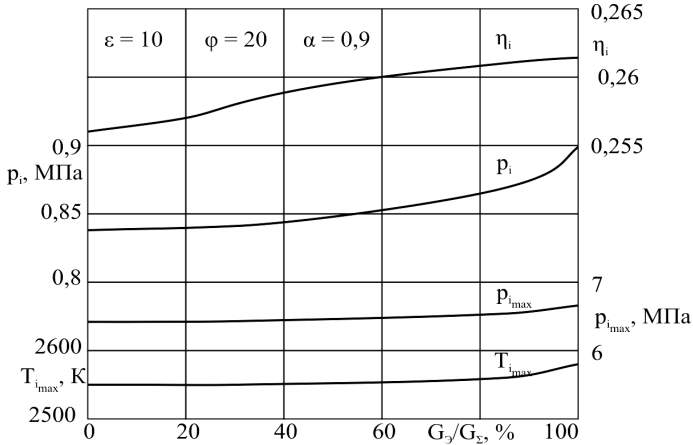


Рисунок 4 – Влияние доли этанола в топливе на энергоэкологические показатели двигателя.

Результаты экспериментальных исследований и сопоставление с расчетом. Экспериментальные исследования двигателя МеМЗ 307-1 проводились на двух топливных композициях: (Е-30) и (Е-85). Такой выбор топлива объясняется, во-первых, экономической целесообразностью эксперимента

и, во-вторых, имеющей возможность численного прогнозирования характеристик двигателя на других топливных композициях.

На рис. 5 приводятся некоторые сравнительные данные эффективных показателей, полученных в ходе расчёта и эксперимента внешних скоростных характеристик двигателя, работающего на бензине и на смешевом топливе E-30.

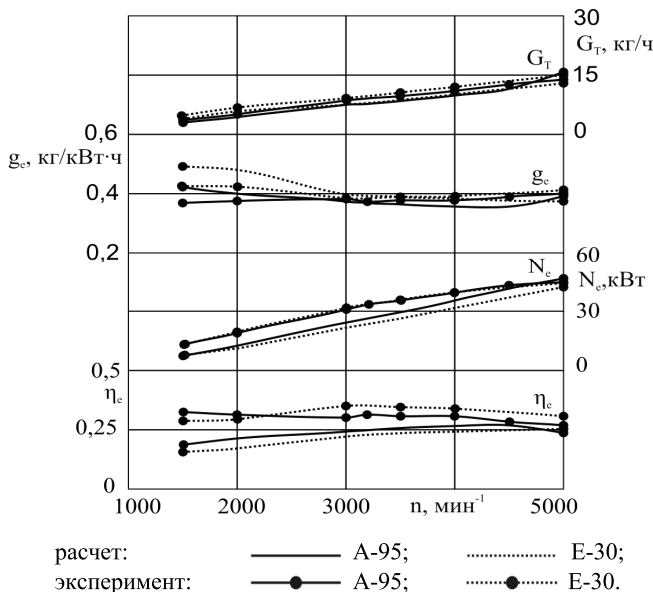


Рисунок 5 – Сравнение результатов эксперимента и расчета.

Стендовые испытания имели целью оценить влияние моторных качеств смешевого топлива на энергоэкологические и экономические показатели двигателя. Штатная система управления двигателем позволяет в интерактивном режиме изменять только один из регулируемых параметров. Испытания смешевого топлива E-30 показали, что достижение максимального приближения к показателям работы двигателя на бензине A-95 осуществляется регулированием угла опережения зажигания. На режиме максимального крутящегося момента ($n = 3000 \text{ мин}^{-1}$) массовый расход смешевого топлива E-30 растет на 1,3 – 7 % в зависимости от величины угла опережения зажигания, и при этом удельный расход тепловых затрат уменьшается на 5 – 13,8 %, что свидетельствует о росте эффективного коэффициента полезного действия.

Работа двигателя на смешевом топливе E-85 в штатной комплектации на режиме номинальной мощности ($n = 5000 \text{ мин}^{-1}$) обеспечивает только 20 – 25% мощности при сравнении с работой на бензине A-95. Для получения приемлемых показателей работы двигателя требуется двухфакторная оптимизация: по углу опережения зажигания и по продолжительности впрыскивания топлива, то есть по α , и это является предметом дальнейших исследо-

ваний, поскольку результаты испытаний при воздействии только на один из регулируемых параметров не дают удовлетворительных эксплуатационных характеристик.

На рис. 6 представлены показатели токсичности двигателя, работающего на бензоэтанольных смесях (Е-30, Е-85) и бензине А-95 на режиме номинальной мощности ($n = 5000 \text{ мин}^{-1}$) в зависимости от управления или углом опережения зажигания, или продолжительностью впрыска топлива.

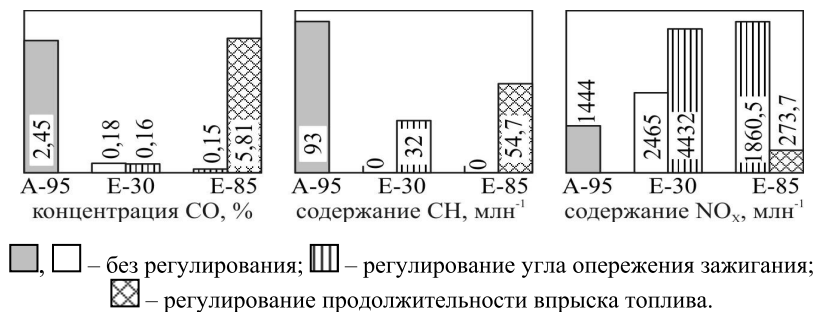


Рисунок 6 – Содержание токсичных веществ в отработавших газах двигателя в зависимости от управления регулируемыми параметрами.

Выводы. Анализ результатов численного и экспериментального исследований двигателя МеМЗ-307-1 позволяет сделать вывод, что при соответствующем управлении регулируемыми параметрами можно добиться приемлемых эксплуатационных характеристик при работе на бензоэтанольных смесях с различным соотношением этанол/бензин. Но, если расчетные исследования эти возможности просто констатируют, то экспериментальные исследования показывают необходимость изменений в программе управления двигателем.

Список литературы: 1. Левтеров А.М., Мараховский В.П., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю. Результаты расчетно-экспериментальных исследований характеристик автомобильного двигателя при использовании бензоэтанольных смесей // Автомобильный транспорт: сб. научн. тр. – 2008. – № 23. – С. 100-103. 2. Левтеров А.М., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю. Исследование характеристик двигателя с искровым зажиганием, работающего на бензоэтанольных топливных композициях // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 1. – С. 52-57. 3. Левтеров А.М., Мараховский В.П., Бганцев В.Н., В.Н. Саранина В.Н. Экспериментальная оценка энерго-экологических показателей автомобильного двигателя на бензоэтаноле // Автомобильный транспорт: сб. научн. тр. – 2008. – Вып. 22. – С. 98–101. 4. Куценко А. С. Моделирование рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания на ЭВМ. – К.: Наукова думка, 1988. – 104 с. 5. Левтеров А.М., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю. Метод исследования характеристик поршневых ДВС на альтернативных топливах // Вісник НТУ «ХПИ»: «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – 2011. – Вып. 42. - С. 99-106.(8стр.)

Надійшла до редколегії 23.04.2012

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків

НОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано метод наближеного розв'язання двоточкової крайової задачі для лінійного звичайного диференціального рівняння. Наближений розв'язок шукається у вигляді лінійної комбінації системи лінійно-незалежних функцій. Невідомі сталі у ньому знаходяться з умови найкращого наближення правої частини диференціального рівняння лінійною комбінацією функцій, що отримується застосуванням диференціального оператора крайової задачі до наближеного розв'язку. Наведено приклад.

Предложен метод приближенного решения двухточечных краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближенное решение в данном методе находится из условия наилучшего приближения правой части дифференциального уравнения линейной комбинацией функций, получаемых применением дифференциального оператора краевой задачи к приближенному решению. Приведен пример.

The method approached solution of a two-dot boundary value problem for the linear differential equation is offered. The approached solution is searched in the form of a linear combination of system linearly-independent functions. Unknown constants are in him from a condition of the best approach of the right part of the differential equation a linear combination of the functions received by application of the differential operator of a boundary value problem to the approached solution. The example is resulted.

Вступ. Аналіз відомих методів розв'язання крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними дозволяє розділити їх на наступні типи:

- класичні методи [1], де наближений розв'язок крайової задачі отримується у вигляді скінченних або нескінченних сум відомих функцій (ортогональних поліномів, тригонометричних функцій, спеціальних функцій тощо), або у вигляді сингулярних інтегралів тощо;
- метод скінченних різниць [2], де наближений розв'язок крайової задачі отримується у вигляді таблиці значень у заданій системі точок області інтегрування;
- варіаційні та проекційні методи [3 – 7] та їх частинний випадок – метод скінченних елементів [8], де наближений розв'язок крайової задачі шукається у вигляді лінійної комбінації наперед вибраної системи лінійно-незалежних функцій, які точно задовольняють головним граничним умовам – алгебраїчних або тригонометричних поліномів, сплайнів, розв'язків однорідного рівняння [5] тощо, дивись також [8];
- метод скінченних елементів з оптимальним вибором базисних функцій, координат вузлів елементів та вузлових параметрів [9, 10] (в цьому випадку всі функції і всі параметри, що входять у структуру наближеного розв'язку,

не задаються наперед, а знаходяться з умови мінімізації відповідного критерію – функціоналу, відповідного поставленій крайовій задачі або якогонебудь іншого критерію);

- метод інтегральних співвідношень *А.О. Дородніцина* [11];
- метод зведення диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь – метод *ДР Л.В. Канторовича* [2];
- метод ЛІДР або метод НІДР – методи *О.М. Литвина* [9, 10] зведення диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь (лінійних або нелінійних, відповідно).

Останні три методи знаходять наближені розв’язки, що у все більшій мірі залежні від оператора крайової задачі і правої частини, причому метод ДР або метод інтегральних співвідношень *А.О. Дородніцина* можуть бути отримані як частинні випадки методу ЛІДР, метод ОМСЕ може розглядатися, як частинний випадок методу НІДР.

Згідно з відомим правилом обчислювальної математики, наближуючий оператор, що враховує більше властивостей наближуваної функції, може мати кращі апроксимативні характеристики. Це правило використовується, зокрема, при побудові алгоритмів без насичення [12, 13], при інтегруванні функцій з особливостями [14], у адаптивних схемах методу скінченних елементів [9, 10] (дивись також у роботі [15]), у яких базисні функції задаються, а вузли елементів згущуються навколо точок з особливостями за деяким законом тощо.

Постановка задачі. Задача полягає у розробці та дослідженні методу наближеного розв’язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$Au(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u^{(s)}(0) = u^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

$$Au(x) := \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left(p_s(x) \frac{d^s u}{dx^s} \right) = f(x)$$

у вигляді точного розв’язку крайової задачі (1) – (2) для наближеної правої частини, яка залежить від довільних сталих. А також передбачалося запропонувати метод знаходження вказаних довільних сталих.

Основні твердження роботи. Пропонується метод розв’язання крайової задачі для лінійних звичайних диференціальних рівнянь (1) – (2).

Метод полягає у виконанні наступних кроків:

Крок 1. Будуємо систему лінійно-незалежних функцій $\psi_k(x), s = \overline{0, N}$ з властивостями

$$\psi_k^{(s)}(0) = 0, \psi_k^{(s)}(1) = 0, s = \overline{0, n-1}, k = \overline{0, N}. \quad (3)$$

Крок 2. Знаходимо невідомий розв’язок задачі (1) – (2) у вигляді

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N C_k \psi_k(x), \quad (4)$$

де невідомі сталі C_k , $k = \overline{0, N}$ знаходимо з умови найкращого наближення правої частини диференціального рівняння $f(x)$ лінійною комбінацією

$\sum_{k=0}^N C_k \varphi_k(x)$ функцій

$$\varphi_k(x) = A\psi_k(x), k = \overline{0, N} \quad (5)$$

в нормі простору $L_2[0,1]: \|u\|_{L_2[0,1]} = \|u\|_2 = \left(\int_0^1 u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$, або простору

$$W_2^q[0,1], 1 \leq q \leq n-1, W_2^q[0,1] = \left\{ u(x) : \sum_{s=0}^q \|u^{(s)}\|_2^2 < \infty \right\},$$

тобто з умови

$$J_q(C) = \int_0^1 \sum_{s=0}^q \left(f^{(s)}(x) - \sum_{k=0}^N C_k \varphi_k^{(s)}(x) \right)^2 dx \rightarrow \min_C. \quad (5)$$

Теорема. Наближений розв'язок $u_N(x)$ має такі властивості:

- 1) точно задовольняє граничні умови (2);
- 2) точно задовольняє диференціальному рівнянню

$$Au_N(x) = f_N(x), \text{ де } f_N(x) = \sum_{k=0}^N C_k \varphi_k(x).$$

Доведення. Той факт, що формула (4) задовольняє граничним умовам (2) є наслідком того, що кожний доданок задовольняє умови (2), згідно з (3). Твердження 2) випливає з наступного ланцюжка тотожностей:

$$Au_N(x) = A \sum_{k=0}^N C_k \psi_k(x) = \sum_{k=0}^N C_k A\psi_k(x) = \sum_{k=0}^N C_k \varphi_k(x) = f_N(x).$$

Теорема доведена.

Тобто, для похибки наближення $|u(x) - u_N(x)|$ маємо рівність $|u(x) - u_N(x)| = |f(x) - Au_N(x)|$ і її оцінка залежить від класу диференційованості функції $f(x)$ та від вибору функцій $\psi_k(x)$, $s = \overline{0, N}$.

Приклад. Знайти запропонованим методом наближений розв'язок крайової задачі

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

$$a(x) = 1 + x(1-x), \quad f(x) = -2 + [1 + x(1-x)]x(1-x).$$

Точний розв'язок цієї крайової задачі: $u(x) = x(1-x)$.

Якщо використати функції $\psi_k(x) = x(1-x)x^k, k = 0, 1, \dots, N$, то метод дає $C_0 = 1, C_k = 0, k = 1, \dots, N$.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому планується узагальнення методу на випадок розв'язання крайових задач для двовимірних областей складної форми.

Висновки. Запропоновано метод побудови наближених розв'язків крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь $Au(x) = f(x), 0 < x < 1$. У запропонованому методі $u(x)$ наближується у вигляді лінійної комбінації деякої лінійно-незалежної системи функцій $\psi_k(x), k = 0, \dots, N$, що задовольняють граничним умовам крайової задачі. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації знаходяться з умови найкращого наближення (в нормі $L_2[0,1]$ або іншій нормі) правої частини $f(x)$ лінійною комбінацією функцій $\varphi_k(x) = A\psi_k(x), k = 0, \dots, N$.

Список літератури: 1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724с. 2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с. 3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 708 с. 4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 510 с. 5. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в вычислительном анализе. Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 126 с. 6. Рвачев В.Л. Метод R-функций и некоторые его приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 550 с. 7. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 349 с. 8. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с. 9. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. – К.: Наук. думка, 2005. – 333 с. 10. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с. 11. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя//Журн. Прикладной механики и техн. Физики. – 1960. №3. С. 111-118. 12. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – К.: Ин-т матем. НАНУ, 2004. – 499 с. 13. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука: Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1986. – 744 с. 14. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. – Минск: Вышэйшая школа, 1972. – 584 с. 15. Diaz A.R., Kikuchi N., Taylor J.E. A method of grid optimization for finite element method// Comp. methods in applied mechanics and engineering. V.41, 1983. P. 29-45.

Надійшла до редколегії 04.05.2012

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків

**СИСТЕМА СПЛАЙНІВ КЛАСУ $C^q(R^2)$,
ЯКІ Є R -ФУНКЦІЯМИ ДВОХ ЗМІННИХ**

Запропоновано і досліджено повну систему R -функцій двох змінних, істотно належних до класу $C^q(R^2)$, що складається з R -кон'юнкції $\wedge(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y - |x - y|^{q+1}$ та R -диз'юнкції $\vee(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y + |x - y|^{q+1}$, $q = 0, 1, \dots$ і R -заперечення $\bar{x} = -x$. Ці R -функції є поліноміальними сплайнами степеня $q + 1$, $q = 0, 1, \dots$, дефекту 1. Вони є розв'язками системи рекурентних крайових задач для рівняння Пуассона, права частина яких теж є деякою R -функцією з меншим номером q .

Предложена и исследована полная система R -функций двух переменных, существенно принадлежащих классу $C^q(R^2)$, которая состоит из R -конъюнкции $\wedge(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y - |x - y|^{q+1}$, R -дизъюнкции $\vee(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y + |x - y|^{q+1}$, $q = 0, 1, \dots$ и R -отрицания $\bar{x} = -x$. Эти R -функции – полиномиальные сплайны степеня $q + 1$, $q = 0, 1, \dots$, дефекта 1, являющиеся решениями системы рекуррентных краевых задач для уравнения Пуассона; правая часть этого уравнения Пуассона в свою очередь является R -функцией с меньшим номером q .

Full system of the R -functions of two variables essentially belonging to a class $C^q(R^2)$ is offered and investigated. This system consists from R -conjunction $\wedge(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y - |x - y|^{q+1}$, R -alternation $\vee(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y + |x - y|^{q+1}$, $q = 0, 1, \dots$ and R -negation $\bar{x} = -x$. These R -functions are polynomial splines of the degree $q + 1$, $q = 0, 1, \dots$, defect of these splines is 1. The offered R -functions are the solutions the recurrently system of the boundary value problems for the Poisson's equation. Right part in these Poisson's equations are also R -functions with smaller number q .

Вступ. Теорія R -функцій, створена академіком НАН України *В.Л. Рвачовим* [1], дозволяє будувати рівняння границь складних областей D , на основі логічної структури побудови D за допомогою підобластей D_k , $k = 1, \dots, M$. На даний час недосліджені R -функції, що є сплайнами класу $C^q(R^2)$, $q = 0, 1, \dots$.

Постановка задачі. Задача полягає у побудові повної системи R -функцій, що складається з R -кон'юнкції, R -диз'юнкції та R -заперечення, які є сплайнами класу $C^q(R^2)$, $q = 0, 1, \dots$, дослідженні їх властивостей і методу їх рекурентної побудови.

Основні твердження роботи.

Теорема 1. Система функцій

$$\begin{aligned} \wedge(x, y, q) &= |x|^q x + |y|^q y - |x - y|^{q+1}, q = 0, 1, \dots, \\ \vee(x, y, q) &= |x|^q x + |y|^q y + |x - y|^{q+1}, q = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{x} = -x$$

є повною системою R – функцій двох змінних, істотно належних до класу $C^q(R^2)$.

Доведення. Для доведення того, що це система функцій двох змінних, істотно належних до класу $C^q(R^2)$, достатньо зауважити, що кожний доданок у них $|x|^q x$, $|y|^q y$, $|x - y|^{q+1}$ має неперервні частинні похідні до порядку q , $q = 0, 1, \dots$ включно, оскільки

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} |x|^q x = \begin{cases} (q+1) \cdots (q-p+2) |x|^{q-p} x \in C^{q-p}(R^2), & p = 1, \dots, q-1, \\ (q+1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot |x| \in C(R^2), & p = q, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^p}{\partial y^p} |x|^q x = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \frac{\partial^p}{\partial x^p} |y|^q y = 0, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} |y|^q y = \begin{cases} (q+1) \cdots (q-p+2) |y|^{q-p} y \in C^{q-p}(R^2), & p = 1, \dots, q-1, \\ (q+1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot |y| \in C(R^2), & p = q. \end{cases}$$

Тобто, частинні похідні порядку $p = q, q \geq 1$ є лише неперервними, похідні порядку $p = q + 1$ є розривними.

Згідно з теорією R – функцій [1], для того, щоб довести, що ці функції є R – функціями, достатньо довести їх знакосталість у кожному з чотирьох квадрантів площини Oxy . Доведемо це.

У першому квадранті $x > 0, y > 0$ маємо

$$\wedge(x, y, q) = x^{q+1} + y^{q+1} - |x - y|^{q+1} > 0,$$

оскільки $\max\{x^{q+1}, y^{q+1}\} > |x - y|^{q+1}$.

У другому квадранті $x < 0, y > 0$ поклавши $x = -\beta y$, $\beta > 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} \wedge(-\beta y, y, q) &= -\beta^{q+1} y^{q+1} + y^{q+1} - y^{q+1} |\beta + 1|^{q+1} = \\ &= y^{q+1} \left(-\beta^{q+1} + 1 - |\beta + 1|^{q+1} \right) < 0, \end{aligned}$$

оскільки $1 - |\beta + 1|^{q+1} < 0$, $q = 0, 1, \dots$.

Аналогічно доводиться, що $\wedge(x, y, q) < 0$ у четвертому квадранті $x > 0, y < 0$

Той факт, що $\wedge(x, y, q) < 0$ у третьому квадранті $x < 0, y < 0$ витікає з того, що у цьому квадранті $|x|^q x = -|x|^{q+1} < 0, |y|^q y = -|y|^{q+1} < 0, -|x - y|^{q+1} \leq 0$.

При переході точки (x, y) з одного квадранта у інший, маємо

$$\wedge(x, 0, q) = |x|^q x - |x|^{q+1} = \begin{cases} 0, & x \geq 0; \\ -2|x|^{q+1}, & x < 0, \end{cases}$$

$$\wedge(0, y, q) = |y|^q y - |y|^{q+1} = \begin{cases} 0, & y \geq 0; \\ -2|y|^{q+1}, & y < 0. \end{cases}$$

Таким чином, функція $\wedge(x, y, q)$ додатна у першому квадранті, від'ємна у всіх інших трьох квадрантах і дорівнює нулю лише на додатних півосях. Тобто ця функція є R -кон'юнкцією.

Аналогічно доводиться, що функція $\vee(x, y, q)$ є від'ємною лише у третьому квадранті і додатною у першому, другому і четвертому квадрантах. Крім того, вона дорівнює нулю лише на від'ємних півосях. Тобто ця функція є R -диз'юнкцією.

Теорема 1 доведена.

Зуваження 1. Система $\wedge(x, y, 0) = x + y - |x - y|, \vee(x, y, 0) = x + y + |x - y|, \bar{x} = -x$ є добре відомою системою R -функцій [1].

Теорема 2. *Нормальні похідні від R -кон'юнкції та R -диз'юнкції, що визначаються формулами (1), не дорівнюють нулю на відповідних півосях.*

Доведення. Знайдемо частинну похідну за змінною x від R -кон'юнкції $\wedge(x, y, q)$ для $q \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \wedge(x, y, q) &= \frac{\partial}{\partial x} |x|^q x + \frac{\partial}{\partial x} |y|^q y - \frac{\partial}{\partial x} |x - y|^{q+1} = \\ &= (q+1)|x|^q - (q+1) \cdot |x - y|^{q-1} (x - y); \\ \frac{\partial}{\partial x} \wedge(x, y, q) \Big|_{x=0} &= (q+1)|y|^{q-1} y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y = 0, \\ (q+1)|y|^{q-1} y \neq 0, & \text{якщо } y \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial}{\partial y} \wedge(x, y, q) \Big|_{y=0} = (q+1)|x|^{q-1} x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \\ (q+1)|x|^{q-1} x \neq 0, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases}$$

Знайдемо частинну похідну за змінною x від R -диз'юнкції $\vee(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y + |x - y|^{q+1}$ для $q \geq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \vee(x, y, q) &= \frac{\partial}{\partial x} |x|^q x + \frac{\partial}{\partial x} |y|^q y + \frac{\partial}{\partial x} |x-y|^{q+1} = \\ &= (q+1)|x|^q + (q+1) \cdot |x-y|^{q-1} (x-y);\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \vee(x, y, q)_{x=0} = (q+1)|y|^{q-1} y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y = 0, \\ (q+1)|y|^{q-1} y \neq 0, & \text{якщо } y \neq 0. \end{cases}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial}{\partial y} \vee(x, y, q)_{y=0} = (q+1)|x|^{q-1} x = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (q+1)|x|^{q-1} x \neq 0, & \text{якщо } x \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. *Запропоновані R -кон'юнкція та R -диз'юнкція є кусково-поліноміальними сплайнами степеня $q+1$, $q \geq 0$ дефекту 1.*

Доведення. Для доведення твердження теореми 3 вказані функції використовують для своєї побудови операцію знаходження абсолютної величини, тобто для їх доданків справедливі співвідношення

$$\begin{aligned}|x|^q x &= \begin{cases} x^{q+1}, & x > 0; \\ -x^{q+1}, & x \leq 0, \end{cases} & |y|^q y &= \begin{cases} y^{q+1}, & y > 0; \\ -y^{q+1}, & y \leq 0, \end{cases} \\ |x-y|^{q+1} &= \begin{cases} (x-y)^{q+1}, & x-y > 0, \\ -(x-y)^{q+1}, & x-y \leq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Тому вся площина R^2 може бути розбита на вісім підобластей

$$D_1 = \{x > 0, y > 0, y \leq x\}, \quad D_2 = \{x > 0, y > 0, y > x\},$$

$$D_3 = \{x < 0, y < 0, y \leq x\}, \quad D_4 = \{x < 0, y < 0, y > x\}, \quad D_5 = \{x < 0, y > 0, y > -x\},$$

$$D_6 = \{x < 0, y > 0, y \leq -x\}, \quad D_7 = \{x > 0, y < 0, y \leq -x\}, \quad D_8 = \{x > 0, y < 0, y > -x\},$$

у кожній з яких R -кон'юнкція та R -диз'юнкція є поліномами степеня $q+1$

$$\wedge(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y - |x-y|^{q+1} = \begin{cases} x^{q+1} + y^{q+1} - (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_1 \\ x^{q+1} + y^{q+1} - (y-x)^{q+1}, & (x, y) \in D_2 \\ (-1)^q x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} - (-1)^{q+1} (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_3 \\ (-1)^q x^{q+1} - (-1)^q y^{q+1} - (-1)^{q+1} (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_4 \\ (-1)^q x^{q+1} + y^{q+1} - (-1)^{q+1} (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_5 \\ x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} - (-1)^{q+1} (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_6 \\ x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} - (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_7 \\ x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} - (-1)^{q+1} (x-y)^{q+1}, & (x, y) \in D_8 \end{cases}$$

$$\vee(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y - |x - y|^{q+1} = \begin{cases} x^{q+1} + y^{q+1} + (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_1 \\ x^{q+1} + y^{q+1} + (y - x)^{q+1}, (x, y) \in D_2 \\ (-1)^q x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} + (-1)^{q+1} (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_3 \\ (-1)^q x^{q+1} - (-1)^q y^{q+1} + (-1)^{q+1} (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_4 \\ (-1)^q x^{q+1} + y^{q+1} + (-1)^{q+1} (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_5 \\ x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} + (-1)^{q+1} (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_6 \\ x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} + (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_7 \\ x^{q+1} + (-1)^q y^{q+1} + (-1)^{q+1} (x - y)^{q+1}, (x, y) \in D_8 \end{cases}$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Система запропонованих R -кон'юнкцій та R -диз'юнкцій \wedge та \vee рекурентними розв'язками наступної системи рівнянь Пуассона:

$$\Delta \wedge(x, y, q + 2) = (q + 3)(q + 2) \wedge(x, y, q), \quad (x, y) \in R^2, \quad q = 0, 1, \dots,$$

$$\Delta \vee(x, y, q + 2) = (q + 3)(q + 2) \vee(x, y, q), \quad (x, y) \in R^2, \quad q = 0, 1, \dots$$

$$\text{Тут } \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Доведення. Напишемо наступну систему співвідношень, що є наслідком записаних вище формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |x|^{q+2} x &= \frac{\partial}{\partial x} \left((q + 3) |x|^{q+2} \right) = (q + 3)(q + 2) |x|^q x, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} |y|^{q+2} y &= \frac{\partial}{\partial y} \left((q + 3) |y|^{q+2} \right) = (q + 3)(q + 2) |y|^q y, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} |x - y|^{q+3} = (q + 3) \frac{\partial}{\partial x} |x - y|^{q+1} (x - y) = (q + 3)(q + 2) |x - y|^{q+1},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} |x - y|^{q+3} = -(q + 3) \frac{\partial}{\partial y} |x - y|^{q+1} (x - y) = (q + 3)(q + 2) |x - y|^{q+1}.$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta \wedge(x, y, q) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \wedge(x, y, q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (|x|^{q+2} x + |y|^{q+2} y - |x - y|^{q+3}) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} |x|^{q+2} x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |y|^{q+2} y - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |x - y|^{q+3} = (q + 3)(q + 2) |x|^q x + \\ &+ (q + 3)(q + 2) |y|^q y - (q + 3)(q + 2) |x - y|^{q+1} = (q + 3)(q + 2) \wedge(x, y, q). \end{aligned}$$

Таким чином, перше твердження теореми 4 доведене.

Для доведення другого твердження, напишемо наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \Delta \vee(x, y, q) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vee(x, y, q) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (|x|^{q+2} x + |y|^{q+2} y + |x-y|^{q+3}) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} |x|^{q+2} x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |y|^{q+2} y + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |x-y|^{q+3} = (q+3)(q+2)|x|^q x + \\ &+ (q+3)(q+2)|y|^q y + (q+3)(q+2)|x-y|^{q+1} = (q+3)(q+2) \vee(x, y, q) \end{aligned}$$

Теорема 4 доведена.

Зауваження 1. Вказані R -функції задовольняють відповідним диференціальним рівнянням Пуассона, праві частини яких є теж R -функціями з меншим порядком і при цьому дорівнюють нулю на відповідних півосях, згідно з теоремою 1. Тобто, ці R -функції можна знаходити за допомогою рекурентної процедури, що полягає у розв'язанні послідовності відповідних диференціальних рівнянь Пуассона.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому автор планує побудувати сплайни від $n, n = 2, 3, \dots$ змінних, які є n -арними R -функціями та дослідити деякі їх застосування..

Висновки. Побудовану повну систему R -функцій класу $C^q(R^2)$, $q = 0, 1, \dots$, яка складається з R -кон'юнкції $\wedge(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y - |x-y|^{q+1}$, R -диз'юнкції $\vee(x, y, q) = |x|^q x + |y|^q y + |x-y|^{q+1}$, $q = 0, 1, \dots$ та R -заперечення $\bar{x} = -x$. Досліджено деякі їх властивості, зокрема доведено, що ці R -функції є сплайнами степеня q дефекту 1. Цей факт може позитивно вплинути на створення загальної теорії поліноміальних сплайнів, заданих різними формулами на різних частинах заданої області. Запропоновано метод їх рекурентної побудови.

Список літератури. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наукова думка, 1982. – 550 с.

Надійшла до редколегії 08.05.2012

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
М.В. АРТЮХ, аспірантка, УПА, Харків

ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ЕЛАСТИЧНОСТІ, ПОБУДОВАНА НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ КОБА-ДУГЛАСА

Запропоновано метод математичного моделювання економічних процесів за допомогою узагальнення формули Коба-Дугласа, в якому виробнича функція має змінні частинні коефіцієнти еластичності.

Предложен метод математического моделирования экономических процессов с помощью обобщенной формулы Кобба – Дугласа, в которой производственная функция имеет переменные частные коэффициенты эластичности.

In this paper the method of mathematical modeling of economic processes using generalized formulas Kob-Douglas production function which has a variable partial elasticity's.

Вступ. В теорії економіко-математичного аналізу розглядаються *виробничі функції Коба-Дугласа, Солоу, з постійною еластичністю заміни (CES)* тощо. В цих функціях використовується поняття *сталого еластичності заміни факторів*. Але при проведенні більш глибокого математичного аналізу даних виробництва можна побачити, що існують важливі з практичної точки зору економічні процеси, в яких коефіцієнти еластичності відповідних їм виробничих функцій є не сталими, а функціями одного або всіх аргументів, від яких залежить виробнича функція.

Аналіз останніх досліджень. Як відомо, виробнича функція Коба-Дугласа має такий вигляд:

$$Y = A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta, \quad (1)$$

де Y – обсяг продукції; K – основний капітал; L – робоча сила; α, β – коефіцієнти еластичності факторів виробництва. Ця виробнича функція широко використовується в економіко-математичному аналізі завдяки відносній простоті функціональної залежності і є достатньо універсальною. Але вона має деякі обмеження: не дозволяє забезпечити задану точність відновлення економічного процесу при фіксованому числі даних маркетингового дослідження. Нижче ми покажемо, що виробнича функція, яка відповідає даним маркетингового дослідження, наведеного в статті *Коба-Дугласа*, взагалі кажучи, не відповідають формулі, яку використовував *Коб* і *Дуглас*, оскільки в даній роботі ми покажемо, що даним, якими користувалися *Коб* і *Дуглас* більш адекватно відповідає формула зі змінними коефіцієнтами еластичності. Тому для більш точного аналізу виробництва виникає необхідність модифікувати функцію Коба-Дугласа.

Постановка задачі. В даній статті пропонується новий вираз для виробничої функції і метод знаходження параметрів, які входять в цю функцію, за допомогою даних економіки США за 1899 – 1922рр., наведених в статті Коба-Дугласа [1], дивись також [2] (табл. 1). Основною характерною відмінністю запропонованої в даній роботі виробничої функції є те, що її частинні коефіцієнти еластичності можуть бути функціями обох факторів L та K .

Таблиця

Експериментальні дані Коба-Дугласа.

Рік	Обсяг виробництва	Робоча сила	Капітал
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

У формулі (1) Коб і Дуглас припускали, що $\alpha + \beta = 1$, тобто $Y = A \cdot L^\alpha \cdot K^{1-\alpha}$, і отримали $A = 1,01$; $\alpha = 0,75$; $\beta = 0,25$, тобто

$$Y = 1,01 \cdot L^{0,75} \cdot K^{0,25}. \quad (2)$$

Якщо ж не вимагати, щоб $\alpha + \beta = 1$, то в результаті отримаємо за методом найменших квадратів $A = 0,795$; $\alpha = 0,828$; $\beta = 0,223$. Тобто отримаємо таку функцію:

$$Y = 0,795 \cdot L^{0,828} \cdot K^{0,223}. \quad (3)$$

Згідно цих даних в моделі отримали такі відхилення розрахункових значень обсягів виробництва від фактичних, як показано на рис. 1, де i – роки,

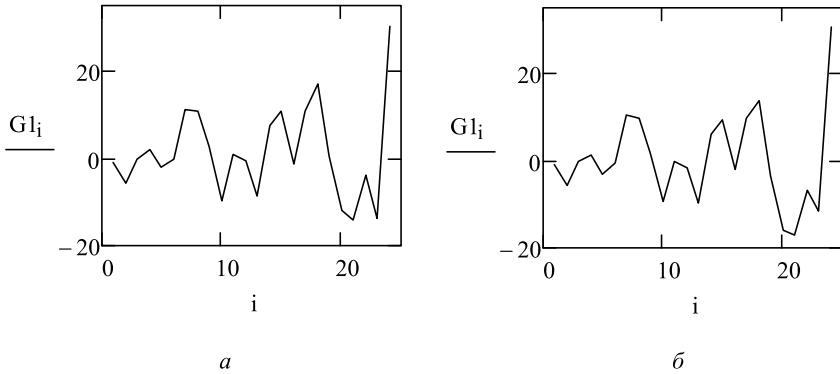


Рисунок 1 – Графіки відхилення розрахункового обсягу виробництва від фактичного: для функції (2) – а, для функції (3) – б.

$G1_i$ – відхилення розрахункового обсягу виробництва від фактичного в кожному році.

Математична модель. Нижче припустимо, що виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y(L, K, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}, \quad (4)$$

де

$$f(L, K, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (5)$$

$$g(L, K, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (6)$$

$$\varphi_i(L) = L^i; \quad \varphi_m(K) = K^m;$$

A, a_{im}, b_{im} – невідомі параметри (коефіцієнти); M, N – параметри.

Теорема. Для знаходження невідомих A, a_{im}, b_{im} з умов

$$Y_p(L_p, K_p, a, b) = A \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)}, \quad p = \overline{1, Q}; \quad Q = 24 \quad (7)$$

методом найменших квадратів

$$j(C) = \sum_{p=1}^Q \left(A \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)} - Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{A, a_{im}, b_{im}}$$

матриця невідомих коефіцієнтів

$$C = [\ln A \ a_{00} \ a_{10} \ a_{01} \ \dots \ a_{MN} \ b_{00} \ b_{10} \ b_{01} \ \dots \ b_{MN}]$$

визначається за формулою:

$$C = (B \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot Y1,$$

де B – матриця з Q рядками наступного вигляду:

$$B_p = \left[1 \quad \ln L_p \quad (\ln L_p)L_p \quad (\ln L_p)K_p \quad \dots \right. \\ \left. \dots (\ln L_p)K_p^M L_p^N \quad \ln K_p \quad (\ln K_p)L_p \quad (\ln K_p)K_p \quad \dots \quad (\ln K_p)K_p^M L_p^N \right]^T$$

а $Y1_p = \ln Y_p$, $p = \overline{1, Q}$, що отримується, якщо

$$f(L, K, a) = a_{00} + a_{10}L + a_{01}K + a_{11}LK + \dots + a_{MN}L^M K^N,$$

$$g(L, K, b) = b_{00} + b_{10}L + b_{01}K + b_{11}LK + \dots + b_{MN}L^M K^N.$$

Доведення. Прологарифмувавши вираз (4), підставимо в нього вирази (5) та (6). Отримаємо:

$$\ln Y = \ln A + (\ln L) \cdot f(L, K, a) + (\ln K) \cdot g(L, K, b).$$

Підставляємо в цю рівність значення K_p, L_p, Y_p :

$$\ln Y_p = \ln A + (\ln L_p) \cdot f(L_p, K_p, a) + (\ln K_p) \cdot g(L_p, K_p, b), \quad p = \overline{1, Q}. \quad (8)$$

Систему (8) можна переписати у наступному вигляді:

$$jj(C) = \\ = \sum_{p=1}^Q \left(\ln A + (\ln L_p) \cdot f(L_p, K_p, a) + (\ln K_p) \cdot g(L_p, K_p, b) - \ln Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{\ln A, a_{im}, b_{im}}$$

або у більш детальному вигляді

$$\ln A + \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} (\ln L_p)^i K_p^m + \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} (\ln K_p)^i L_p^m = \ln Y_p = Y1_p, \quad (9) \\ p = \overline{1, Q}.$$

Звідси маємо: $B^T \cdot C = Y1$, що приводить до системи:

$$(B \cdot B^T) \cdot C = B \cdot Y1,$$

з якої отримаємо доведення теореми:

$$C = (B \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot Y1.$$

Теорему доведено.

Обчислювальний експеримент. Результати обчислювального експерименту, проведеного за даним методом з використанням сукупності даних Коба-Дугласа, наведені в таблиці. В результаті при $M = 1; N = 1$ для невідомих коефіцієнтів отримані наступні значення:

$$\ln A = 48,021; \quad a_{00} = -15,515; \quad a_{10} = 0,074; \quad a_{01} = 0,06; \quad a_{11} = -2,244 \times 10^{-4}; \\ b_{00} = 3,399; \quad b_{10} = -0,059; \quad b_{01} = -0,43; \quad b_{11} = 1,866 \times 10^{-4}.$$

Таким чином, отримали наступну функцію:

$$Y = e^{48,021} \times L^{-15,515+0,074L+0,06K-2,244 \cdot 10^{-4} L \cdot K} \times K^{3,399-0,059L-0,43K+1,866 \cdot 10^{-4} L \cdot K} \quad (10)$$

Для цієї функції маємо такий графік відхилень розрахункових значень обсягів виробництва від фактичних (дивись рис. 2):

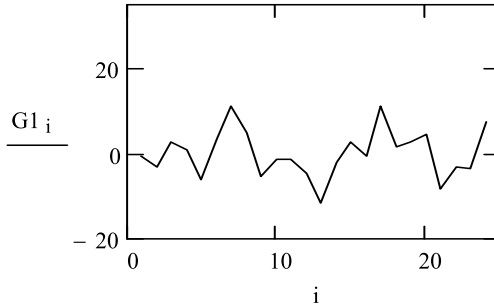


Рисунок 2 – Графік відхилення для нової функції.

де i – роки; $G1_i$ – відхилення розрахункового обсягу виробництва від фактичного в кожному році.

На рис. 2 бачимо, що функція (10) набагато краще наближується до фактичних значень, ніж функції (2) та (3) (дивись рис. 1).

Знайдемо середньоквадратичне відхилення для функцій (2), (3), (10):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{Q} \cdot E},$$

де $Q = 24$ – кількість років,

$$E = \sum_{p=1}^Q \left(\left(\ln A + \alpha \cdot \ln L_p + \beta \cdot \ln K_p \right) - \ln Y_p \right)^2 \quad \text{– для функцій (2), (3)}$$

або

$$E = \sum_{p=1}^Q \left(\left(\ln A + f(L_p, K_p, a) \cdot \ln L_p + g(L_p, K_p, b) \cdot \ln K_p \right) - \ln Y_p \right)^2 \quad \text{– для функції (10).}$$

Таким чином, ми розраховали середньоквадратичне відхилення, яке склало для функції (2) – $\sigma_1 = 0,054$, для функції (3) – $\sigma_2 = 0,053$, та для функції (10) – $\sigma_3 = 0,034$, і це також підтверджує, що функція (10) набагато краще наближується до фактичних значень, ніж функції (2) та (3).

Згідно з теоремою (3) статті [3] знайдемо частинні коефіцієнти еластичності для функції (10). Візьмемо похідні від функцій $f(L, K, a)$ та $g(L, K, b)$:

$$DF(L, K, a) = \frac{d}{dK} f(L, K, a),$$

$$DG(L, K, b) = \frac{d}{dL} g(L, K, b).$$

Згідно з формулою (7) статті [3] знайдемо частинні коефіцієнти еластичності по L та по K , які є дивідірами другого роду по L та по K відповідно [3,5]:

$$E_L(L, K, a, b) = \left\langle \frac{\delta Y(L, K, a, b)}{\delta L} \right\rangle = f(L, K, a) + L \cdot \left(\int \frac{DG(L, K, b)}{K} dK \right)$$

$$E_K(L, K, a, b) = \left\langle \frac{\delta Y(L, K, a, b)}{\delta K} \right\rangle = g(L, K, b) + K \cdot \left(\int \frac{DF(L, K, a)}{L} dL \right)$$

Спростивши ці функції отримаємо:

$$E_L(L, K, a, b) = K \cdot a_{10} + L \cdot a_{01} + a_{00} + K \cdot L \cdot a_{11} + K \cdot L \cdot b_{11} + L \cdot \ln K \cdot b_{01}, \quad (11)$$

$$E_K(L, K, a, b) = K \cdot b_{10} + L \cdot b_{01} + b_{00} + K \cdot L \cdot a_{11} + K \cdot L \cdot b_{11} + K \cdot \ln L \cdot a_{10}, \quad (12)$$

де E_L, E_K – частинні коефіцієнти еластичності для функції (10) по L та по K відповідно.

Таким чином частинні коефіцієнти еластичності за змінними L та K у формулі (4) – (6) згідно з твердженнями роботи [3] є функціями, які залежать від змінних L та K , оскільки коефіцієнти $a_{11} = -2,244 \times 10^{-4}$ та $b_{11} = 1,866 \times 10^{-4}$ порівняно з коефіцієнтами $a_{00} = -15,515$ та $b_{00} = 3,399$ є відносно малими.

Висновки. Таким чином, в даній роботі вперше запропоновано проводити математичне моделювання економічних процесів за допомогою узагальнення формули Коба-Дугласа, в якому виробнича функція має частинні коефіцієнти еластичності за змінною L та за змінною K не сталі, а змінні. Запропоновано метод побудови відповідної регресійної моделі і вперше показано за допомогою обчислювального експерименту, що в узагальненій функції Коба-Дугласа, параметри якої знайдені за допомогою даних, які використані *Кобом* і *Дугласом* в їх спільній роботі [1], приводять до змінних частинних коефіцієнтів еластичності, кожний з яких залежить від обох змінних.

Список літератури: 1. *Cobb C.W., Douglas P.H.* A Theory of Production // American Economic Review. – 1928. – December. – p. 139-165. 2. *Jesus Felipe, F. Gerard Adams* A Theory of Production. The estimation of the Cobb-Douglas function: a retrospective view // Eastern Economic Journal. – 2005. – Summer, Vol. 31, №3. – p. 427 – 445. 3. *Артюх М.В., Литвин О.М.* Деякі теореми про виробничі функції від двох змінних зі змінними коефіцієнтами еластичності та їх застосування // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №2. – с. 23-29. 4. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с. 5. *Литвин О.М.* Дивідіральні та мультигральні числення. Монографія. – К.: Наук. думка, 2006. – 144 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2012

О.О. ЛИТВИН, канд. фіз.-мат. наук, доц., УПА, Харків;
С.І. КУЛИК, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.В. ТКАЧЕНКО, нач. відділу, ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя;
С.Ю. МАТВЄЄВА, аспірант, УПА, Харків;
О.О. ЧЕРНЯК, аспірант, УПА, Харків

ОПЕРАТОРИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЩО ЗБІГАЮТЬСЯ З НЕЮ НА ЗАДАНИХ ВІДРІЗКАХ ОБЛАСТІ НАБЛИЖЕННЯ

Запропоновано метод побудови оператора $s(f; x)$, що інтерполює функцію $f(x)$ однієї змінної і збігається з нею на заданих відрізках області наближення. Він може бути використаний для відновлення поверхонь між системою перетинних смуг. Досліджено його властивості.

Предложен метод построения оператора $s(f; x)$, который интерполирует функцию $f(x)$ одной переменной и совпадает с ней на заданных отрезках области приближения. Он может использоваться для восстановления поверхностей между системой пересекающихся полос. Сформулирована и доказана теорема о свойствах этого оператора.

The method of the building an operator $s(f; x)$, which interpolate $f(x)$ in given points and equal given functions on given sub intervals is proposed. This method can be used to restore surfaces between a systems of intersecting bands. Formulate and prove a theorem about the properties of this operator.

Вступ. В працях [1] – [7] досліджувались оператори відновлення поверхні між смугами, якщо інформація про наближувану функцію задається на системі смуг (взагалі кажучи перетинних смуг). Цей метод наближення функцій двох змінних називається *методом інтерстрипації* (inter – між, stripe – смуга) і є частинним випадком *методу інтерлокації* [8] – [15]. У випадку, коли товщина смуг дорівнює нулю, тобто якщо $\beta_k = \alpha_k$, то смуги перетворюються в лінії. Таким чином, отримувана інформація про наближувану функцію задається її слідами на системі ліній, а між лініями потрібно відновити саму функцію.

На практиці часто виникають ситуації, коли деяка лінія задається дискретним набором точок (x_k, y_k) , $k = \overline{1, m}$, і крім того відомо, що наближуюча лінія на деякому відрізку повинна мати наперед задану форму (наприклад, бути частиною кола, параболи тощо), а також мати неперервні похідні до деякого порядку $r \geq 0$. Така ситуація виникає, наприклад, при описі ліній поверхні деяких деталей авіадвигунів (лопаток турбін тощо).

Тому актуальною є задача побудови операторів наближення функцій $s(f; x)$, які на заданих відрізках мають задані аналітичні вирази, а між цими відрізками інтерполюють наближувану функцію у заданій системі точок.

Постановка задачі. Вважаємо, що функція однієї змінної $y = f(x)$, $f(x) \in C^r [0, 1]$, $r \geq 0$, задається в точках $x = x_i$, $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, а також припустимо, що функція $y = f(x)$ задана точно відповідними аналітичними виразами $\varphi_p(x)$, $p = \overline{1, n}$ на деяких інтервалах, що не включають вказані вузли інтерполяції. Задача полягає у побудові оператора $s(x) = s(f; x)$ з наступними властивостями:

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

і, крім того, $s(x)$ збігається з функціями $\varphi_p(x)$, $p = 1, \dots, m$ на кожному з інтервалів $[\alpha_p, \beta_p] \subset [0, 1]$, $p = 1, \dots, n$, тобто:

$$s(x) = \varphi_p(x), \quad x \in [\alpha_p, \beta_p], \quad p = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Для цього узагальнено метод інтерстрипації функцій [1–3].

Основні твердження роботи. Оператор, що розв'язує поставлену задачу, будемо шукати у вигляді

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x), x \in [0, \alpha_1), \\ \varphi_1(x), x \in [\alpha_1, \beta_1], \\ s_1(x), x \in [\beta_1, \alpha_2), \\ \dots \\ s_{k-1}(x), x \in [\beta_{k-1}, \alpha_k), \\ s(x) = \varphi_k(x), x \in [\alpha_k, \beta_k], \\ s_k(x), x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}), \\ \dots \\ s(x) = \varphi_n(x), x \in [\alpha_n, \beta_n], \\ s_n(x), x \in (\beta_n, 1], \end{cases} \quad (3)$$

де функції $s_p(x)$, $p = \overline{0, n}$, – поліноми або сплайни, які визначаються з наступних умов.

Якщо $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_0} < \alpha_1$ то $s_0(x)$ повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями:

$$\begin{aligned} s_0(x_i) &= f(x_i), \quad i = \overline{0, i_0}; \\ s_0^{(p)}(\alpha_1) &= \varphi_1^{(p)}(\alpha_1), \quad p = \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо $\beta_1 < x_{i_0+1} < x_{i_0+2} < \dots < x_{i_1} < \alpha_2$ то $s_1(x)$ повинен бути інтерполя-

ційним поліномом (або сплайном) з властивостями

$$\begin{aligned} s_1^{(p)}(\beta_1) &= \varphi_1^{(p)}(\beta_1), p = \overline{0, r}, \\ s_1(x_i) &= f(x_i), i = \overline{i_0 + 1, i_1}, \\ s_1^{(p)}(\alpha_2) &= \varphi_1^{(p)}(\alpha_2), p = \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічним чином можна записати умови для побудови відповідних поліномів (або сплайнів) на інтервалах $[\beta_2, \alpha_3]$, $[\beta_3, \alpha_4]$, ..., $[\beta_{n-1}, \alpha_n]$.

Якщо $\beta_{k-1} < x_{i_{k-1}+1} < x_{i_{k-1}+2} < \dots < x_{i_k} < \alpha_{i_k}$, поліном $S_k(x)$ $x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}]$ буде визначатися з умов

$$\begin{aligned} s_k(x_i) &= f(x_i), i = \overline{i_k + 1, i_{k+1}}, \\ s_k^{(p)}(\beta_k) &= \varphi_k^{(p)}(\beta_k), p = \overline{0, r}, \\ s_k^{(p)}(\alpha_{k+1}) &= \varphi_k^{(p)}(\alpha_{k+1}), p = \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (6)$$

На кінець запишемо відповідну формулу на інтервалі $[\beta_n, 1]$.

Якщо $x_{i_n} < x_{i_n+1} < \dots < x_m = 1$, то $s_n(x)$ повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями

$$\begin{aligned} s_n^{(p)}(\beta_n) &= \varphi_1^{(p)}(\beta_n), p = \overline{0, r}; \\ s_n(x_i) &= f(x_i), i = \overline{i_n, m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема. Для кожної $f(x) \in C^r[0, 1]$ функція $s(x)$, що визначена у вигляді формули (3), в якій $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x)$ визначаються формулами (4) – (7), задовольняє властивостям (1), (2) і є r раз диференційовною функцією: $s(x) \in C^r[0, 1]$.

Доведення. Згідно з означенням сплайну (3) доведення властивостей (1) та (2) витікає з алгоритму побудови функцій $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x)$. Тому доведемо лише те, що $s(x) \in C^r[0, 1]$. Для доведення цієї властивості слід довести, що

$$\begin{aligned} s^{(p)}(\alpha_j - 0) &= s^{(p)}(\alpha_j + 0) = s^{(p)}(\alpha_j), p = \overline{0, r}, j = \overline{1, n}, \\ s^{(p)}(\beta_j - 0) &= s^{(p)}(\beta_j + 0) = s^{(p)}(\beta_j), p = \overline{0, r}, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо врахувати, що

$$\begin{aligned} s^{(p)}(\alpha_j - 0) &= s_{j-1}^{(p)}(\alpha_j), \quad s^{(p)}(\alpha_j + 0) = s^{(p)}(\alpha_j) = f^{(p)}(\alpha_j), \quad p = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n}, \\ s^{(p)}(\beta_j - 0) &= s_{j+1}^{(p)}(\beta_j) = f^{(p)}(\beta_j), \quad s^{(p)}(\beta_j + 0) = s_j^{(p)}(\beta_j), \quad p = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

то рівності (8) стають очевидними.

Теорема доведена.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому планується виконати узагальнення запропонованого методу на випадок наближення функцій багатьох змінних.

Висновки. Запропоновано метод побудови операторів $s(f;x)$, що інтерполюють функції $f(x) \in C[a,b]$ у заданій системі точок і збігаються з $f(x)$ на заданій системі підінтервалів інтервалу $[a,b]$. Такі оператори можуть бути використані для наближення поверхонь в методі інтерстрипації функцій, заданих на системі паралельних або перетинних смуг, при описі поверхонь деяких лопаток авіадвигунів тощо. Досліджено їх властивості.

Список літератури 1. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с. **2.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544с. **3.** *Литвин О.М. Матвєєва С.Ю.* Метод восстановления поверхности между полосами при помощи информации о поверхности на взаимно перпендикулярных полосах //Международный научный журнал Управляющие системы и машины информационные технологии. № 1 – 2011 с. 33-40. **4.** *Литвин О.М., Матвєєва С.Ю.* Інтерлінація та інтерфлетация функцій багатьох змінних та її застосування у картографії // Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: 36. наук. пр. – К.: ДНВП «Картографія», 2005. – 2. – С. 22-24. **5.** *Литвин О.М., Матвєєва С.Ю., Межуєв В.І.* Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // УСиМ. – 2010. – №3. – С. 33-47. **6.** *Матвєєва С.Ю.* Метод побудови цифрових карт за допомогою інтерлінації та інтерфлетации функцій // Питання оптимізації обчислень, 2005. – 145 с. **7.** *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетация функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – № 4. – С. 61-82. **8.** *Рвачев В.Л., Толоч А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Новые подходы к построению уравнений трехмерных locusов с помощью R-функций // Вісн. Запоріж. д. ун-ту. – Запоріжжя, 2000. – №2. – С. 119-130. **9.** *Рвачев В.Л., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Построение уравнений locusов в 3D с помощью R-функций //Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – №2. – С. 158-164. **10.** *Рвачев В.Л., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Интерлокационные формулы при моделировании задач Плато и Софи Жермен // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №3. – С. 126-128. **11.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В.* Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрий // Мат. методы и физ.-мех.поля. – 1988. – 41, №1. – С 146-159. **12.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В.* Обобщенные интерполяционные формулы Лагранжа – Эрмита на произвольных locusах (интерлокационные операторы теории R-функций) // Пробл. машиностроения. – 1998. – т. 1, №3-4. – С. 150-166. **13.** *Рвачев В.Л., Шапиро В., Шейко Т.И.* Применение метода R-функций к построению уравнений locusов, обладающих симметрией // Электромагниты, волны и электронные системы. – 1999. – т.4, № 4. – С. 4-20. **14.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И.* Введение в теорию R-функций // Пробл. машиностроения. – 2001. – т.4, №1-2. – С. 46-58. **15.** *Максименко-Шейко К.В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей // монография. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

Надійшла до редколегії 27.03.2012

М.В. МАКСИМОВ, д-р техн. наук, проф., ОНПУ, Одесса;
А.И. БРУНЕТКИН, канд. техн. наук, ст. преп., ОНПУ, Одесса;
Т.С. ДОБРОВОЛЬСКАЯ, аспирант, ОНПУ, Одесса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ЕМКОСТЯХ СЛОЖНЫХ ФОРМ

Наведено простий (алгебраїчний) вираз, який було отримано за допомогою методу інтегральних коефіцієнтів, для визначення власної частоти коливань рідини з вільною поверхнею в ємностях складних форм. На прикладі циліндричної вертикальної ємності наведено збіжність структури отриманого виразу та коефіцієнтів, що входять у нього, із відповідними величинами при рішенні аналогічної задачі в варіаційній постановці. Для випадку коливань рідини між коаксіальними циліндрами визначена в загальному вигляді величина заповнення, при якій перестає оказувати вплив нижнє днище. Виконано порівняння отриманих результатів з рішенням варіаційної задачі. Визначено вплив нижнього днища ємностей на власну частоту коливань рідини.

Приведено простое (алгебраическое) выражение, полученное с помощью метода интегральных коэффициентов, для определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях сложных форм. На примере цилиндрической вертикальной емкости показано совпадение структуры полученного выражения и коэффициентов, входящих в него, с соответствующими величинами при решении аналогичной задачи в вариационной постановке. Для случая колебаний жидкости между коаксиальными цилиндрами определена в общем виде величина заполнения, начиная с которой перестает оказывать влияние нижнее днище. Выполнено сравнение полученных результатов с решением вариационной задачи. Определено влияние нижнего днища емкостей на собственную частоту колебаний жидкости.

The simple (algebraic) expression received with the help of a method of integrated factors for definition of own frequency of fluctuations of a liquid with a free surface in capacities of complex forms is resulted. By the example of cylindrical vertical capacity concurrence of structure of the received expression and the factors which are included in it with corresponding sizes is shown at the decision of a similar task in variation statement. In case of fluctuations of a liquid between coaxial cylinders, the size of filling from which the low bottom ceases to influence is determined in a general view. Comparison of the received results with the decision of a variation task is executed. Influence of the low bottom of capacities on own frequency of fluctuations of a liquid is determined.

Введение. Задачи, связанные с определением собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм, остаются актуальными на протяжении уже длительного времени. Проблеме стоячих волн в ограниченном объеме жидкости со свободной поверхностью внутри неподвижного бассейна одной из первых была посвящена работа М.В. Остроградского [1], представленная им Парижской Академии наук в 1826 г. Работа [2] Крылова А.Н., о которой в 1913 году он прочел доклад «О цистернах Фрама для умерения качки судов» в Русском физико-химическом обществе, лежит в основе теории успокоителей качки корабля. Решение целого ряда задач опубликовано в связи с другими вопросами теории корабля и

гидростроительства [3,4]. Проблемы, связанные с движением жидкости со свободной поверхностью освещались и при решении задач транспортировки жидкостных грузов [5-7], при действии на емкости сейсмических нагрузок [8-10]. Особо большое внимание на решении подобных задач было сосредоточено при проектировании авиационной и ракетной техники [11-18]. Большое количество результатов исследований опубликовано в трудах Всесоюзных конференции по теории оболочек и пластин, семинаров («Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью», Томск), симпозиумов («Колебания упругих конструкций с жидкостью», Новосибирск). Исследовалось движение жидкости в емкостях в виде прямоугольных параллелепипедов, цилиндрических, конических, торообразных емкостях, при наличии центральных тел, в емкостях вращения произвольной формы и т.д. Использовались аналитические, численно-аналитические, численные, экспериментальные методы решения. Не потерял интерес к этим вопросам и в настоящее время, что проявляется в продолжающейся публикации статей [7], [18-20], защите диссертаций [21-23], книг [15]. Столь пристальное и длительное внимание свидетельствует о важности исследуемых явлений. Изобилие же публикаций говорит о сложности решаемых задач и отсутствии до настоящего времени ответов на ряд, в первую очередь практически важных, вопросов.

Во многих работах описывается лишь метод, с помощью которого задача может быть решена. При появлении необходимости в результатах такого решения потребитель (исследователь, проектировщик) вынужден самостоятельно решать задачу, используя непростые методы. Если же задача доведена до решения, то, зачастую, результаты выступают лишь в качестве иллюстрации возможностей метода или не выполнено сравнение полученных результатов и экспериментальных данных. В ряде работ сравнение результатов расчетов и экспериментальных данных проводится на качественном уровне без количественной оценки их адекватности.

К редкому исключению можно отнести результаты экспериментальной работы [24], в которой указан метод проведения эксперимента, записана аппроксимационная зависимость для обрабатываемых экспериментальных данных, указано среднее квадратичное отклонение экспериментальных значений от рассчитываемых по предлагаемой зависимости. К сожалению, в этой работе исследовалась только одна форма емкости и одно ее расположение. Кроме того, в основе аппроксимационной зависимости лежит статистическая модель, что затрудняет ее использование в экспериментальных исследованиях для других форм емкостей.

При проектировании технических систем в ряде случаев достаточно выполнить лишь оценочные расчеты с использованием выражений типа приведенных в [24] не прибегая к точному, дорогостоящему решению. В тоже время величина вносимой при таком подходе погрешности должна быть оценена. В первую очередь это относится к начальным стадиям проектирования. Кроме того, в проектно-конструкторских, поверочных расчетах используе-

мые исходные данные всегда получены с определенной погрешностью. Если собственные частоты колебаний жидкости в этих расчетах являются не единственными исходными данными и погрешность их определения не превосходит погрешности других данных, то и в этом случае использование упрощенных выражений для их вычисления будет обосновано.

При таком подходе для описания процессов используются математические модели, относящиеся к верхним уровням иерархической структуры модели [25], на которых законы сохранения, переноса, состояния, а также замыкающие соотношения и краевые условия входят в интегральной форме. Для решения записанных в интегральной форме уравнений может быть применен метод интегральных коэффициентов (МИК) [26].

Интегральный коэффициент (ИК) $\xi_{P_i, Q}$ некоторой искомой переменной P_i в пространстве Q (геометрические размеры – время) определяется соотношением

$$\zeta_{P_i, Q} = \frac{\delta \tilde{P}_i}{P_i^\Delta} \in [0, 1]; \quad \delta \tilde{P}_i = \frac{1}{V_{\text{эф}}} \cdot \int_{Q_{\text{эф}}} \delta P_i(q) \cdot dq; \quad (1)$$

$$\delta P_i = P_i - P_{i \min}; \quad P_i^\Delta = P_{i \max} - P_{i \min}; \quad Q_{\text{эф}} \in Q;$$

где \tilde{P}_i – среднеинтегральная величина в пространстве Q ; $V_{\text{эф}}$ – объем подпространства $Q_{\text{эф}}$, в котором δP_i имеет существенное значение; $P_{i \min}$, $P_{i \max}$ – минимальное и максимальное значения величины P_i соответственно.

Интегральный коэффициент пространства или отдельных его подпространств определяется следующим образом

$$\xi_{Q_{\text{эф}}} = \frac{V_{\text{эф}}}{\prod_j q_{j \text{эф}}^\Delta} \in [0, 1]; \quad q_j^\Delta = q_{j \text{эф} \min}^\Delta; \quad (2)$$

где $V_{\text{эф}}$ – объем эффективного пространства; $\prod_j q_{j \text{эф}}^\Delta$ – объем куба, охватывающего эффективное пространство.

Из записанного выше следует, что интегральные коэффициенты ζ и ξ являются нормированными величинами, характеризующими полноту переменной P_i в пространстве $V_{\text{эф}}$ и полноту эффективного пространства в пространстве куба с гранями $q_{j \text{эф}}^\Delta$.

Используя ИК, уравнения сохранения для любой области пространства Q можно записать в форме алгебраических уравнений относительно масштабов переменных P_i^Δ и координат q_j^Δ .

$$\sum_i P_i^\Delta \cdot \zeta_{PQ} \cdot \xi_Q \cdot \prod_j q_j^\Delta = 0. \quad (3)$$

Через эти масштабы можно выразить любой интеграл, входящий в рассматриваемую ММ.

Для предварительных результатов ИК могут быть оценены на интуитивном уровне или методом экспертных оценок. Для более точных результатов ИК (а точнее их комплексы) могут быть определены из немногочисленных экспериментов.

Описание расчётного метода. Рассмотрим движение жидкости со свободной поверхностью. В качестве примера на рис. 1 представлена картина движения жидкости в вертикальной цилиндрической емкости, а так же характерные размеры и соотношения, значимые для рассматриваемого процесса. Как показывают экспериментальные исследования и расчеты, существует $h \geq h_{эф}$, при которой величина заполнения емкости (глубина) перестает оказывать влияние на характер движения свободной поверхности (частоту колебаний). Если, например, рассматривать колебания свободной поверхности жидкости без ее разрушения в вертикальной цилиндрической емкости (соответствует отклонению поверхности от положения равновесия до 400), $h_{эф}$ приблизительно равно радиусу емкости. Тогда в обезразмеренном виде можно считать, что

$$\bar{h}_{эф} = \frac{h_{эф}}{l_2} = \begin{cases} \bar{h}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1, \end{cases} \quad (4)$$

η^Δ , ν^Δ – масштабы амплитуды и скорости колебаний жидкости; $V_{эф}$, $h_{эф}$ – эффективные объем и глубина колебаний жидкости; l_2, l_3 – характерные размеры свободной поверхности в направлении осей x_2 и x_3 (перпендикулярно плоскости чертежа) соответственно; Σ, Σ' – следы свободной поверхности при движении и невозмущенном положении жидкости; M – след меридиональной плоскости.

Пренебрегая диссипацией энергии при колебании жидкости, можно получить верхнюю оценку частоты колебаний. Закон сохранения энергии для колебаний можно записать в виде

$$\Delta K = \Delta U, \quad (5)$$

где ΔK – изменение кинетической энергии; ΔU – изменение потенциальной энергии.

Полагая минимум потенциальной энергии при $\eta = 0$, а минимум кинетической

тической при $\nu = 0$, получим

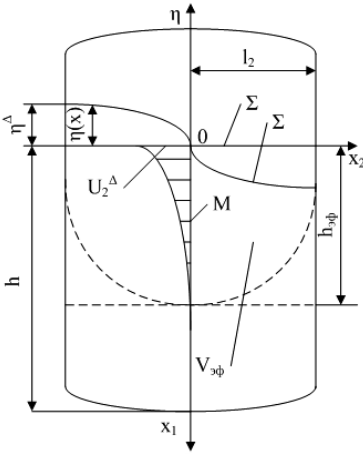


Рисунок 1 – Характерная картина колебаний жидкости в емкости.

$$\Delta K = \rho \cdot \int_V \frac{v^2}{2} dV; \quad (6)$$

$$\Delta U = \rho \cdot ng \iint_{S_\Sigma} \frac{\eta^2}{2} dx_2 dx_3;$$

С учетом (1) и (2) выражения (6) записываются в виде

$$\rho \cdot \int_V \frac{v^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \left(v^\Delta \cdot \zeta_{v_2 V_{эф}} \right)^2 \times \zeta_{v_{эф}}^\xi \cdot h_{эф} \cdot 2l_2 \cdot 2l_3; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{ng}{2} \iint_{S_\Sigma} \eta^2 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = \\ = \frac{\rho \cdot n_1 g}{2} \left(\eta^\Delta \cdot \zeta_{\eta S_\Sigma} \right)^2 \cdot \zeta_{S_\Sigma}^\xi \cdot 2l_2 \cdot 2l_3; \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь g – ускорение свободного падения; n – перегрузка.

В уравнении (7) учтено, что интегрировать практически нужно не по всему объему жидкости, а только по его части – $V_{эф}$, где скорость жидкости имеет существенное значение.

Приравняв уравнения (7) и (8) в соответствии с (5), получим

$$\left(\frac{\eta^\Delta}{v^\Delta} \right)^2 = \frac{\zeta_{v_2 V_{эф}}^2 \cdot \zeta_{v_{эф}}^\xi \cdot h_{эф}}{ng \cdot \zeta_{\eta S_\Sigma}^2 \cdot \zeta_{S_\Sigma}^\xi} \Rightarrow \frac{\eta^\Delta}{v^\Delta} = \frac{\zeta_{v_2 V_{эф}}}{\zeta_{\eta S_\Sigma}} \cdot \sqrt{\frac{\zeta_{v_{эф}}^\xi \cdot h_{эф}}{\zeta_{S_\Sigma}^\xi \cdot ng}}. \quad (9)$$

Закон сохранения массы может быть записан в виде

$$\int_t^{t+T/4} \iint_S v \cdot dt \cdot dx_1 \cdot dx_3 = \frac{1}{2} \iint_{S_\Sigma} |\eta| \cdot dx_2 \cdot dx_3. \quad (10)$$

Последнее уравнение выражает то положение, что за четверть периода колебаний через контрольную поверхность S_m (сечение массы жидкости меридиональной плоскостью) пройдет объем жидкости, равный половине суммы увеличения объема ее, с одной стороны, и уменьшения с другой. С использованием ИК это уравнение можно записать в виде:

$$v_2^\Delta \cdot \zeta_{v_2 S_m T/4} \cdot \frac{T}{4} \cdot \zeta_{S_m}^\xi \cdot h_{эф} \cdot 2l_3 = \frac{1}{2} \eta^\Delta \cdot \zeta_{\eta S_m} \cdot \zeta_{S_\Sigma}^\xi \cdot 2l_2 \cdot 2l_3 \quad (11)$$

или

$$\frac{\eta^\Delta}{\nu_2^\Delta} = \frac{\zeta_{\nu_2 S_M T/4} \cdot T \cdot \xi_{S_M} \cdot h_{\text{эф}} \cdot l_3}{4 \cdot \zeta_{\eta S_M} \cdot \xi_{S_\Sigma} \cdot l_2 \cdot l_3}. \quad (12)$$

Здесь T – период колебаний свободной поверхности жидкости.

Учитывая (9) из (12) следует:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{ng}{l_2}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{l_2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta_{\nu_2 S_M T/4}}{\zeta_{\nu V_{\text{эф}}}} \cdot \frac{\xi_{S_M}}{\sqrt{\xi_{V_{\text{эф}}} \xi_{S_\Sigma}}}$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{l_2}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{l_2}} \cdot k_\omega, \quad (13)$$

$$k_\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta_{\nu_2 S_M T/4}}{\zeta_{\nu V_{\text{эф}}}} \cdot \frac{\xi_{S_M}}{\sqrt{\xi_{V_{\text{эф}}} \xi_{S_\Sigma}}}. \quad (14)$$

Если в выражении (11) учесть, что $\xi_{S_\Sigma} \cdot 2l_2 \cdot 2l_3$ отображает площадь сечения и для цилиндрической емкости может быть записано в виде $\pi \cdot R^2$, а составляющая $h_{\text{эф}} \cdot 2l_3 = h_{\text{эф}} \cdot 2R$, то выполнив преобразования (11), (12), (13), (14) получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{R}} \cdot k_\omega \quad (15)$$

с таким же выражением для k_ω , как и в (14). Здесь R – радиус емкости.

Как отмечалось выше (4) при $h_{\text{эф}} \geq R$ в выражении (15) можно положить $h_{\text{эф}} / R = 1$. В противном случае $h_{\text{эф}} / R$ может быть аппроксимировано выражением $1 - e^{-k_\phi \bar{h}}$, где $\bar{h} = h_{\text{эф}} / R$, k_ϕ – коэффициент формы емкости

Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{\bar{h}_{\text{эф}}} \cdot k_\omega, \quad (16)$$

где

$$\bar{h}_{\text{эф}} = \begin{cases} 1 - e^{-k_\phi \bar{h}}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1. \end{cases} \quad (17)$$

Такой подход может быть применен для емкостей различных форм. Коэффициент k_ω может быть определен путем оценки каждой из входящих в его выражение составляющих величин. Но проще и точнее определить k_ω и

k_ϕ , если провести немногочисленные эксперименты и обработать их результаты с помощью выражения (16). Соответствующие результаты приведены в таблице.

Для сравнения рассмотрим результаты расчета для вертикального цилиндра, полученные с помощью вариационного метода [15], и с помощью выражения (16). Из [15] следует

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{th\left(\varepsilon_i \cdot \frac{h}{R}\right)} \cdot \sqrt{\varepsilon_i}. \quad (18)$$

Здесь ε_i — коэффициенты, входящие в функцию Бесселя 1-го рода 1-го порядка, являющуюся составной частью решения исходного дифференциального уравнения; i — номер тона колебаний.

Для первых четырех тонов приведены следующие значения:

$$\varepsilon_1 = 1.84, \quad \varepsilon_2 = 5.33, \quad \varepsilon_3 = 8.54, \quad \varepsilon_4 = 11.71. \quad (19)$$

Сравнение выражений (16) и (18) показывает, что структура их одинакова. Первый множитель одинаков для обоих выражений. Третий множитель является коэффициентом формы и для первого тона колебаний

$$\sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{1.84} = 1.356,$$

что практически совпадает с $k_\omega = 1.36$ (это величина из второго пункта таблицы). Второй множитель зависит от величины относительного заполнения и при увеличении его, начиная с некоторого значения, становится равен 1. Как видно из рис. 1 оба метода дают для этой величины практически равные значения $\bar{h} = h/R = 1$. Но при $\bar{h} < 1$ результаты решения с использованием вариационных методов (18) оказываются меньшими, чем результаты, получаемые с помощью метода интегральных коэффициентов (16). Учитывая, что (16) является аппроксимацией экспериментальных данных, можно говорить о том, что решение вариационной задачи для рассматриваемого случая дает заниженные результаты. Так в рабочем диапазоне для выражения (16) максимальное отклонение при $\bar{h} = 0.4$ составляет 14%.

Пример использования метода. Для демонстрации возможностей МИК определим с его помощью собственные частоты колебаний свободной поверхности жидкости в емкости более сложной формы — между коаксиальными цилиндрами.

Положим R — радиус наружной емкости, r — радиус внутренней емкости, h — глубина заполнения. Также как и для вертикальной цилиндрической емкости, в (11) заменим комплекс $\xi_{S_\Sigma} \cdot 2l_2 \cdot 2l_3$, отображающий площадь се-

чения области движения жидкости, на $\pi(R^2 - r^2)$ – площадь сечения горизонтальной плоскостью области между коаксиальными цилиндрами, а $h_{\text{эф}} \cdot 2l_3$ на $h_{\text{эф}} \cdot 2(R-r)$ – площадь сечения вертикальной плоскостью области между коаксиальными цилиндрами до эффективной глубины. Выполнив преобразования (12), (13), (14), получим выражение, по структуре аналогичное (15):

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{(R+r)}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{эф}}}{(R+r)}} \cdot k_{\omega}. \quad (20)$$

По аналогии с вертикальной цилиндрической емкостью можно предположить, что

$$\bar{h}_{\text{эф}} = \frac{h_{\text{эф}}}{R+r} = \begin{cases} \bar{h}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1. \end{cases} \quad (21)$$

что на качественном уровне подтверждается результатами расчета с помощью вариационного метода, представленными в графическом виде (рис.2) [15] для емкости $R = 1$ м, $r = 0.4$ м.

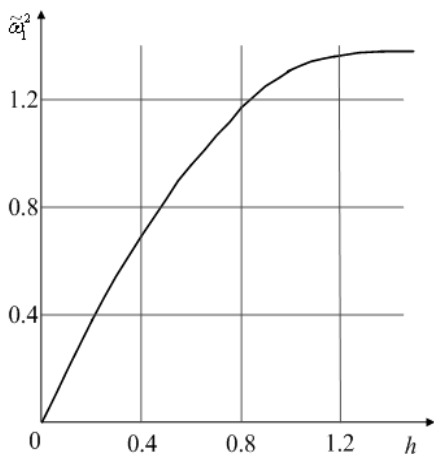


Рисунок 2 – Влияние глубины заполнения на частоту собственных колебаний жидкости между коаксиальными цилиндрами.

При выводе (20) не делалось никаких дополнительных допущений по сравнению с расчетами для вертикальной цилиндрической емкости. Более того при $r \rightarrow 0$ выражение (20) должно переходить в (15) и (16). Следовательно, можно предположить, что при расчете частоты собственных колебаний свободной поверхности жидкости между коаксиальными цилиндрами с помощью (17) и (20), коэффициенты k_{ϕ} и k_{ω} совпадают с аналогичными величинами для емкости в виде вертикального цилиндра. Сравнение данных позиций 2 и 7 таблицы подтверждает это предположение. Расхождение в величине

k_{ω} ($\sim 2\%$) можно отнести на счет точности экспериментальных исследований.

Таблица

Значение коэффициентов для расчета собственных частот колебаний жидкости
в емкостях.

№	Форма емкости, положение и направление воздействий	k_ϕ	k_ω	Закон распределения нормированного отклонения расчетных результатов от экспериментальных
1	Прямоугольный прямой параллелепипед, боковые грани вертикальны, вдоль боковой грани, $\bar{h} \geq 0.3$	3,67	1,26	(0,011; 0,00042)
2	Круговой цилиндр, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,29	1,36	(0; 0,00064)
3	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, вдоль оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 3$	3,5	1,6	(0; 0,0028)
4	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, поперек оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 1.8$	2,43	1,29	(0; 0,00037)
5	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора 20° , поперек оси	5	1,21	(0; 0,000676)
6	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора 50° , поперек оси	7,57	0,905	(0; 0,000525)
7	Коаксиальные круговые цилиндры, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,3	1,39	(0,02; 0,001)

Выводы. С помощью метода интегральных коэффициентов (МИК) получено выражение для расчета собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм. Необходимые для его использования коэффициенты определяются из немногочисленных экспериментов.

Структуры выражений, полученных с помощью МИК и вариационного метода, совпадают. Сравнение результатов расчетов на примере емкости в виде вертикального цилиндра показывает их совпадение для больших заполнений и занижение результатов решения вариационной задачи по сравнению с МИК (и с экспериментальными данными).

Список литературы: 1. *Остроградский М.В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне. – В книге: Избранные труды. 1958. 2. *Крылов А.Н.* О боковой качке корабля – М. –

Л.:Военмориздат, 1942. – 172 с. **3. Мусеев Н.Н.** Динамика корабля, имеющего жидкие грузы – Изв. АН СССР, ОТН, – N 7, – 1954. **4. Мархаиов Л.М.** Колебания и устойчивость твердой оболочки с идеальной жидкостью на упругих опорах. (К теории карусельного гидроканала) // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1962. – N 6. – С. 81-84. **5. Горьков П.Н.** Динамическое действие колеблющейся жидкости на цистерны при неполном наливе // Изв. АН СССР, ОТН, – N 2, 1954. – С. 19-24. **6. Золотенко Г.Ф.** К динамике гидроупругой системы "прямоугольный бак — жидкость" // Механика твердого тела. – N 5, – 1996, – С. 155-161 **7. Борисов Д.И.** Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками// *Борисов Д.И., Руднев Ю.И.* – Харьковский национальный университет. Прикладна гідромеханіка. –2010. –Т.12, –№2, – С. 8-19. **8. Chiba M.** Nonlinear hydro elastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom containing liquid // *Chiba M.* – Int. J. of nonlinear mechanics, V.31.– N 2. – 1996.– P. 155-165. **9. Бурбраер А.Н.** Расчет конструкций на сейсмостойкость. – СПб.: Наука, – 1998. **10. Петров А.А.** Оценка сейсмической реакции резервуаров с жидкостью // Промышленное и гражданское строительство. 1993, – № 5. **11. Нариманов Г.С.** О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикладная математика и механика – Т. XX, – 1956, – С. 21-38 **12. Мусеев Н.Н.** Вариационные задачи теории колебаний жидкости и тела с жидкостью. «Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью». – М.:Издательство ВЦ АН СССР, – 1962. **13. Шмаков В.П.** Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким наполнением // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. – 1964. – N 1. – С. 170-174. **14. Черноусько Ф.Л.** Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М. – 1969. – 230 с. **15. Колесников К.С.** Динамика ракет: Учебник для вузов. – 2-е изд., исправл. и доп. – М.: Машиностроение, 2003. – 520 с. **16. Микушев Г. Н., Рабинович Б. И.** Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 563 с. **17. Луковский И.А.** Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с. **18. Лимарченко О.С., Ясинский В.В.** Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с. **19. Лукьянова И.Э.** Моделирование воздействий землетрясений на стальные вертикальные резервуары с использованием программного пакета FLOWVISION. – Уфимский государственный нефтяной технический университет. Нефтегазовое дело. – Уфа, 2010. **20. Евстигнеева Н.А.** Свободные колебания жидкости в бассейне с параболическим профилем дна. – Морской гидрофизический институт НАН Украины. Системы контроля окружающей среды. – Севастополь, 2007. **21. Кьи Твин.** Колебания авиационных конструкций с отсеками, частично заполненными жидкостью. – Дисс. на соиск. уч. ст. к.т.н., – Москва, 2005. **22. Кутеева Г.А.** Колебания жидкости внутри прямоугольного двигающегося сосуда с упругой вставкой на стенке. – Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н., – Санкт-Петербург, 2002. **23. Штоколова М.Н.** Численное моделирование течений жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов. – Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н., – Томск, 2008. **24. Даурских Ю. К., Иванов О. П., Козлов В. Г и др.** Исследование собственной частоты колебаний жидкости в горизонтальной цилиндрической емкости методом рационального планирования эксперимента. – В кн. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сб. научных докладов IV симпозиума. Новосибирск, 1980, – С. 108-110. **25. Накозин В.Н.** Системный подход в построении моделей процессов. // В сб.: Динамика машин и рабочих процессов. – №237. – Челябинск: ЧПИ, 1979. **26. Накозин В.Н.** Метод интегральных коэффициентов в построении и решении математических моделей процессов. //Сб. науч. тр.: Динамика машин и рабочих процессов – Челябинск: ЧПИ, 1983. – С. 72-78.

Поступила в редколлегию 01.03.2012

Т.В. МАЛИХІНА, ст. викл., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків;
М.Г. СТЕРВОЄДОВ, к. т. н., доцент, ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОХОДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОНІВ ЧЕРЕЗ ШАР РЕЧОВИНИ ЯК СКЛАДОВА ЧАСТИНА ВІРТУАЛЬНОГО ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ З ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

Представлено комп'ютерні програми, які входять до складу віртуального лабораторного практикуму, що розроблюється в Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна на факультеті комп'ютерних наук сумісно з провідними спеціалістами фізико-технічного факультету. Віртуальний лабораторний практикум являє собою комплекс комп'ютерних програм, що використовує сучасні засоби математичного моделювання процесів взаємодії випромінювання з речовиною. Програми розроблені мовою C++ в середовищі операційної системи Linux SLC 4.8. Віртуальний лабораторний практикум планується використовувати в процесі навчання студентів старших курсів фізико-технічного та фізико-енергетичного факультетів.

Представлены компьютерные программы, которые входят в состав виртуального лабораторного практикума, разрабатываемого в Харьковском национальном университете им. В.Н. Каразина на факультете компьютерных наук совместно с ведущими специалистами физико-технического факультета. Виртуальный лабораторный практикум представляет собой комплекс компьютерных программ, использующих современные средства математического моделирования процессов взаимодействия излучения с веществом. Программы разработаны на языке C++ в среде операционной системы Linux SLC 4.8. Виртуальный лабораторный практикум планируется использовать в процессе обучения студентов старших курсов физико-технического и физико-энергетического факультетов.

The Virtual laboratory practicum environment is presented. It was developed at the V.N. Karazin Kharkiv National University at the Faculty of Computer Science. This practicum is developed together with leading experts of the Faculty of Physics and Technology. Virtual laboratory practicum is a complex of computer programs that use a modern toolkit of the mathematical simulation of the passage of particles through matter. These programs developed in the environment of the Linux SLC 4.8 operating system using C++ language. Virtual laboratory classes will be used to train students of the Faculty of Physics and Technology as well as the Faculty of Energy Physics.

Постановка проблеми. В теперішній час набули подальшого розвитку програмно-апаратні комплекси, «Віртуальні лабораторії», спрямовані на удосконалення методик дистанційної освіти. В той же час, деякі лабораторні роботи неможливо виконати, не маючи спеціального устаткування. До таких лабораторних робіт можливо віднести практикуми з ядерної фізики і радіаційних технологій, з фізики елементарних частинок тощо. Навіть за наявності унікального устаткування в учбових закладах існує проблема обмеженого доступу до такого обладнання, зумовлена коштовністю проведення експерименту або шкідливими чи небезпечними умовами цього експерименту.

В багатьох галузях людської діяльності використання комп'ютерних технологій дозволяє істотно оптимізувати виробничі процеси й покращити якість результату цієї діяльності. Одним з напрямків розвитку інформаційних

технологій є розробка програмних засобів для моделювання різноманітних процесів, що дозволяє економити ресурси, знижує енерговитрати, людські ресурси, а також дозволяє оптимізувати керівництво виробничими процесами. Зокрема, при використанні інформаційних технологій в науці стає можливим проведення модельного експерименту без використання коштовного обладнання, витрат матеріалів, без значних витрат електроенергії тощо, та без притягнення великої кількості персоналу лабораторій.

Важливою перевагою віртуальної лабораторії є можливість наочної імітації реального фізичного експерименту, а також можливість використання раніш отриманих експериментальних даних.

В Інституті високих технологій Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна на факультеті комп'ютерних наук сумісно з провідними спеціалістами фізико-технічного факультету ХНУ ім. В.Н.Каразіна розроблюється комплекс віртуальних лабораторних робіт з вивчення процесів взаємодії випромінювання з речовиною.

Необхідність розробки віртуального лабораторного практикуму обумовлена наявністю в учбовій програмі фізико-технічного і фізико-енергетичного факультетів відповідних предметів з фізики елементарних частинок, фізики високих енергій тощо, та проблемою обмеженого доступу до коштовного обладнання, наприклад, прискорювачів заряджених частинок і т. ін. Також відіграє важливу роль економічна складова: проведення віртуального експерименту набагато дешевше, ніж експеримент реальний.

Передумовою створення віртуального лабораторного практикуму з вивчення процесів взаємодії випромінювання з речовиною є наявність попереднього досвіду [1 – 3] з комп'ютерного моделювання процесів проходження іонізуючого випромінювання через різні шари речовини та моделювання різних типів детекторів випромінювання.

Головною метою створення віртуального лабораторного практикуму була оптимізація та інтенсифікація навчального процесу серед студентів Інституту високих технологій, який складається з трьох факультетів ХНУ ім. В.Н.Каразіна: фізико-технічного, фізико-енергетичного та факультету комп'ютерних наук. Під час проведення віртуальних лабораторних робіт студенти фізичних спеціальностей мають можливість наочно імітувати реальний експеримент, отримати важливі результати та провести їх цифрову обробку.

Математичне моделювання енергетичних втрат електронів. Математичне моделювання проходження електронів через різні речовини враховує іонізаційні та радіаційні втрати енергії, тобто повні втрати енергії електронів ΔE в речовині обчислюються як сума іонізаційних та радіаційних втрат енергії: $\Delta E = \Delta E_{ion} + \Delta E_{rad}$, де ΔE_{ion} – іонізаційні втрати енергії, ΔE_{rad} – радіаційні втрати енергії, які обчислюються за формулами:

$$\Delta E_{ion} = \int_{E_{min}}^{E_0} \left(\frac{dE_{ion}}{dx} \right) dx, \quad \Delta E_{rad} = \int_{E_{min}}^{E_0} \left(\frac{dE_{rad}}{dx} \right) dx, \quad (1)$$

де $\frac{dE_{ion}}{dx}$, $\frac{dE_{rad}}{dx}$ – відповідно питомі іонізаційні та питомі радіаційні втрати енергії.

Іонізаційні втрати енергії частинок обчислюються як ймовірні втрати енергії за *методом Ландау* з використанням *формул Бете – Блоха* [4] розрахунку середніх іонізаційних втрат.

$$-\frac{dE_{ion}}{dx} = -0.3 \frac{z}{A} \cdot \frac{mc^2}{\beta^2} \cdot \left[\ln \frac{mc^2 E}{2I^2} + \ln \left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right) - 2(\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \cdot \ln 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1-\beta^2}) - \delta \right], \quad (2)$$

де z – атомний номер (для простих речовин) або ефективний атомний номер (для сполук); A – атомна маса (для простих речовин) або ефективна атомна маса (для сполук); $mc^2 = 0.511$ MeV – маса спокою електрона; I – потенціал іонізації речовини, який для речовин з атомним номером $z > 13$ обчислюється за формулою:

$$I = [9.76 + 58.6 \cdot z^{(-1.19)}] \cdot z \cdot 10^{-6} \text{ MeV}, \quad (3)$$

а для сполук:

$$I_{ef} = \exp \left(\sum_{j=1}^n k_j z_j \ln(I_j) / \sum_{j=1}^n k_j z_j \right) \text{ MeV}, \quad (4)$$

де k_j – кількість атомів j -го простого елементу в молекулі сполуки; z_j – атомний номер j -го простого елементу в молекулі сполуки; I_j – потенціал іонізації j -го простого елементу в молекулі сполуки, що обчислюється за формулою (3);

Для сполук ефективний атомний номер та ефективна атомна маса обчислюються за формулами:

$$z_{ef} = \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^n k_i z_i^4 \right) / \sum_{i=1}^n (k_i z_i)}, \quad A_{ef} = \sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^n k_i z_i A_i^3 \right) / \sum_{i=1}^n (k_i A_i)} \quad (5)$$

Іонізаційні втрати енергії обчислюються з урахуванням поправки на ефект густини δ , засновані на *методі Штернхеймера* [4]:

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_0 \\ x \cdot 2 \ln 10 + C + a \cdot (x_1 - x)^m, & \text{при } x_0 \leq x \leq x_1, \\ x \cdot 2 \ln 10 + C, & \text{при } x_1 < x \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{де } x = \ln \left(\left(\frac{E}{0.511} \right)^2 - 1 \right) / 2 \ln 10, \quad m = 3; \quad C = (-1) \cdot \left(1 + 2 \ln \left[\frac{I}{28.8 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{\rho \cdot n0}} \right] \right);$$

$$a = 2 \cdot \ln 10 \cdot \frac{(-1) \cdot C / (2 \cdot \ln 10) - x_0}{(x_1 - x_0)^m}; \quad n0 = \frac{\sum_i n_i z_i}{\sum_i n_i A_i} - \text{для сполук}; \quad n0 = z / A - \text{для}$$

простих речовин, ρ – густина речовини.

Питомі втрати енергії на випромінювання обчислюються згідно з формулами *Бете – Гайтлера* [4]. Втрати енергії на гальмівне випромінювання істотно залежать від ступені екранування ядра атомними електронами:

$$-\frac{dE_{rad}}{dx} = 4 \cdot \frac{N_A z(z-1)}{A} \cdot \alpha r_e E \left(\ln \frac{2E}{mc^2} - \frac{1}{3} \right), \quad \text{при } mc^2 \ll E \ll 137 \cdot mc^2 \cdot z^{-1/3}, \quad (7)$$

$$-\frac{dE_{rad}}{dx} = 4 \cdot \frac{N_A z(z-1)}{A} \cdot \alpha r_e E \left(\ln(183 \cdot z^{-1/3}) + \frac{1}{18} \right), \quad \text{при } E \gg 137 \cdot mc^2 \cdot z^{-1/3}, \quad (8)$$

де $N_A = 6.22 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро; $mc^2 = 0.511 \text{ МеВ}$; $\alpha \approx 1/137$ – постійна тонкої структури; $r_e \approx 2.818 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ – класичний радіус електрона. Формула (7) використовується для обчислення втрат енергії на гальмівне випромінювання без урахування екранування, формула (8) – для випадку повного екранування,

Електрони, проходячи через речовину, відчувають велику кількість зіткнень, внаслідок чого змінюється напрямок їхнього руху. Траєкторія руху електронів з невеликою початковою енергією змінюється залежно від процесів багатократного розсіювання електронів, обумовленого сумарним ефектом малих відхилень, та розсіювання на великі кути, викликаного окремими близькими зіткненнями. Статистичний характер процесу іонізації електронів (за рахунок процесів багатократного розсіювання) призводить до значних флуктуацій іонізаційних втрат енергії. Тому доцільно в програмах, що розроблюються, використовувати статистичні методи, зокрема, бібліотеку класів Geant4, що використовує *метод Монте-Карло*.

Математичне моделювання за допомогою Geant4. Geant4 – це бібліотека класів, які використовуються при розробці комп'ютерних програм, що призначені для моделювання процесів проходження іонізуючого випромінювання через речовину. Geant4 забезпечує повну систему інструментальних засобів для моделювання ядерно-фізичних процесів взаємодії випромінювання з речовиною: створення геометрії детекторів і установки в цілому, опис частинок і фізичних процесів; транспорт частинок і слідування за ними; відгук детектора; моделювання подій, керування треком тощо. Бібліотека класів Geant4 має великий набір службових функцій, генераторів випадкових величин і т. ін., а також надає можливість використовувати різні модулі візуалізації [4].

Колаборація Geant4 надає підтримку користувачів та повний комплект необхідної документації. Документація має в своєму складі довідку з інсталяції, документацію кінцевого користувача та довідники, а також ряд підручників, що призначені для широкого кола користувачів – від початківців до досвідчених користувачів Geant4. Підтримка користувачів охоплює допомогу у вирішенні проблем, пов'язаних з кодом, консультації з використання інструментарію та реагування на запити про удосконалення коду. Користувач має також розраховувати на допомогу у дослідженні аномальних результатів [4]. На сайті проєкту Geant4 [5] можна ознайомитись з веб-системою звітності та списком питань, що частіше задаються (FAQ). Колаборація Geant4 також керує веб-форумом користувачів, з підфорумами згідно з галузями наукових інтересів. У вільному доступі в Інтернеті існують актуальні робочі версії відкритого коду і документація, а також учбові приклади та комплекти учбових матеріалів. Великою перевагою Geant4, окрім його функціональності, гнучкості й надійності, є доступність його коду, можливість модифікації й адаптації практично до будь-яких задач комп'ютерного моделювання, в яких взаємодія випромінювання з речовиною відіграє роль.

Робота з бібліотекою класів Geant4 зводиться до розробки програм мовою C++, які певним чином зв'язують компоненти бібліотек для моделювання деякої реальної системи. При цьому в програмі, що використовує Geant4, визначається трьохвимірна модель системи, характеристики матеріалів, з яких вона складається, описуються електромагнітні поля. Також програмістом описуються різні набори фізичних процесів, наприклад, гальмівне випромінювання, іонізація, тощо. В процесі роботи розроблена програма розраховує траєкторії проходження різних елементарних частинок в заданій системі і т. ін. Програма, що використовує бібліотеку класів Geant4, повинна містити визначення декількох основних класів, які відповідають особливостям конкретної задачі. Всі ці класи повинні бути зареєстрованими в спеціальному об'єкті – екземплярі класу **G4RunManager** [6], який керує процесом моделювання. До обов'язкових класів належать:

- **G4UserDetectorConstruction** [6], який містить визначення геометрії детекторів та матеріалів, з яких складаються чутливі області установок;

- **G4VPhysicsList** [6], що підключає моделювання фізичних процесів, які детально розглянуті в документації [7];

- **G4UserPrimaryGeneratorAction** [6], що описує джерело первинних частинок при моделюванні.

В об'єкті-екземплярі класу **G4RunManager**, який керує процесом моделювання проходження частинок, також зареєстровані й необов'язкові класи, без яких моделювання можливо, – **G4UserAction**, **G4UserEventAction**, **G4UserSteppingAction**. Ці класи дозволяють керувати поведінкою програми на різних етапах виконання, задавати необхідний рівень деталізації під час виведення результатів.

Віртуальний лабораторний практикум, що розроблюється, являє собою комплекс комп'ютерних програм, які використовують бібліотеку класів Geant4 і можуть бути виконані в середовищі операційної системи Linux. При моделюванні проходження електронів через шари речовини розглядалися іонізаційні і радіаційні втрати енергії, що обчислювались з використанням класів **G4eIonisation** (моделювання по формулам *Бете – Блоха* з поправкою на ефект густини Штернхеймера), що враховують формули (1) – (8), **G4eBremsstrahlung** (використовується *модель Бете-Гайтлера* [6]), а також використовувались класи, що описують процеси багатократного розсіювання електронів (*модель кутового розподілу Гоудсмита – Саундерсона, просторового розподілу Льюїса* [6]): **G4CoulombScattering** та **G4GoudsmitSaundersonMscModel**. Ці класи базуються на методі Монте-Карло при розрахунках загальної довжини путі частинки та середнього кута розсіювання. Для вторинних частинок враховувались всі необхідні фізичні процеси, та в об'єкті-екземплярі класу **G4VPhysicsList** зареєстровані всі необхідні відповідні класи, що описують фізичні процеси для вторинних частинок. Порогові енергії генерування вторинних частинок E_{cut} були обрані за допомогою методу **SetCut**, при цьому для кожного матеріалу, що описаний у складі лабораторної роботи, для якого можливо провести моделювання, та для кожного типу частинок обчислюється своя енергія E_{cut} . Для первинних електронів важливим було продемонструвати статистичний характер процесів багатократного розсіювання та розробити відповідні програми з наочною візуалізацією цих процесів.

Приклади лабораторних робіт. На рис. 1 і 2 наведено фрагменти лабораторних робіт з вивчення багатократного кулонівського розсіювання електронів (рис. 1) та процесів гальмівного випромінювання (рис. 2). Для створення цих віртуальних лабораторних робіт було розроблено комп'ютерні програми мовою C++ в середовищі операційної системи Linux SLC 4.8. В програмах використовується бібліотека класів Geant4 версії 9.4, OpenGL-візуалізація.

На рис. 1 представлені скрін-шоти лабораторної роботи для моделювання процесів багатократного розсіювання електронів. Наведено результат візуалізації проходження 50 електронів з початковою енергією 4.5 MeV через шар кремнію 300 мікрон. Перед шаром кремнію на невеликій відстані розташована дуже тонка алюмінієва фольга, яка на рисунку не представлена.

У верхній частині рис. 1 наведено візуалізацію віртуального експерименту, коли не враховуються процеси багатократного кулонівського розсіювання, у нижній частині рисунку – експеримент має ті ж самі умови, але процеси багатократного кулонівського розсіювання враховуються. Первинні електрони спрямовані за нормаллю до поверхні кремнієвої площини. Траєкторії електронів представлені жовтим кольором.

Розсіювання електронів, що пройшли крізь шар речовини, в основному, викликано сумарним ефектом багатьох відхилень на невеликі кути. Випадки одноразового розсіювання на великі кути призводять до виходу частинки з пучка та доволі рідкі порівняно з процесами багатократного розсіювання.

На рис. 2 наведено фрагмент лабораторної роботи з вивчення процесів гальмівного випромінювання електронів. Представлені шари конвертеру гальмівного випромінювання зі свинцю, OpenGL-візуалізація у контурному режимі. На верхній частині рисунку 2 – візуалізація проходження одного (для наочності) електрона з енергією 100 MeV, в нижній частині рисунку 2 – візуалізація проходження одного електрона з початковою енергією 1 GeV. Траєкторії гальмівних гамма-квантів зображені на скрін-шоті зеленим кольором. Траєкторії електронів представлені на цих скрін-шотах червоним кольором. Можна помітити, як змінюються характеристики пучка гальмівного випромінювання зі зміною енергії електронів.

Для того, щоб в процесі виконання роботи була можливість спостерігати за змінами характеристик гальмівного випромінювання, в розробленій програмі передбачено багатий вибір матеріалів для конвертера.

На рис. 3 представлено розподіл кута відхилення електронів з енергією 4.5 MeV, що пройшли крізь алюмінієву фольгу та кремнієвий детектор. Цифрову обробку даних здійснено в середовищі Microcal Origin 7.5.

Можна зазначити, що найбільш ймовірне значення кута розсіювання електронів з початковою енергією 4.5 MeV становить близько 8° . Для кількості моделювання $N_{events} = 500000$ кількість подій у максимумі $N = 41296$, тому середньоквадратична похибка дорівнює $\delta = 1/\sqrt{N} \approx 0.0049$, що цілком достатньо для прикладних та учбових задач. Зі збільшенням енергії електронів, що налітають на мішень, процеси розсіювання в кремнієвому детекторі здійснюють менший вплив на траєкторію руху електронів [8], тому кут між початковим напрямком та напрямком вильоту з детектору буде зменшуватись.

На рис. 4 представлені результати моделювання залежності кута відхилення від початкового напрямку руху електронів для діапазону енергій 0.3 MeV – 5 MeV.

В процесі виконання представлених лабораторних робіт студенти мають можливість задавати будь-які енергії частинок, вказувати товщини шарів, обирати різні типи первинних частинок і матеріали, керувати рівнями деталізації результатів, що записуються у текстовий файл для подальшої обробки. Комп'ютерні програми, що розроблені і є основою віртуального лабораторного практикуму, мають набір параметрів та команд користувача, які вказуються в діалоговому режимі під час виконання програм для вибору необхідних параметрів кожної лабораторної роботи.

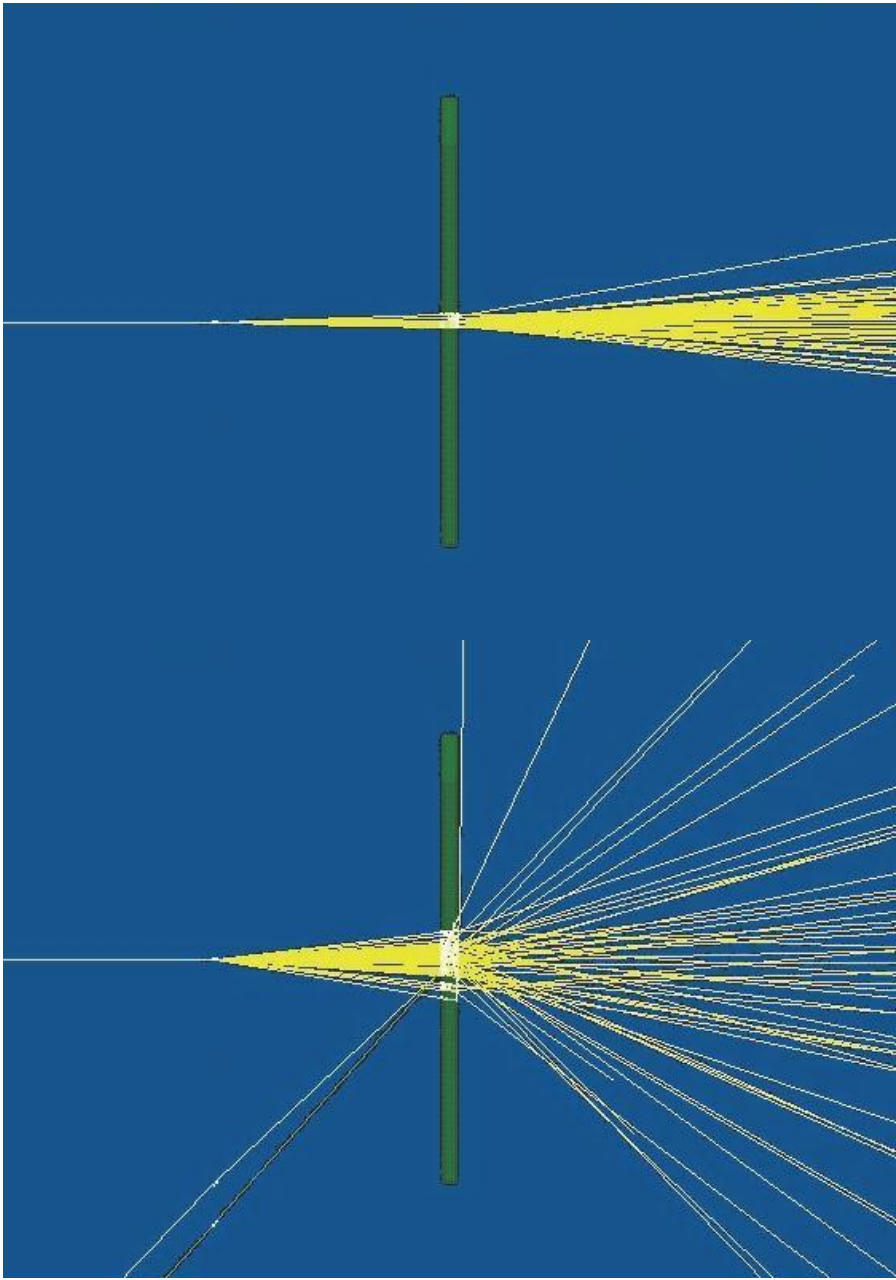


Рисунок 1 – Фрагмент лабораторної роботи з вивчення процесів багатократного розсіювання електронів

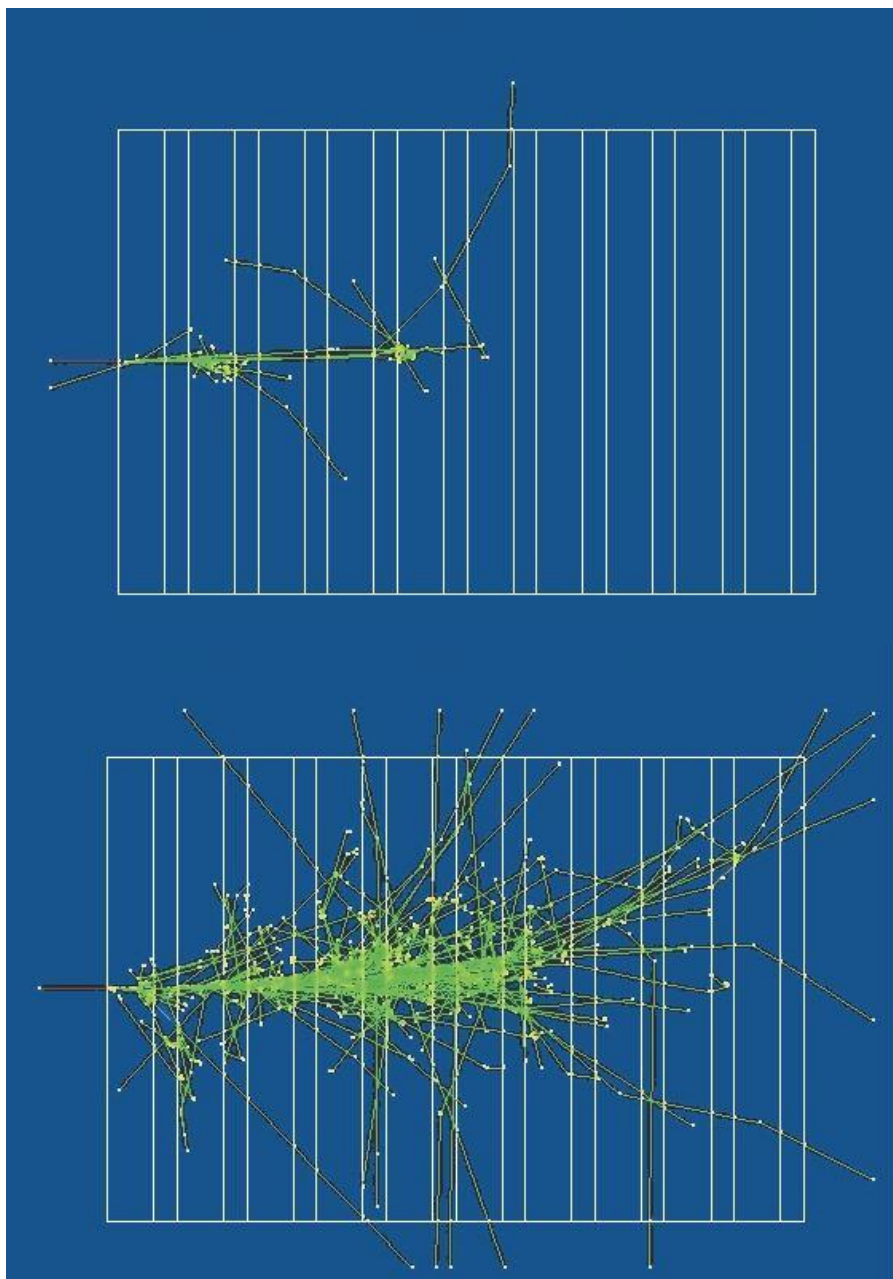


Рисунок 2 – Фрагмент лабораторної роботи з вивчення процесів гальмівного випромінювання електронів

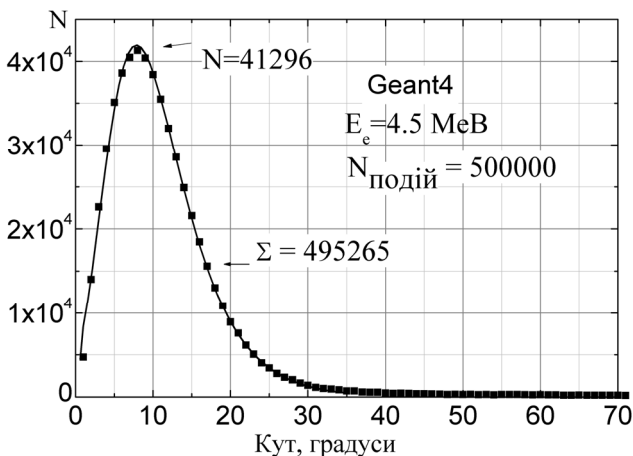


Рисунок 3 – Розподіл кута відхилення первинних електронів, що пройшли через алюмінієву фольгу та детектор

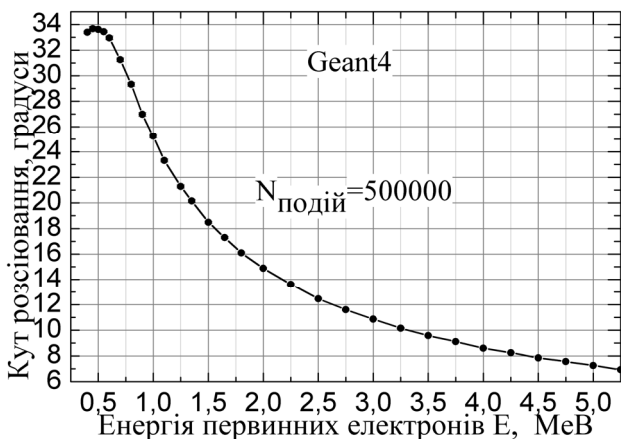


Рисунок 4 – Залежність кута розсіювання електронів, що пройшли через фольгу та детектор, від первинної енергії

Висновки. В результаті розроблення комп'ютерних програм, що є складовою частиною віртуального лабораторного практикуму, з'явилась можливість наочного вивчення процесів багатократного кулонівського розсіювання та процесів гальмівного випромінювання електронів. Ці лабораторні роботи можуть бути проведені без застосування коштовного унікального обладнання лабораторій та великої кількості персоналу, без істотних витрат електроенер-

гії тощо. Розроблення віртуального лабораторного практикуму дозволяє більш інтенсивно використовувати інформаційні технології в освіті. В перспективі – створення нових комп'ютерних програм та доповнення переліку лабораторних робіт відповідно до переліку процесів, що вивчаються студентами старших курсів фізико-технічного та фізико-енергетичного факультетів.

Список літератури: 1. Сорока Л.С., Стервоєдов Н.Г., Мальныхна Т.В. Разработка переносного прибора для локации источника излучения. // Вісник Академії митної служби України. Серія “Технічні науки”. – 2011. – № 2 (46). – С. 102 – 109. 2. Мальныхна Т.В., Марущенко В.В., Сакун А.В., Стервоєдов Н.Г. Компьютерное моделирование установки для локализации источника гамма-излучения. // Вестник ХНУ. Серия МИА. – 2010. – № 925, вып. 14. – С. 132-139. 3. M.V. Bezuglov, V.S. Malyshevsky, T.V. Malykhina, A.V. Torgovkin, G.V. Fomin and B.I. Shramenko «Photonuclear Channel of ^7Be Production in the Earth's Atmosphere». // Physics of Atomic Nuclei, 2012, Vol. 75, No. 4, P. 393 – 397. 4. J. Allison et.al. Geant4 – a simulation toolkit. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 2003. – A 506. – P. 250 – 303. 5. Веб-ресурс проекту Geant4: <http://geant4.cern.ch> 6. Geant4 User's Guide for Application Developers. [Електронний ресурс]: 2010. – 327 с. – режим доступу: <http://geant4.web.cern.ch/geant4/UserDocumentation/ UsersGuides / PhysicsReferenceManual / fo / BookForAppliDev.pdf>. 7. Physics Reference Manual [Електронний ресурс]: 2010. – 554 с. – режим доступу: <http://geant4.web.cern.ch/ geant4 / UserDocumentation / UsersGuides/PhysicsReferenceManual / fo / PhysicsReferenceManual.pdf>. 8. ICRU(1984). International Commission on Radiation Units and Measurements. *Radiation Dosimetry: Electron beams with energies between 1 and 50 MeV*. ICRU Report 35 (International Commission on Radiation Units and Measurements, Bethesda, Maryland).

Надійшла до редколегії 15.05.2012

УДК 621.317

Р.П. МИГУЩЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

О.Ю. КРОПАЧЕК, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

Т.В. ПЕЧЕРИЦЯ, магістр, НТУ «ХПІ»;

К.В. МАТЯШ, студент, НТУ «ХПІ»

АНАЛІЗ ПИТАНЬ КОМПЕНСАЦІЇ АДИТИВНИХ ЗБУРЕНЬ ПРИ ДІАГНОСТИЦІ ДИЗЕЛЬНИХ АГРЕГАТИВ

Розглянуті питання побудови системи контролю і діагностики стану форсунок дизельних агрегатів. Для розробки системи контролю обраний об'єкт дослідження, розглянуті принципи його функціонування, проведено огляд літератури та проаналізовано можливі моделі процесів у розгляданому об'єкті, обрані основні напрямки роботи при проведенні досліджень, зроблено висновки про перспективи подальших розробок.

Рассмотрены вопросы построения системы контроля и диагностики состояния форсунок дизельных агрегатов. Для разработки системы контроля выбран объект исследования, рассмотрены принципы его функционирования, проведен обзор литературы и проанализированы возможные модели процессов в рассматриваемом объекте, выбраны основные направления работы при проведении исследований, сделаны выводы о перспективах дальнейших разработок.

The article deals with the issues of building control systems and diagnostics of injectors diesel units. To design the control system is chosen object of study, considered the principles of its operation, reviewed and analyzed the possible models of the object in question, selected the main directions of work in research, conclusions about the prospects for further development.

Постановка проблеми. Сучасна вітчизняна промисловість, як ніколи, потребує введення новітніх технологій у всі свої галузі. Однією з технічних проблем, яку необхідно вирішити, є проблема діагностування стану паливної системи високого тиску дизельних агрегатів (ДА) із застосуванням безрозбірних технологій. В першу чергу це стосується виявлення придатних для подальшого застосування форсунок в режимі реального часу. В [1] досить детально розглядалися методики виявлення несправностей форсунок за вібраціями трубки паливного насосу високого тиску, проведена класифікація несправностей, запропоновані апаратурні та алгоритмічні засади при виготовленні відповідних засобів діагностики і контролю. Проте в [1] на дослідження були накладені обмеження, які стосувались того, що діагностика форсунок відбувалась на певній частоті – частоті холостого ходу. Таке обмеження не надало можливості оцінки власних коливань ДА, і тому, не надало можливості оцінки придатності форсунок не у тестовому режимі, а у режимі реального часу.

Аналіз літератури показав, що на даний час вже розроблена достатньо велика кількість стендів контролю функціонування форсунок, робота яких базується на самих різноманітних алгоритмах [2-4]. Проте постійне розширення технічних та технологічних вимог приводить до необхідності створення нових, все більш досконалих апаратурних, алгоритмічних та програмних засобів у цій сфері.

Метою статті є аналіз можливості побудови системи контролю чи діагностики придатності форсунок для подальшої експлуатації в режимі реального часу. Для реалізації такої задачі необхідні дослідження вібрацій на трубках паливного насосу високого тиску при різних частотах обертання вала та різних навантаженнях.

Аналіз моделей робочих зон ДА. Схемотехнічна модель робочої зони ДА при діагностиці стану форсунок для чотирьохциліндрового двигуна наведена на рис. 1.

Математична модель цієї зони має вигляд матриці впливу:

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де W_{ii} – вплив роботи i -го циліндра ДА самого на себе; W_{ij} – вплив роботи j -го циліндра на i -тий. В моделі (1) елементи являють собою передатні фу-

нкції коливальних ланок $W(p) = k / (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)$. В роботі [1] були синтезовані моделі компенсаторів функцій W_{ij} , що допомогло розробити алгоритм визначення придатності форсунок для подальшої експлуатації в пакетному режимі на стенді з використанням безрозбірних технологій.

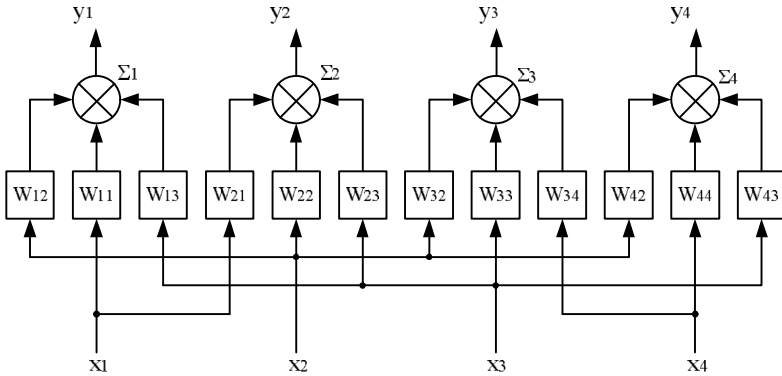


Рисунок 1 – Схема робочої зони ДА при діагностиці стану форсунок.

Проте, вихід частоти обертання вала ДА за межі холостого ходу, зазвичай, призводить до збільшення похибок 1-го роду [5]:

$$\alpha_{31} = \int_{k_{31}}^{\infty} f(u/S_{c1}) du = 1 - \frac{G(N/2, k_{31}/2\sigma_{\xi c3}^2)}{G(N/2)},$$

$$\alpha_{32} = \int_{k_{32}}^{\infty} f(u/S_{c1}) du = 1 - \frac{G(N/2, k_{32}/2\sigma_{\xi c3}^2)}{G(N/2)}$$

та 2-го роду:

$$\beta_{31} = \int_0^{k_{31}} f(u/S_{c2}) du = \frac{G(N/2, k_{31}/2\sigma_{\xi c1}^2)}{G(N/2)},$$

$$\beta_{32} = \int_0^{k_{32}} f(u/S_{c3}) du = \frac{G(N/2, k_{32}/2\sigma_{\xi c2}^2)}{G(N/2)},$$

де $G\left(\frac{N}{2}, \frac{k_{31}}{2\sigma_{\xi c3}^2}\right)$ – нормально розподілена функція, при класифікації стану

форсунок за принципом – придатний/непридатний.

Повна ймовірність похибки при класифікації має вигляд:

$$P = 0.5(\alpha_{31} + \beta_{31}), \text{ або } P = 0.5(\alpha_{32} + \beta_{32}). \quad (2)$$

На погляд авторів це викликано власними коливаннями робочої зони ДА, амплітуда яких є змінною величиною. Достовірність цієї гіпотези перевірялась експериментальним шляхом.

Експериментальні дослідження параметрів власних коливань робочої зони ДА. На рис. 2 приведені графічні залежності зміни рівня амплітуди віброколивань в залежності від частоти обертання вала ДА.

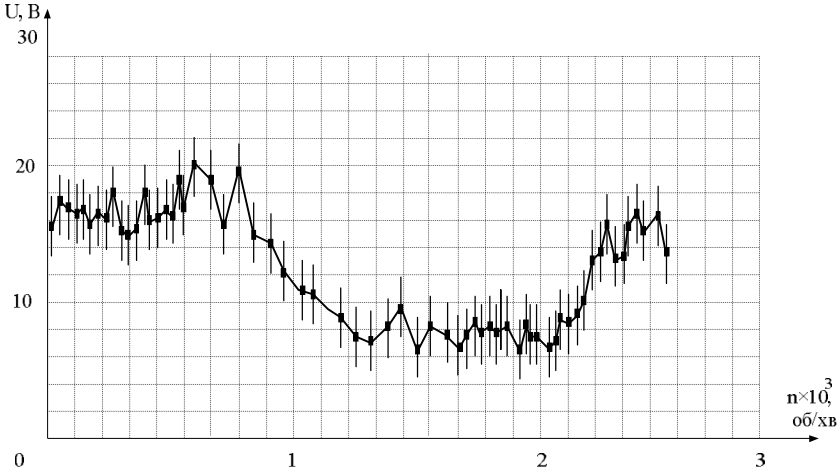


Рисунок 2 – Залежність амплітуди коливань від частоти обертання.

На рис. 3 продемонстровані графічні залежності, які вказують граничні зони перехідної області при класифікації за принципом придатний / непридатний [5] та трендову лінію, яка описує залежність власних коливань ДА від частоти обертання вала.

В якості первинного перетворювача використовувався віброакселометр АП18.

Дані на рис. 2 та рис. 3 свідчать про наявність суттєвих амплітуд власних коливань ДА під час своєї роботи, а також про досить складний характер апроксимуючої функції.

Для графічної залежності рис. 3 була здійснена апроксимація і виявлена функція, яку необхідно враховувати при діагностиці стану форсунок:

$$s = 6.7n^2 - 15.5n + 17.7.$$

Таким чином, модель на рис. 1 повинна бути доповнена впливом функції збурень, що приводить до адитивних зміщень у векторі $y = f(x, s)$ (де x – вектор вхідних впливів (x_1, x_2, \dots, x_n) , y – вектор вихідних даних (y_1, y_2, \dots, y_n)) і повинно враховуватись при виконанні алгоритму контролю чи діагностики.

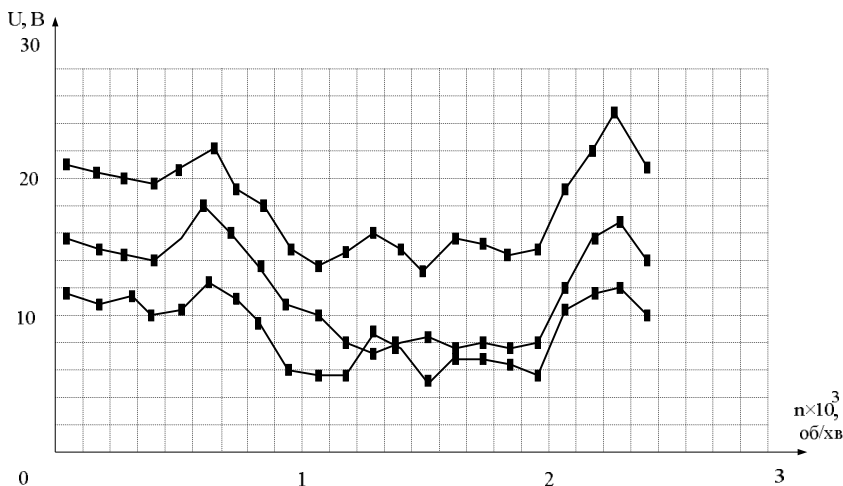


Рисунок 3 – Поправочні криві при діагностиці форсунок ДА.

Імітаційне моделювання. Для верифікації отриманих результатів при діагностиці стану форсунок паливної системи ДА доцільно здійснити імітаційне моделювання. Сучасні програмні засоби дозволяють змоделювати практично будь-які процеси в технічних об'єктах. Таке моделювання дає можливість здійснювати визначення параметрів передаточних функцій, корегувати структуру передаточних функцій об'єкту дослідження, обирати оптимальні регулятори (ПІ, ПІД тощо) та їх структуру [6].

При проведенні імітаційного моделювання функціонування системи діагностики автори обрали для використання інтегровані середовища математичних та інженерних розрахунків MathCAD 2001 (MathSoft Inc.) і Matlab 6 (MathWorks Inc.), а також середовища імітаційного моделювання Simulink 4 і пакет прикладних програм Control Systems Toolbox, ліцензовані копії яких знаходяться у їхньому розпорядженні.

Перспективи подальших досліджень. При розробці апаратурних, алгоритмічних та програмних засобів для систем контролю та діагностики необхідно визнати, що крім детермінованих збурень при діагностиці стану форсунок на ймовірність похибки за класифікацією (2) впливає маса випадкових процесів. Відомо, що зменшення похибок випадкового характеру можна досягнути відповідною статистичною обробкою. Проте, в даному, випадку, така статистична обробка повинна проводитись на коротких вибірках, а це унеможливує суттєве зменшення похибок класифікації [7].

На думку авторів, вихід з положення може бути знайдений шляхом використання в системах контролю та діагностики принципів адаптації з використанням алгоритмів пошуку: Гауса-Зайделя, градієнтного, найшорішого

Висновки. У даній статті розглянуті схемотехнічна та математична моделі робочої зони ДА, виявлені збурення, які надають власні коливання ДА під час своєї роботи, запропоновані підходи до побудови систем контролю та діагностики форсунок в режимі реального часу.

Список літератури: 1. *Кропачек О.Ю.* Методы и устройства контроля виброускорений стенок топливпровода высокого давления дизельных агрегатов: Дис. канд. техн. наук: 05.11.13. – Харьков, 2004. – 214 с. 2. *Володин А.И., Блинов П.Н., Вихирев В.В., Попков В.В.* Контроль качества работы топливной аппаратуры // Двигателестроение. – 1990. – №5. – С. 48 – 51. 3. *Варбачнец Р.А.* Мониторинг и расчет рабочего процесса судовых дизелей в эксплуатации: Дис. канд. Техн. наук: 05.04.15. – Одесса, 1997. – 185 с. 4. *Сисак Р.М.* Методы та системи статистичної діагностики дизель-генераторів на базі циклічних процесів: Дис. канд. Техн. наук: 05.11.16. – К., 2000. – 185 с. 5. *Мигущенко Р.П., Гусельников В.К., Валуїська О.Ю.* Классификация состояния форсунок дизель-генераторной установки по числовым характеристикам // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Электроэнергетика и преобразовательная техника. – Харьков. -2004. – Вып. 5. С. 88-92. 6. *Мигущенко Р.П., Кропачек О.Ю., Мараховська М.М., Тверитникова О.Є.* Дослідження інформаційної моделі геліосистеми // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. Автоматика та приладобудування. – Харків. – 2011. – Вып. 57. С. 133-137. 7. *Мигущенко Р.П., Кропачек О.Ю., Коваленко Д.А.* Анализ задачи построения системы отсчетов измерительного вибросигнала топливного насоса высокого давления дизельных установок // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Автоматика и приборостроение. – Харьков. – 2005. – Вып. 38. – С. 131-135. 8. Теория автоматического управления: В 2 ч. / Под ред. Воронова. – М., Высшая школа, 1977. – Ч. 2: Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. – 288 с.

Надійшла до редколегії 10.04.2012

УДК 539.3:534.1

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА ПО СТЕРЖНЮ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Розглянута динаміка стержня з точковою масою, що зосереджена на його незакріпленому краї (торці), по якому відбувається непружний удар твердим тілом, яке рухається. Показано, що коефіцієнти динамічності, обчислені за теоріями Сен-Венана та Кокса відрізняються несуттєво в широкому інтервалі зміни параметрів тіл, які співударяються.

Рассмотрена динамика стержня с точечной массой, сосредоточенной на его незакрепленном крае (торце), по которому производится неупругий удар движущимся твердым телом. Показано, что коэффициенты динамичности, вычисленные по теориям Сен-Венана и Кокса, отличаются незначительно в широком интервале изменения параметров соударяющихся тел.

The dynamics of a beam with a point mass concentrated at its not assigned-edge, which is produced by inelastic impact by a moving solid. The dynamic coefficients calculated from the theories of Saint-Venant and Cox differs slightly in a wide range of parameters that satisfy the-body collisions are shown.

Введение. Задача о неупругом продольном ударе по свободному торцу стержня относится к классическим [1]. Ее первое решение построил еще *Навье* (1823 г.) в форме ряда, который из-за медленной сходимости оказался неудобным для проведения расчетов [2]. Позже, *Сен-Венан*, используя метод *Буссинеска*, нашел ее другое решение в форме кусочно-непрерывной функции, учитывающее волновой характер деформирования стержня. Это решение разными методами обобщали *Е.Л. Николаи* и *А.И. Лурье* [1]. К обсуждаемой задаче обращались и другие исследователи, в частности *В. Гольдсмит* [3] и *Н.А. Кильчевский* [2]. Здесь обобщается классическая постановка задачи учетом дополнительной точечной массы, жестко прикрепленной к свободному краю стержня, по которому производится неупругий удар твердым телом. Операционным методом строится решение обобщенной задачи в форме ряда. Использование компьютера снимает проблему вычисления массива корней частотного трансцендентного уравнения и определения динамических перемещений, которая существовала во времена Навье, а также позволяет сравнить результаты расчетов по различным теориям, включая элементарную энергетическую теорию Кокса, которую традиционно излагают в учебной и справочной литературе по сопротивлению материалов [4,5,6,7].

Основная часть работы. Пусть верхний край $x = 0$ однородного прямолинейного вертикального стержня закреплен неподвижно, а на нижнем крае $x = l$ прикреплена точечная масса M_* , как показано на рис. 1.

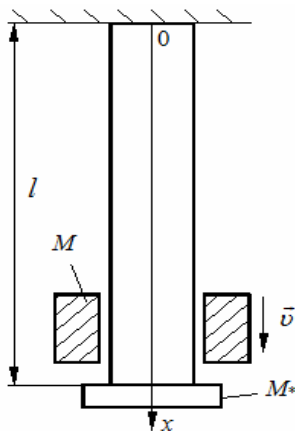


Рисунок 1 – Стержень с сосредоточенной массой, подвергнутой удару.

По ней ударяет падающее тело массой M со скоростью v . Определим влияние M_* на динамику стержня.

Следуя [9], построим изображение функции *Грина* $G(x, p)$, решив урав-

нение растяжения-сжатия стержня, записанное в пространстве изображений по Карсону

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} G = 0. \quad (1)$$

Здесь $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость продольной волны; E, ρ – соответственно модуль упругости и плотность материала стержня; p – параметр интегрального преобразования.

Изображение функции влияния подчиняем граничным условиям:

$$G(0, p) = 0; \quad \left. \frac{dG(x, p)}{dx} \right|_{x=l} = \frac{1}{EF}, \quad (2)$$

в которых F – площадь поперечного сечения стержня длиной l .

Решение краевой задачи (1), (2) имеет вид:

$$G(x, p) = \frac{l^2}{M_0 c^2 \zeta} \frac{sh(\zeta x l^{-1})}{ch(\zeta)}. \quad (3)$$

Здесь $\zeta = \frac{pl}{c}$; $M_0 = \rho F l$ – масса стержня.

Согласно теории Сен-Венана [8], изображение продольного перемещения стержня определяется выражением:

$$U(x, p) = M_* g G(x, 0) + \frac{M(g + \nu p) G(x, p)}{1 + (M + M_*) p^2 G(l, p)}, \quad (4)$$

в котором g – ускорение свободного падения.

Переход от (4) к оригиналу проводим с помощью второй теоремы разложения. Получаем ряд

$$u(x, t) = (M + M_*) g G(x, 0) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{M(g + \nu p_K) G(x, p_K)}{\frac{d}{dp} [p + (M + M_*) p^3 G(l, p)]_{p=p_K}} e^{p_K t}, \quad (5)$$

где p_K – корни трансцендентного уравнения:

$$1 + (M + M_*) p^2 G(l, p) = 0, \quad (6)$$

которое с учетом (3) преобразуется в:

$$1 + \chi_* \zeta th \zeta = 0, \quad \chi_* = \frac{M + M_*}{M_0}. \quad (7)$$

Вычисляя производную знаменателя в (5) по p , с учетом (3) и (6), получаем

$$\frac{d}{dp} [p + (M + M_*) p^3 G(l, p)]_{p=p_K} = \chi_* \frac{l^2}{c^2} p_K^2 - \frac{1}{\chi_*} - 1. \quad (8)$$

Корни уравнения (7) чисто мнимые. Поэтому введя обозначения $z = i\zeta$, $i = \sqrt{-1}$, вместо (7) будем решать уравнение:

$$tgz = \frac{1}{\chi_* z}. \quad (9)$$

Предельный переход $p \rightarrow 0$ в (3) дает:

$$G(x, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} G(x, p) = \frac{l^2}{M_0 c^2} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{sh(\zeta x l^{-1})}{\zeta ch \zeta} = \frac{x}{EF}. \quad (10)$$

Учитывая мнимость корней p_K и выражение (10), разложение (5) преобразуем к виду:

$$u(x, t) = (M + M_*) \frac{gx}{EF} - \frac{2Ml}{cM_0} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{[g \cos(\omega_K t) - v \omega_K \sin(\omega_K t)] \sin\left(\frac{\omega_K x}{c}\right)}{\omega_K \left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \frac{l^2 \omega_K^2}{c^2}\right) \cos\left(\frac{\omega_K l}{c}\right)}. \quad (11)$$

Здесь $\omega_K = \frac{z_K c}{l}$; z_K – положительные корни уравнения (9).

Для вычисления перемещения стержня в сечении удара $x = l$ из (9) и (11) следует более компактное разложение:

$$u(l, t) = (M + M_*) \frac{gl}{EF} - 2 \frac{\chi}{\chi_*} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_K t) - v \omega_K \sin(\omega_K t)}{\omega_K^2 \left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \frac{l^2 \omega_K^2}{c^2}\right)}, \quad (12)$$

в котором $\chi = MM_0^{-1}$; $\chi_* = \chi + \alpha$; $\alpha = M_* M_0^{-1}$.

Чтобы найти $u_g = \max u(l, t)$ с помощью (12) нужно знать корни уравнения (9). Если ввести обозначение $z_K = (k-1)\pi + \varepsilon_K$, то ε_K не сложно находить итерациями по формуле:

$$\varepsilon_K^{(n+1)} = \arctg \frac{1}{\chi_* \left[(k-1)\pi + \varepsilon_K^{(n)} \right]}. \quad (13)$$

в которой $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации; k – номер корня.

Начальным приближением можно брать $\varepsilon_K^{(0)} = 1$ или χ_*^{-1} , когда $\chi_* > 1$.

Таким образом, вычисление z_K и частичной суммы ряда (12) на компьютере не вызывает затруднений.

Учитывая быструю сходимость ряда, из (12), в одночленном приближении, получаем выражение:

$$u_g = u_* + u_{CT} + 2\chi \frac{\sqrt{g^2 + (v\omega_1)^2}}{\omega_1^2 (1 + \chi_* + \chi_*^2 \zeta_1^2)}, \quad (14)$$

где $u_* = M_* gl (EF)^{-1}$; $u_{CT} = M gl (EF)^{-1}$; $\omega_1 = z_1 cl^{-1}$; z_1 – наименьший положительный корень уравнения (9).

В литературе по сопротивлению материалов [4,5,6,7] приближенное вычисление u_g предлагают проводить по формуле:

$$u_g = u_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g} \frac{1}{(1 + K_0 \chi^{-1}) u_{CT}}} \right), \quad (15)$$

в которой K_0 – коэффициент приведения массы стержня к свободному краю.

С учетом наличия присоединенной массы эта формула преобразуется в:

$$u_g = u_* + u_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g} \frac{\chi}{(\chi_* + K_0) u_{CT}}} \right). \quad (16)$$

Формула (16) обобщает (15) и переходит в нее когда $\chi = \chi_*$, $M_* = 0$.

Наличие изложенных теорий позволяет сравнить результаты, к которым они приводят.

Для проведения расчетов берем стальной стержень ($E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 7810$ кг/м³) длиной $l = 1,2$ м и площадью поперечного сечения $F = 4 \cdot 10^{-4}$ м². Коэффициент K_0 в формуле (16), аналогично [4,7], задаем равным 1/3. Варьируем значения: α , χ и v .

В частичной сумме ряда (12) вычисляем 100 членов.

Результаты вычислений z_K с помощью (13) записаны в табл. 1.

Таблица 1.

Значения z_K при разных α , χ и k

k	$\alpha = 0$		$\alpha = 1$		$\alpha = 3$	
	$\chi = 0,01$	$\chi = 1$	$\chi = 1$	$\chi = 2$	$\chi = 1$	$\chi = 2$
1	1,555245	0,860334	0,653273	0,547237	0,480659	0,434721
2	4,665765	3,425619	3,292310	3,243988	3,219099	3,203935
3	7,776374	6,437298	6,361620	6,335749	6,322705	6,314847
4	10,887131	9,529335	9,477486	9,460000	9,451223	9,445949
5	13,998090	12,645288	12,606014	12,592834	12,586231	12,582265
6	17,109308	15,771285	15,739719	15,729153	15,723862	15,720685
50	154,512451	153,944534	153,941299	153,940216	153,939667	153,939346
100	311,328491	311,020905	311,019287	311,018768	311,018494	311,018311

Анализ чисел в табл. 1 показывает, что при больших k корни z_k приближаются к значению $(k-1)\pi$. Например, при $k=100:99\pi \approx 311,0176$, что незначительно отличается от чисел в последней строке.

Результаты вычислений $u(l,t)$ по формуле (12) представлены на рис. 2, 3, 4.

Графики на рис. 2 построены при $\chi=2$, $v=3$ м/с и трех значениях $\alpha=0, 1, 2$. График, полученный при $\alpha=0$, проходит значительно выше графика, полученного при $\alpha=2$. Наличие сосредоточенной массы на краю стержня, по которому производится удар, уменьшает динамические перемещения стержня. Максимумы $u(l,t)$ на рис. 2 имеют значения: $(9,22; 7,61; 6,63) \cdot 10^{-4}$ м. Их расчет по формуле (16) дал близкие результаты: $(9,10; 7,62; 6,69) \cdot 10^{-4}$ м, т. е. в рассмотренном примере имеем хорошее согласование двух теорий.

На рис. 3 нанесены графики $u(l,t)$, полученные при $\alpha=1$, $v=3$ м/с и разных χ . Здесь при $\chi=0,5; 1; 2; 3$ $\max u(l,t)$ равны соответственно $(2,62; 4,62; 7,61; 9,93) \cdot 10^{-4}$ м. Их расчет по формуле (16) дает: $(2,57; 4,56; 7,62; 10,03) \cdot 10^{-4}$ м. Расхождения результатов расчета по двум теориям здесь также незначительны.

О влиянии скорости удара на динамические перемещения стержня позволяет судить графики $u(l,t)$ на рис. 4. Они рассчитаны по (12) при $\alpha=0,5$, $\chi=2,5$ м/с и трех значениях $v=1, 2, 4$ м/с. Полученные максимальные $u(l,t)$ на графиках равны: $(3,18; 6,35; 12,67) \cdot 10^{-4}$ м. Теория Кокса

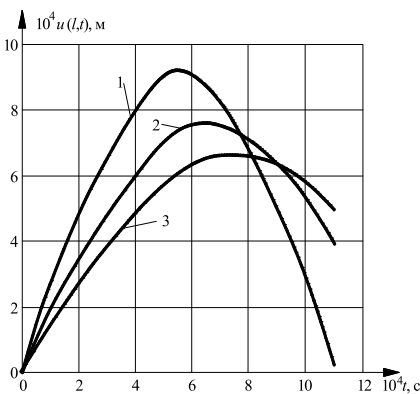


Рисунок 2 – Графики $u(l,t)$ при разных $\alpha : 1, 2, 3 - \alpha = 0; 1; 2$.

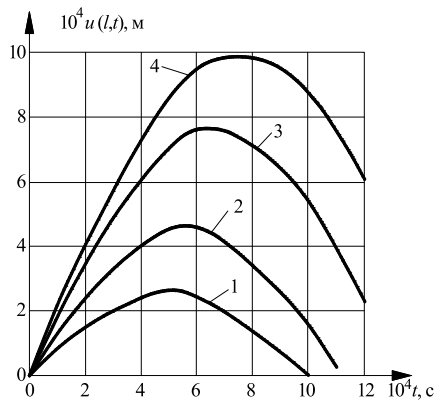


Рисунок 3 – Графики $u(l,t)$ при разных $\chi : 1, 2, 3, 4 - \chi = 0,5; 1; 2; 3$.

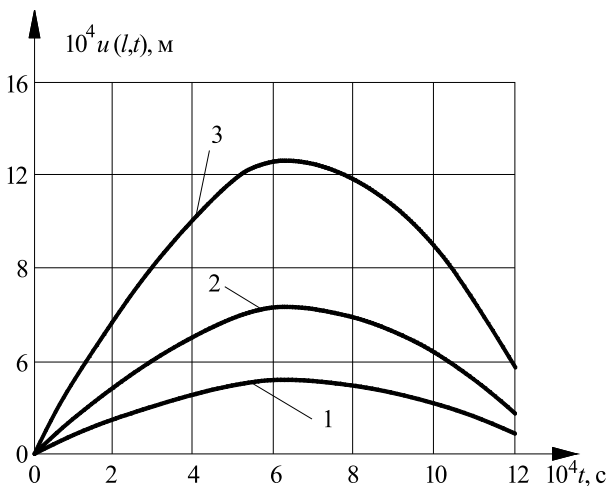


Рисунок 4 – Графики $u(l, t)$ при разных ν : 1, 2, 4 – $\nu = 1$; 2; 3 м/с.

в этом примере дает: $u_g = (3,19; 6,35; 12,69) \cdot 10^{-4}$ м, что близко к результатам расчета по теории Сен-Венана. Зависимость u_g от ν почти линейная.

В формуле (16) задавали $K_0 = 1/3$. Но существуют разные способы определения этого коэффициента, которые приводят к разным K_0 . Если использовать равенство кинетической энергии, то [2]:

$$K_0 = \int_0^1 \xi^2 d\xi = 1/3.$$

По равенству количества движения [2]:

$$K_0 = \int_0^1 \xi d\xi = 1/2.$$

Определяя K_0 по равенству частот основного тона колебаний стержня и системы с одной степенью свободы, имеем $K_0 = 4\pi^{-2}$.

Используя указанные K_0 , выясним какое из них приводит к лучшему согласованию двух теорий. В таблицах 2 и 3 записаны значения u_g , которые дают теории при $\nu = 3$ м/с в широком интервале изменения χ . Числа в табл. 2 получены при $\alpha = 0$ (стержень без сосредоточенной массы), а в табл. 3 – при $\alpha = 1$ (стержень с сосредоточенной массой, равной массе стержня).

Таблица 2.

Значения $10^4 u_g$, м, вычисленные по двум теориям при $\alpha = 0$.

χ	По (12), 100 членов	По (14)	По (16) при:				
			$K_0 = 0$	$K_0 = 1/3$	$K_0 = 4\pi^{-2}$	$K_0 = 0,5$	$K_0 = 1$
0,1	0,70	0,87	2,20	1,06	0,98	0,90	0,66
0,3	2,08	2,38	3,80	2,62	2,48	2,33	1,83
0,5	3,41	3,60	4,91	3,81	3,65	3,47	2,84
1	6,04	5,90	6,95	6,02	5,86	5,67	4,91
2	9,23	9,04	9,83	9,10	8,96	8,79	8,03
3	11,41	11,38	12,04	11,42	11,30	11,15	10,43
4	13,23	13,31	13,91	13,36	13,25	13,11	12,44

Таблица 3.

Значения $10^4 u_g$, м, вычисленные по двум теориям при $\alpha = 1$.

χ	По (12), 100 членов	По (14)	По (16) при:				
			$K_0 = 0$	$K_0 = 1/3$	$K_0 = 4\pi^{-2}$	$K_0 = 0,5$	$K_0 = 1$
0,1	0,59	0,58	0,67	0,59	0,57	0,55	0,48
0,3	1,67	1,61	1,83	1,64	1,60	1,56	1,38
0,5	2,62	2,54	2,84	2,57	2,52	2,46	2,20
1	4,62	4,53	4,92	4,56	4,49	4,40	4,02
2	7,61	7,60	8,03	7,62	7,54	7,44	6,96
3	9,93	9,99	10,44	10,03	9,94	9,84	9,34
4	11,88	11,94	12,45	12,05	11,97	11,87	11,36

Расчеты показали, что нет такого K_0 , которое приводит к наилучшему согласованию теорий для всех рассмотренных α и χ . При одних α и χ имеем лучшее соответствие результатов расчета, когда $K_0 = 1/3$, а при других – когда $K_0 = 4\pi^{-2}$ или $K_0 = 0,5$. По точности формула (14) не уступает формуле Кокса (16). Существенно, что при $K_0 = 1$, когда вся масса стержня перенесена в сечение удара (сосредоточенна на торце), формула (16) дает заниженные u_g . Эта же формула завышает u_g , если положить в ней $K_0 = 0$, т. е. пренебречь массой стержня. Поэтому u_g , вычисленные по теории Сен-Венана, удовлетворяют неравенствам:

$$u_1 \leq u_g \leq u_2,$$

в которых

$$u_j = \tilde{u} + u_* + u_{CT} \left(1 + \sqrt{1 + v^2 \chi / [g(\chi_* + 2 - j) u_{CT}]} \right); \quad j = \overline{1; 2};$$

$\tilde{y} = M_0 g l (2EF)^{-1}$ – статическое перемещение торца стержня под действием собственного веса.

Величиной \tilde{y} выше пренебрегали. Для принятых исходных данных:
 $\tilde{y} = 2,627 \cdot 10^{-7}$ м.

Выводы. Расчеты показали, что теории *Сен-Венана* и *Кокса* хорошо согласуются при различных отношениях масс соударяющихся тел, а компактные формулы (14) и (16) вполне пригодны для расчета коэффициента динамичности перемещений при продольном механическом ударе.

Список литературы: 1. *Лурье А.И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 431 с. 2. *Кильчевский Н.А.* Теория соударений твердых тел. – К.: Наукова думка, 1969. – 247 с. 3. *Гольдсмит В.* Удар. – М.: Госстройиздат, 1965. – 448 с. 4. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* Опір матеріалів.. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с. 5. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с. 6. *Шкельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В.* Опір матеріалів. – К.: ЗАТ «Віпол», 2011. – 456 с. 7. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров, М.К. Балыкин, И.А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с. 8. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

Поступила в редколлегию 29.03.2012

УДК 534

К.Ю. ПЛАКСИЙ, студентка, НТУ «ХП»;
Ю.В. МИХЛИН, д-р фіз.-мат. наук, проф. НТУ «ХП»

СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ПРУЖИННО-МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕС ЗРИВУ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ФОРМИ

Нормальні форми коливань пружинно-маятникової системи отримано кількома асимптотичними методами. Досліджено стійкість форм коливань. Аналізується процес зриву вертикальних коливань за методикою Старжинського. Чисельне інтегрування демонструє досить високу точність аналітичних результатів.

Нормальные формы колебаний пружинно-маятниковой системы получены несколькими асимптотическими методами. Исследована устойчивость форм колебаний. Анализируется процесс срыва вертикальных колебаний по методике Старжинского. Численное интегрирование демонстрирует достаточно высокую точность аналитических результатов.

Nonlinear normal modes of the spring-pendulum system are obtained by few asymptotic methods. It is investigated a stability of the vibration modes. A process of the vertical vibrations disruption is analyzed by the Starzhinsky approach. Numerical simulation shows a good exactness of the analytical results.

Вступ. Нелінійні нормальні форми коливань є узагальненням нормальних коливань лінійних систем [1-3]. В режимі нормальних коливань нелінійна система з кількома степенями свободи поводить себе подібно системі з однією степеню свободи. Виділення та дослідження локалізованих форм коливань є важливою проблемою для інженерних застосувань, зокрема, в задачах гасіння коливань [3]. Задача віброгасіння і локалізації енергії тісно поєднана з загальною задачею щодо перекачки енергії. Перша спроба описати явище нелінійної перекачки енергії зроблена у роботі [4], де розглядається взаємодія форм коливань пружинного маятника. Зазначимо, що саме маятникові системи є класичними моделями нелінійної теорії коливань, дослідження яких дозволяє виділити важливі нелінійні динамічні ефекти [5,6]. Зокрема, процес зриву вертикальних коливань та перекачка енергії в консервативній маятниковій системі описаний в роботі [5]. Взаємодія нормальних форм коливань в нелінійних системах досліджується в роботах [6,7]. Нормальні форми коливань в пружинно-маятниковій системі побудовано кількома методами в роботі [8].

В даній роботі уточнено розв'язки рівнянь руху пружинно-маятникової системи для стаціонарних режимів, що отримані в [8] *методами гармонічного балансу, багатьох масштабів та нормальних форм Розенберга*. Нормальні форми коливань проаналізовані на стійкість за допомогою *методів алгебраїзації за Айнсом, визначників Хілла* та чисельно-аналітичного методу. Досліджено процес зриву вертикальних коливань за *методикою Старжинського*. Порівняльне чисельне інтегрування дає добру відповідність аналітичним результатам.

Нормальні форми коливань пружного маятника. Розглядається пружний маятник (рис.1), рух якого задається наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + p^2 x - \alpha(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = 0 \\ \ddot{\theta} + \sin \theta - \ddot{x} \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

а кінетична та потенційна енергії мають вигляд:

$$K = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \alpha \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} \alpha \dot{\theta}^2,$$

$$V = \frac{1}{2} p^2 x^2 + \alpha(1 - \cos \theta),$$

де $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $p = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, $\alpha = m/(m+M)$, $\tau = \omega_2 t$.

В цій системі існують дві нелінійні нормальні форми: x -форма, або пружинна мода $x = x(t)$, $\theta = 0$, що відповідає суто вертикальним коливанням і є локалізованою, та θ -форма, або маятникова мода $x = x(t)$, $\theta = \theta(t)$,

що відповідає зв'язаним коливанням і є нелокалізованою.

За допомогою методу гармонічного балансу в [8] отримані аналітичні розв'язки для θ – форми зв'язаних коливань у вигляді:

$$\begin{cases} x(\tau) = A_0 + A_1 \cos 2\omega\tau, \\ \theta(\tau) = B_1 \sin \omega\tau, \end{cases} \quad (2)$$

де $A_0 = 0$; $A_1 = \frac{\alpha\omega^2 B_1^2}{p^2 - 4\omega^2}$; $B_1 = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2)(p^2 - 4\omega^2)}{2\alpha\omega^4}}$.

Подальше уточнення розв'язків (2) методом гармонічного балансу є недоцільним у зв'язку зі значним ускладненням обчислень при збільшенні числа членів рядів Фур'є у відповідних розкладах, причому збіжність цих рядів суттєво залежить від початкових умов.

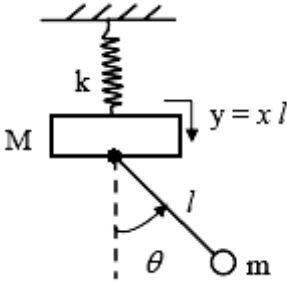


Рисунок 1 – Пружинно-маятникова система.

Уточнимо розв'язки, що отримані в [8] методом багатьох масштабів [6]. Застосування розкладень координат в асимптотичні ряди до членів $O(\varepsilon^3)$ включно та введення масштабів часу до $O(\varepsilon^{-3})$ приводить систему (1) до системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних

похідних та дає наступні розв'язки:

для x – форми:

$$\begin{cases} x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 = 2\varepsilon a_0 \cos(p\tau), \\ \theta = \varepsilon\theta_0 + \varepsilon^2\theta_1 + \varepsilon^3\theta_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

для θ – форми:

$$\begin{cases} x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 = \varepsilon^2 \frac{4\alpha}{p^2 - 4} a_1^2 \cos\left(2\tau\left(1 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha a_1^2}{p^2 - 4}\right)\right), \\ \theta = \varepsilon\theta_0 + \varepsilon^2\theta_1 + \varepsilon^3\theta_2 = 2\varepsilon a_1 \sin\left(\tau\left(1 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha a_1^2}{p^2 - 4}\right)\right) - \varepsilon^3 \frac{2\alpha}{p^2 - 4} a_1^3 \times \\ \times \sin\left(3\tau\left(1 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha a_1^2}{p^2 - 4}\right)\right). \end{cases} \quad (4)$$

Зазначимо, що обмежуючись першим та другим наближеннями у (4) і відповідно з першими двома масштабами часу, маємо розв'язок (4) у вигляді, наведеному в [8]:

$$\begin{cases} x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon^2 \frac{4\alpha}{p^2 - 4} \operatorname{Im}(A_\theta^2) \cos(2\tau), \\ \theta = \varepsilon \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_1 = 2\varepsilon \operatorname{Im}(A_\theta) \sin(\tau), \end{cases} \quad (5)$$

який еквівалентний до виразу (2).

Розв'язок для θ -форми може бути побудовано методом нормальних форм коливань, що базується на побудові траєкторії у конфігураційному просторі системи [1-3]. Відповідне рівняння може бути отримане шляхом переходу до нової незалежної змінної x , яка вводиться замість τ , з використанням інтеграла енергії:

$$2(h - V(x))(1 - \alpha \sin^2 \theta)x'' + (-p^2 x x' \sin \theta - x' \sin \theta + \alpha \sin^2 \theta + p^2 x) \times \\ \times (x'^2 - 2\alpha x' \sin \theta + \alpha) + (h - V(x))(2\alpha x' \sin \theta \cos \theta - 2\alpha \cos \theta) = 0. \quad (6)$$

Точки максимальної еквіпотенціальної поверхні є особливими точками рівнянь (6). Наступні граничні умови забезпечують аналітичне продовження розв'язку на цю поверхню [1-3].

$$(-p^2 x x' \sin \theta - x' \sin \theta + \alpha \sin^2 \theta + p^2 x)(x'^2 - 2\alpha x' \sin \theta + \alpha) = 0. \quad (7)$$

Розв'язок для θ -форми розшукується у такому вигляді:

$$x(\theta) = \varepsilon \tilde{x}_1(\theta) + \varepsilon^2 \tilde{x}_2(\theta) + O(\varepsilon^3), \quad (8)$$

де $\tilde{x}_2(\theta) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}\theta + a_2^{(2)}\theta^2 + a_3^{(2)}\theta^3 + O(\theta^4)$.

Підстановка (8) в рівняння (6) з урахуванням граничних умов (7) приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладань (8):

$$\begin{aligned} \alpha a_0^{(2)} p^2 + 2\alpha a_2^{(2)} Y^2 &= 0, \quad -\alpha a_1^{(2)} + \alpha a_1^{(2)} p^2 + 6\alpha a_3^{(2)} Y^2 = 0, \\ -4\alpha a_2^{(2)} + \alpha a_2^{(2)} p^2 &= 0, \quad -6\alpha a_3^{(2)} - 3\alpha a_3^{(2)} + \alpha a_3^{(2)} p^2 = 0, \\ a_0^{(2)} p^2 &= 0, \quad -a_1^{(2)} + a_1^{(2)} p^2 = 0. \end{aligned}$$

В результаті отримано, що:

$$a_0^{(2)} = a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = 0.$$

Таким чином, розв'язок (8) набуває вигляду:

$$x(\theta) = \varepsilon \left(\frac{\alpha Y^2}{p^2 - 4} + \frac{-2\alpha}{p^2 - 4} \theta^2 + O(\theta^4) \right) + O(\varepsilon^3), \quad (9)$$

що відповідає розв'язку у формі (5) та результатам, отриманим в роботі [8].

Дослідження на стійкість нормальних форм коливань. Для дослідження на стійкість отриманих розв'язків розглянемо рівняння у варіаціях в

лінеаризованому вигляді при варіаціях змінних $x = \tilde{x} + u$, $\theta = \tilde{\theta} + v$:
 для x -форми:

$$\ddot{u} + p^2 u = 0, \quad \ddot{v} + v(1 - \ddot{\tilde{x}}) = 0, \quad (10)$$

для θ - форми:

$$\ddot{u} + p^2 u - \alpha(\ddot{\tilde{\theta}}v + 2\dot{\tilde{\theta}}\dot{v} + \ddot{v}\tilde{\theta}) = 0, \quad \ddot{v} + v - \ddot{\tilde{x}} \cdot v - \ddot{u}\tilde{\theta} = 0. \quad (11)$$

Зауважимо, що відхилення по координаті x не впливають на **стійкість вертикальної форми**, тому будемо розглядати лише друге рівняння системи (10).

При $\theta \equiv 0$ для системи (1) маємо рівняння $\ddot{\tilde{x}} + p^2 \tilde{x} = 0$, розв'язок якого з урахуванням умов парності буде $\tilde{x} = A \cos p\tau$. Підставляючи цей розв'язок у друге рівняння (10), зведемо його до класичного *рівняння Матьє*

$$v'' + v(a + \mu \cos 2\tau_1) = 0, \quad (12)$$

де $\tau_1 = p\tau/2$, $v'' = d^2v/d\tau_1^2$, $a = 4/p^2$, $\mu = 4A$, для якого границі стійкості/нестійкості є відомими [9]. Границі для головного та другого параметричних резонансів побудовані засобами пакету Matlab у вигляді залежностей амплітуди A від частоти p , що відповідно представлені на рис.2, 3. Нестійкість спостерігається всередині фігур, утворених граничними лініями.

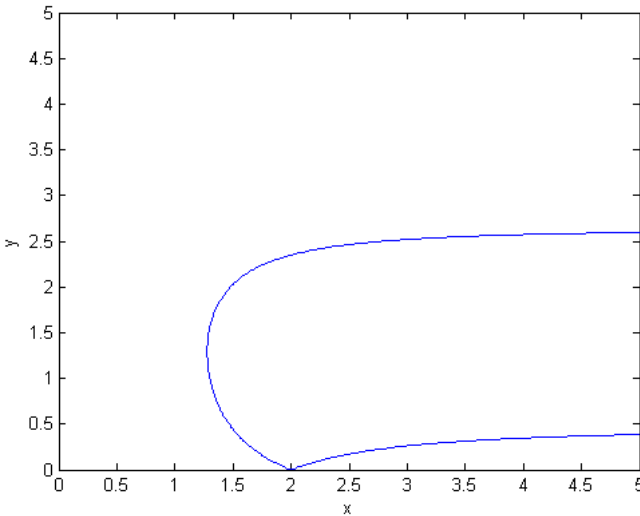


Рисунок 2 – Перша границя.

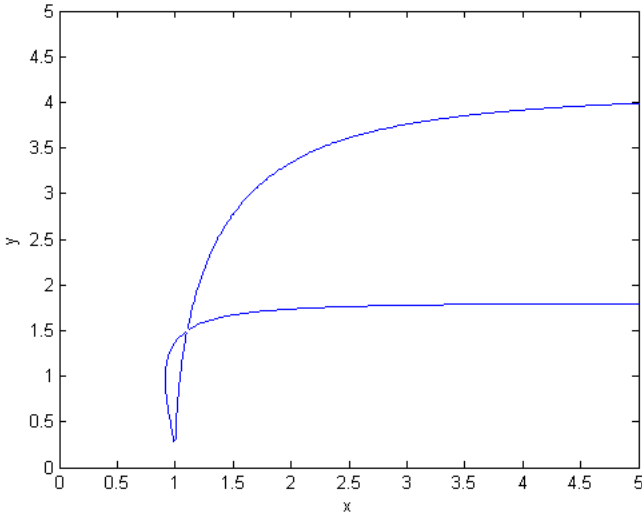


Рисунок 3 – Друга границя.

До рівняння (12) застосуємо також методику алгебраїзації за Айнсом [10], що за допомогою спеціальної заміни $z = \sin^2 \tau_1$ приводить його до диференційного рівняння в алгебраїчній формі з особливими точками:

$$\frac{d^2v}{dz^2} \cdot 4z(1-z) + \frac{dv}{dz} \cdot 2(1-2z) + (a+2\varepsilon-4\varepsilon z) \cdot v = 0. \quad (13)$$

Підстановка в (13) розв'язків спеціального вигляду, що відповідають границям областей стійкості/ нестійкості [10,2,3],

$$v = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3, \quad v = \sqrt{z} \cdot (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3),$$

$$v = \sqrt{1-z} \cdot (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3), \quad v = \sqrt{z} \cdot \sqrt{1-z} \cdot (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3),$$

приводить до систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів цих розв'язків.

Умовою існування нетривіальних розв'язків цих систем є рівність їхніх визначників нулю:

$$\begin{vmatrix} a+2\varepsilon & 2 & 0 & 0 \\ -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-4 & 12 & 0 \\ 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-16 & 30 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-36 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (a+2\varepsilon)-1 & 6 & 0 & 0 \\ -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-9 & 20 & 0 \\ 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-25 & 42 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-49 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (a+2\varepsilon)-1 & 2 & 0 & 0 \\ 1-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-11 & 12 & 0 \\ 4\varepsilon & 9-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-37 & 30 \\ 0 & 4\varepsilon & 25-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-79 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (a+2\varepsilon)-4 & 6 & 0 & 0 \\ 4-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-22 & 20 & 0 \\ 4\varepsilon & 16-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-56 & 42 \\ 0 & 4\varepsilon & 36-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-106 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо ці визначники засобами Mathcad 2000. Побудовані попарно за допомогою пакету Matlab, вони дають границі стійкості/нестійкості $A(p)$, представлені на рис. 4, 5.

Порівняльний аналіз побудованих границь областей стійкості/нестійкості для рівняння Мат'є та за методикою Айнса, дозволяє зробити висновок, що області нестійкості за Айнсом повністю покривають області нестійкості на рис. 2, 3, при цьому нижні границі областей відтворюються достатньо добре, а верхні границі відтворюються з запасом, що призводить до збільшення розмірів областей нестійкості. Присутні також малі області, яких немає на рис. 2, 3.

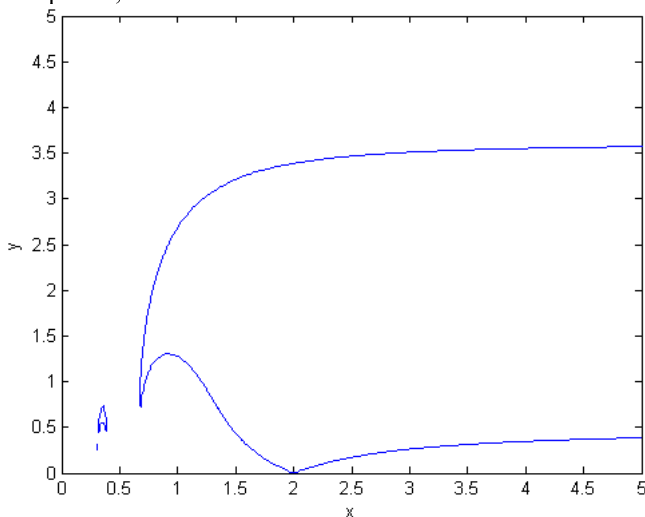


Рисунок 4 – Перша границя за Айнсом.

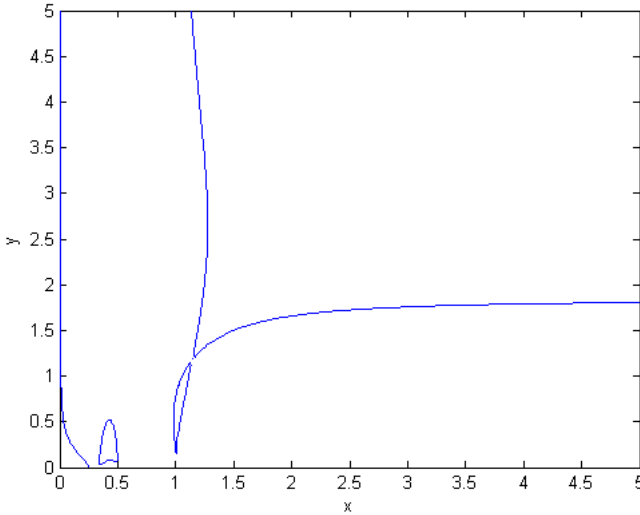


Рисунок 5 – Друга границя за Айнсом.

Для дослідження на **стійкість зв'язаної форми коливань** методом визначників Хілла друге рівняння системи (1) розв'яжемо відносно θ за допомогою методу гармонічного балансу з урахуванням залежності (6). Представимо $\theta = B \sin \omega \tau$. Оскільки $Y = \max \theta = |B|$, то $x(\tau) = A \cos 2\omega \tau$, де $A = (1 - \omega^2) / 2\omega^2$. У результаті отримаємо:

$$\theta(\tau) = \sqrt{\frac{2(1 - \omega^2)}{R\omega^2}} \sin \omega \tau, \text{ де } R = \frac{4\varepsilon\alpha}{p^2 - 4}.$$

Підстановка в рівняння у варіаціях (8) залежностей $\theta(\tau)$, $x(\tau)$ та шуканих розв'язків, що відповідають границям стійкості/ нестійкості, у вигляді рядів Фур'є з невідомими коефіцієнтами та двома періодами: періоду T

$$u = C_1 \cos 2\omega\tau + C_2 \cos 4\omega\tau, \quad v = N_1 \sin \omega\tau + N_2 \sin 3\omega\tau$$

та періоду $2T$

$$u = C_3 \cos \omega\tau + C_4 \cos 2\omega\tau, \quad v = N_3 \sin \frac{\omega}{2}\tau + N_4 \sin \frac{3\omega}{2}\tau$$

приводить до систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, умовою існування нетривіальних розв'язків яких є рівність нулю відповідних визначників Хілла:

$$\begin{vmatrix} p^2 - 4\omega^2 & 0 & -2\alpha\omega^2 B & 2\alpha\omega^2 B \\ 0 & p^2 - 16\omega^2 & 0 & -8\alpha\omega^2 B \\ -2\omega^2 B & 0 & 1 - \omega^2 - \frac{2\alpha\varepsilon}{p^2 - 4} B^2 \omega^2 & \frac{2\alpha\varepsilon}{p^2 - 4} B^2 \omega^2 \\ -2\omega^2 B & -8\omega^2 B & \frac{2\alpha\varepsilon}{p^2 - 4} B^2 \omega^2 & 1 - 9\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{8}\alpha\omega^2 B & \frac{1}{8}\alpha\omega^2 B \\ p^2 - \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{4}\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega^2 B & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Застосування пакету Mathcad 2000 для розкриття цих визначників дає наступні залежності амплітуди A від частоти p

для T -розв'язків:

$$-A \frac{16A^3 p^4 + 496A^2 p^4 - 2080A^2 p^2 - 25996Ap^2 - 393984A - 320p^4 + 6400p^2 - 20480}{(2A+1)^4} = 0,$$

та для $2T$ -розв'язків:

$$\frac{0,25(p^2 - \frac{1}{(2A+1)}) \cdot A \cdot (10p^2 - 40)(1 - \frac{1}{4(2A+1)})}{(2A+1)^2} = 0.$$

Засобами пакету Matlab побудовані відповідні границі стійкості/нестійкості, зображені на рис.6, 7.

Отримано, що області нестійкості складаються з внутрішніх точок фігур, що утворені в результаті перетину граничних ліній. Показано, що в областях $\{A > 0; |p| < 2\}$ та $\{A < 0; |p| > 2\}$ коливання не можуть бути реалізовані. Таким чином, оскільки границі стійкості/нестійкості на рис.7 пролягають в області нереалізації коливань, то границі стійкості/нестійкості на рис.6 і є шуканими границями для θ -форми.

Обидві форми коливань досліджені на стійкість також за допомогою чисельно-аналітичного критерію стійкості, що був запропонований у роботі [11], який має в основі класичне визначення стійкості за Ляпуновим [12]. Згідно з цим критерієм поточні значення збурень порівнюються з початковими значеннями.

Для x -форми критерій має вигляд:

$$\sqrt{(v(t) - v(0))^2} \leq \rho \sqrt{(v(0))^2}, \quad (14)$$

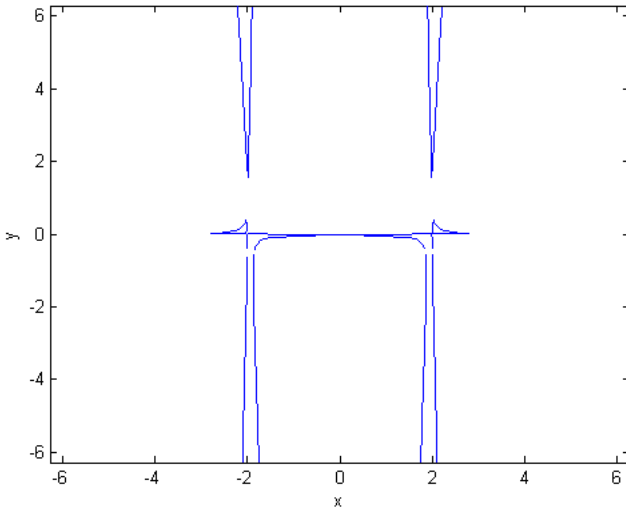


Рисунок 6 – Границя стійкості для T-розв'язку.

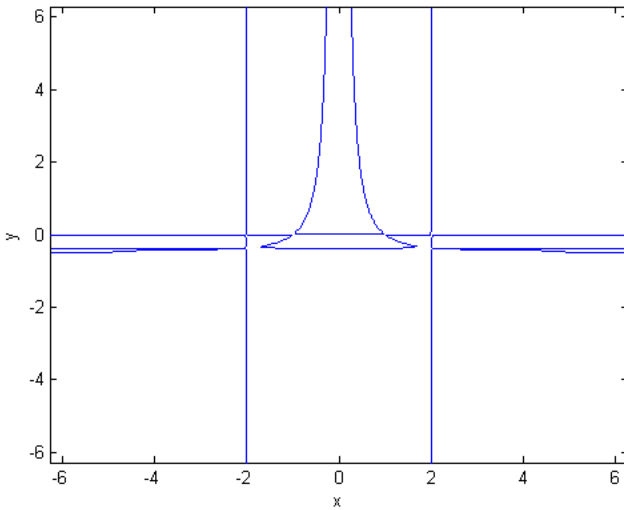


Рисунок 7 – Границя стійкості для 2T-розв'язку.

для θ - форми критерій має вигляд:

$$\sqrt{(u(t) - u(0))^2 + (v(t) - v(0))^2} \leq \rho \sqrt{(u(0))^2 + (v(0))^2}. \quad (15)$$

Чисельне інтегрування методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі $t \in [0, T]$ з кроком $\Delta t = 0.01$ с рівнянь у варіаціях проведено при початкових

умовах $u(0) = 0.01$ м, $u'(0) = 0$ м/с, $v(0) = 0.01$ рад, $v'(0) = 0$ рад/с та $\rho = 5$ на обраній сітці змінювання параметрів: $0 \leq A \leq 2$, $0 \leq p \leq 5$ з кроком по сітці $\Delta A = 0.1$, $\Delta p = 0.1$. Розрахунок проводився в умовах $t \in [0, T]$ до тих пір, поки границі областей стійкості/нестійкості не стабілізуються. Визначено, що границі областей стабілізуються вже при $T = 50$ с. На рис.8, 9 отримані області нестійкості позначені значком *.

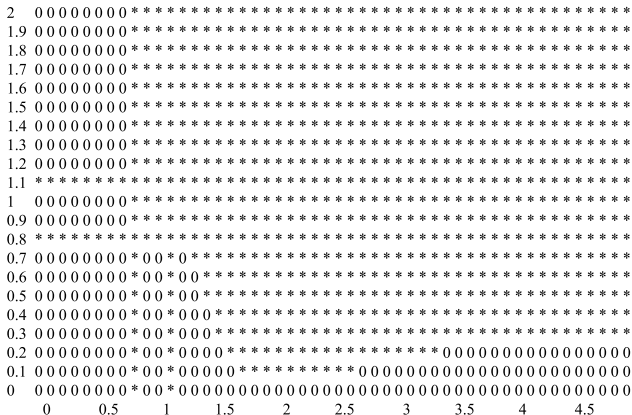


Рисунок 8 – Границя стійкості для x – форми.

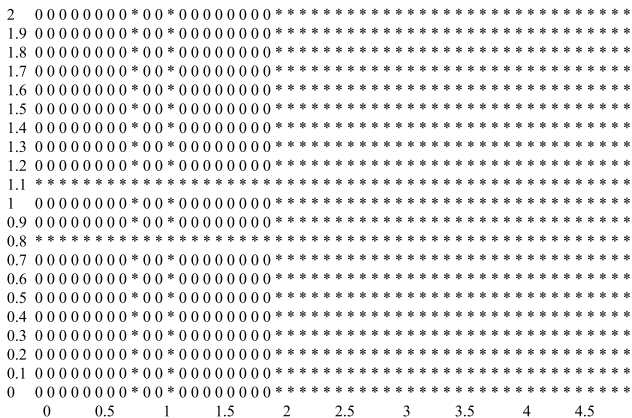


Рисунок 9 – Границя стійкості для θ – форми.

Порівняння отриманих чисельних результатів сукупно з першою та другою границями стійкості/нестійкості для рівняння Матьє для x – форми та з границями стійкості/нестійкості, отриманих методом визначників Хілла для θ – форми, дозволяє зробити такі висновки: чисельно-аналітичний експери-

мент за критеріями (14), (15) в цілому добре відтворює області стійкості/нестійкості для прямої форми, але не дозволяє побачити деякі особливості поведінки границь стійкості/нестійкості для зв'язаної форми, а саме те, що вертикаль $p = 2$ є дотичною до границі стійкості/нестійкості на рис. 6. Для відтворення малих областей стійкості між вертикаллю $p = 2$ та границею стійкості/нестійкості, очевидно, треба подрібнювати сітку параметрів A і p .

Дослідження зриву форми вертикальних коливань. При деяких значеннях параметрів відбувається зрив вертикальних коливань пружинно-маятникової системи в результаті скільки завгодно малих збурень по координаті θ . Перехідний процес від форми вертикальних коливань до форми зв'язаних коливань був досліджений за допомогою методики Старжинського [5] для консервативних систем з використанням інтеграла енергії у формі:

$$2(K + V) = \dot{x}^2 + p^2 x^2 + \alpha \dot{\theta}^2 + \alpha \theta^2 - 2\alpha x \dot{\theta} = \mu^2.$$

Методика включає два наступні етапи.

На першому етапі до системи рівнянь (1) застосовується підстановка Ляпунова, $x = (\rho/p) \sin \vartheta$, $\dot{x} = \rho \cos \vartheta$, $\theta = \rho z_1$, $\dot{\theta} = \rho z_2$, яка дозволяє понизити порядок системи на дві одиниці і отримати рівняння відносно малих відхилень по куту θ :

$$p^2 \frac{d^2 \xi}{d\vartheta} + \xi = \frac{\mu}{(1 + \alpha \xi^2 + \alpha p^2 \xi'^2)^{1/2}} [\sin \vartheta (-p\xi + \alpha(\frac{2}{p} - p)\xi^3 + \alpha(p^3 - 6p)\xi\xi'^2) + \cos \vartheta (-p^3 \alpha \xi'^3 + 5\alpha p \xi' \xi'^2)] + O(\mu^2), \quad (15)$$

де $\xi \equiv z_1$, $\xi' \equiv \frac{d\xi}{d\vartheta}$, а також рівняння для змінної ρ , фазового часу ϑ та реального часу t :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu + O(\mu^2), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - \cos 2\vartheta) \mu + O(\mu^2),$$

$$t = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} (1 \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 - \cos \vartheta) \mu) d\vartheta. \quad (16)$$

Тривіальний розв'язок рівняння (10) $\xi \equiv 0$ відповідає вертикальним коливанням $x = Y \cos pt$ маси $m + M$ на пружині з періодом $T = 2\pi/p$.

Застосування до (15) методу малого параметра з розкладенням розв'язку до членів порядку $O(\mu^2)$ включно дозволяє відшукати «породжувальний» розв'язок

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right),$$

де «породжувальна» амплітуда знайдена з умов виключення вікових членів

при $p = 2$, коли кругові частоти у правій частині рівняння співпадають з частотою «породжувального» розв'язку:

$$\begin{cases} -1 - \alpha M_0^2 + 2\alpha N_0^2 = 0, \\ -1 - \alpha N_0^2 + 2\alpha M_0^2 = 0. \end{cases}$$

Були також отримані вирази для періоду коливань, $T = 2T_{\text{вср}} \times (1 \mp (1/2\sqrt{3})\mu) + O(\mu^2)$, та закону руху маятникової системи,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6} \mu \sin 2t, \\ \theta = \pm \frac{\sqrt{6\alpha}}{3\alpha} \mu \cos(t \mp \frac{\pi}{4}). \end{cases}$$

Визначено, що при зв'язаних коливаннях на долю вертикальних припадає $\frac{1}{3}[1 + O(\mu^2)]$ енергії всього руху.

На другому етапі за допомогою підстановки Ван-дер-Поля,

$$\xi = a \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \varphi\right), \quad \frac{d\xi}{d\vartheta} = -\frac{1}{2} a \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \varphi\right),$$

рівняння (15) при $p = 2$ розділяється на систему рівнянь першого порядку відносно амплітуди і фази, що повільно змінюються у часі:

$$\begin{cases} \frac{da}{d\vartheta} = \frac{\mu}{4} (1 + \alpha a^2)^{-1/2} [(2a + \alpha a^3) \sin \vartheta \sin(\vartheta + 2\varphi) + \frac{\alpha a^3}{2} \cos \vartheta + \\ \quad + \alpha a^3 \cos \vartheta \cos(\vartheta + 2\varphi) - \frac{3\alpha a^3}{2} \cos \vartheta \cos(2\vartheta + 4\varphi)], \\ \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\mu}{4} (1 + \alpha a^2)^{-1/2} [(2 + \alpha a^2) \sin \vartheta + (2 + \alpha a^2) \sin \vartheta \cos(\vartheta + 2\varphi) + \\ \quad + 2\alpha a^2 \cos \vartheta \sin(\vartheta + 2\varphi) + \frac{3\alpha a^2}{2} \cos \vartheta \sin(2\vartheta + 4\varphi)]. \end{cases} \quad (17)$$

Усреднюючи (17) по незалежному змінному ϑ , що явно входить у рівняння, отримаємо скорочені рівняння Ван-дер-Поля і їх перший інтеграл. Наближене інтегрування цих рівнянь у припущенні, що амплітуда коливань не перевершує «породжувальної» амплітуди, дає наближений закон змінення амплітуди

$$a = \left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}} b_0 \exp\left(\frac{\mu\vartheta}{4}\right) \right) / \left| 1 - b_0^2 \exp\left(\frac{\mu\vartheta}{2}\right) \right|, \quad (18)$$

де $b_0 = \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha} + a_0^2} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) / a_0$, та момент появи «породжувальної» амплітуди для фазового часу

$$\tilde{g} = \frac{4}{\mu} \ln \left[a_0 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right) / \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha} + a_0^2} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right]. \quad (19)$$

Зі співвідношень (16) отримаємо таку залежність для реального часу:

$$\tilde{t} = \frac{g}{2} \left(1 \mp \frac{\mu}{2\sqrt{3}} \right) + O(\mu^2). \quad (20)$$

Зазначимо, що значення реальної амплітуди по координаті θ можна обчислити, якщо відоме значення a для відповідного моменту часу,

$$A_\theta = \rho a = \frac{\mu a}{\sqrt{1 + \alpha a^2}},$$

а час появи максимальної амплітуди можна оцінити з (20), поклавши

$$\tilde{g}_{\max} = \frac{2 \ln(1/b_0^2)}{\mu}.$$

На рис. 10 зображений наближений закон змінення амплітуди (18) при $a_0 = 0,01$, $\mu = 0,1000025$, $\alpha = 0,5$, обчислений для таких початкових умов:

$$x(0) = 0,05, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0,001, \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$

Чисельне інтегрування *методом Рунге-Кутта 4-го порядку* на інтервалі $\mathcal{G} \in [0, 300]$ с з кроком $h = 0,01$ с системи рівнянь відносно амплітуди та фази

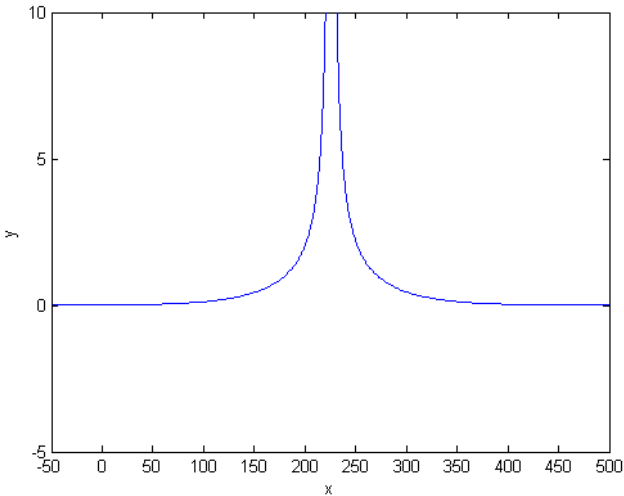


Рисунок 10 – Наближений закон $a(\mathcal{G})$.

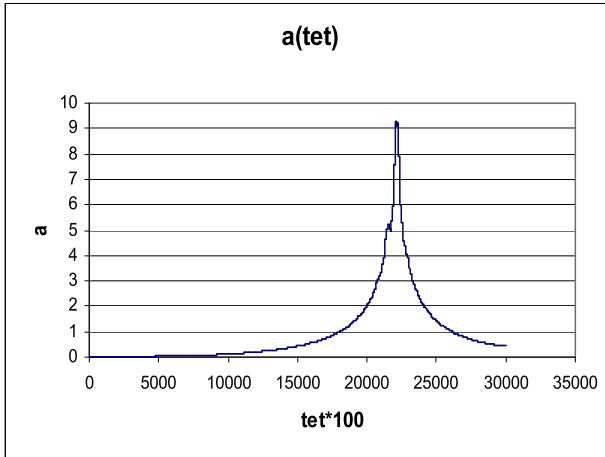


Рисунок 11 – Залежність $a(\vartheta)$.

при початкових умовах $a_0 = 0,01$, $\varphi_0 = 0,0001$ (рис. 11) показало добре співпадання з отриманими аналітичними результатами при амплітудах, що не перевершують «породжувальну» амплітуду. При цьому значення «породжувальної» амплітуди $a = 2$ та максимальна амплітуда $a_{\max} = 9,1$, досягаються відповідно при значеннях фазового часу $\vartheta = 199.452$ та $\vartheta = 225.790$, обчислених з (19). У перерахунку на амплітуду по координаті θ та на час t згідно з (20) отримано, що «породжувальна» амплітуда $A_\theta = 0.1155$ і максимальна амплітуда $A_{\theta \max} = 0.1397$ досягаються відповідно при $t = 102.60$ с, $t_{\max} = 116.15$ с. Достовірність цих результатів підтверджується чисельним ін-

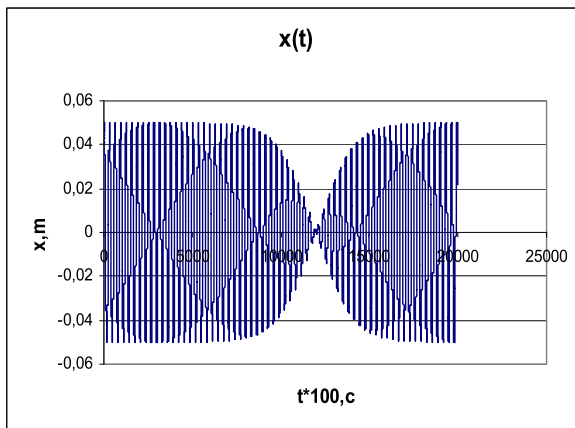


Рисунок 12 – Наближений закон $a(\vartheta)$.

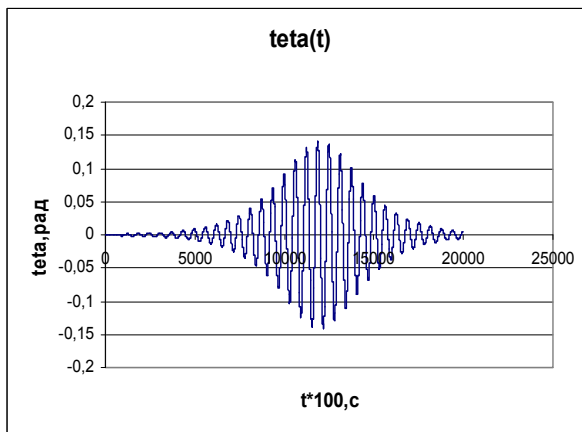


Рисунок 13 – Залежність $\theta(t)$.

тегруванням системи (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі $t \in [0, 200]c$ (рис. 12). Залежності на рис. 12, 13 сукупно демонструють процес «перекачки» енергії у системі в області внутрішнього резонансу.

Висновки. Таким чином, уточнено результати, що приведені в роботі [8], відповідні розв'язки досліджені на стійкість, досліджено умови зриву вертикальних коливань та процес переходу до форми зв'язаних коливань пружинно-маятникової системи. Отримані результати є актуальними для розробки віброгасників нелінійних коливань в механічних системах.

Список літератури: 1. *Rosenberg R.M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom// *R.M. Rosenberg* // – Adv. Appl. Mech. 1966. Vol.9. p. 156- 243. 2. *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.*, 1996, Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems, Wiley Interscience, New York. 3. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная Динамика Упругих Систем, 2010, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск. 4. *Витт А. А., Горелик Г. С.* Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем// Журн. техн. Физики. – 1933. - т. 3, № 2-3, С. 294 – 307. 5. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний// *В.М. Старжинский* - М: Наука, 1977. – 254 с. 6. *Nayfeh A.H., Mook D.* Nonlinear oscillations. New York: Wiley. – 1984, 704 p. 7. *Vakakis AF, Gendelman OV, Bergman LA, McFarland DM, Kerschen G, Lee YS* (2008) *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, Springer Science, Series “Solid mechanics and its applications”, Vol. 156. 8. *Wang F.* Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System/ *Wang F., Bajaj A., Kamiya K.*//Purdue university, 2005.- 54 p. 9. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах//*Т. Хаяси.* – М.: Мир,1968. – 432 с. 10. *Ince E.L.* Ordinary differential equations// *E.L. Ince.* – Longmans Green, London, 1926. 11. *Mikhlin Yu. V.* Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions / *Yu. Mikhlin, T. Shmatko, G. Manucharyan.*// Computers and Structures. – 2004. – V.82.-P.2733-2742. 12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения// *А.М. Ляпунов* – Харьков, 1892. Собр. соч., т.II, 1956, с. 7 – 263.

Надійшла до редколегії 10.05.2012

А.О. ПРОХОРЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ«ХП»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОННОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ДИЗЕЛЯ З АКУМУЛЯТОРНОЮ ПАЛИВНОЮ СИСТЕМОЮ

Описано вивід диференціального рівняння формування керуючого сигналу в електронному блоці керування (ЕБК) дизеля, що включає до складу свого алгоритму опис роботи електронного регулятора частоти обертання, виконаний на основі загальної теорії САР.

Описан вывод дифференциального уравнения формирования управляющего сигнала в электронном блоке управления (ЭБУ) дизеля, включающем в состав своего алгоритма описание работы электронного регулятора частоты вращения, выполненный на основе общей теории САР.

This article describes the output of the differential equation form of the control signal to the electronic control unit (ECU) diesel engine, which includes part of the algorithm description of the electronic speed controller, made on the basis of the general theory of ATS.

Вступ. Відомо, що всі дизельні двигуни обладнаються регуляторами частоти обертання колінчастого вала [1]. Але на сучасних дизелях застосовується паливна апаратури (ПА) акумуляторного типу з електромагнітними або п'єзоелектричними пристроями керування упорскуванням – форсунками [2]. Регулювання величини циклової подачі в такій ПА здійснюється зміною тривалості керуючого електричного імпульсу, що відкриває за допомогою електропривода запірний орган. Тому, застосування традиційних регуляторів з механічним чутливим елементом для таких двигунів неприйнятно, або сполучено зі значними конструктивними складностями, пов'язаними з перетворенням механічних сигналів в електричні.

Це обґрунтовує необхідність застосування на дизелях з електромагнітної ПА електронних регуляторів, які на основі показань електричних чутливих елементів (датчиків) виробляють електричний сигнал керування.

Теорія автоматичного регулювання двигунів внутрішнього згорання (ДВЗ) у частині механічних регуляторів прямої й непрямої дії являє собою сформовану науку, здатну описати будь-яку схему системи автоматичного регулювання (САР), що включає гідравлічні, пневматичні й електричні елементи [1]. Однак електронним регуляторам у цій галузі науки про ДВЗ приділено ще недостатньо уваги. Це пов'язане із триваючим бурхливим розвитком їх апаратної й програмної матеріальної частини.

У статті описаний вивід диференціального рівняння формування керуючого сигналу в електронному блоці керування (ЕБК) дизеля, що включає до складу свого алгоритму опис роботи електронного регулятора частоти обертання, виконаний на основі загальної теорії САР.

Операторне рівняння системи регулювання. При виводі рівняння прийнято, що інерційність (тобто часові константи) датчиків і виконавчих механізмів системи малі, у порівнянні з часом дискретизації роботи системи, і ними можна знехтувати. Дискретизація дорівнює тривалості одного робочого циклу двигуна, що для чотиритактної машини відповідає двом обертам колінчастого вала. Тому, природно, така система є безперервно-цифровою: безперервний елемент – це об'єкт регулювання, тобто дизель, і цифровий, дискретний елемент – його система керування. Тут і надалі для її дослідження прийнятий один із припустимих методів – система зводиться до безперервної і стаціонарної [3].

У роботі [4] показано, що дизельний двигун, оснащений акумуляторною системою паливоподачі, є більше складним об'єктом регулювання, ніж традиційний дизель. Зокрема, він являє собою аперіодичну ланку другого, а не першого порядку [4].

Для підтримки заданого швидкісного режиму в схему управління двигуна необхідно ввести регулятор. У цьому випадку, оскільки мова йде про двигун з акумуляторною паливною системою й електромагнітним керуванням форсунками, такий регулятор може бути тільки електронним.

Рівняння ПІД-регулятора. У цей час в якості електронних регуляторів у всіх областях техніки найбільше застосування отримали алгоритми, у яких реалізовані пропорційний, диференціальний й інтегральний закони керування шляхом повного або часткового їхнього об'єднання (так звані ПІД-регулятори). Для досліджуваного двигуна – дизеля з акумуляторної ПА, вхідною керуючою величиною, що виробляє ЕБК, є тривалість керуючого сигналу на електромагніт форсунки τ . Загальна схема його формування показана на рисунку.

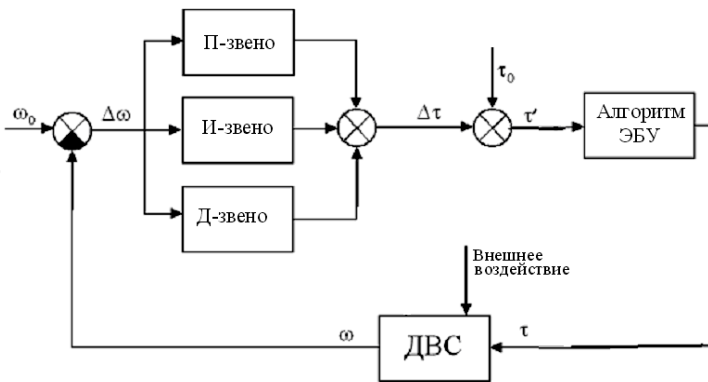


Рисунок – Загальна схема регулювання частоти обертання дизеля.

Введемо позначення для безрозмірних відносних координат: $x = \Delta\tau/\tau_0$

– регулюючий вплив; $\varphi = \Delta\omega/\omega_0$ – частота обертання колінчастого вала. Нехай також: x' – це величина регулюючого впливу до проходження сигналу через алгоритм ЕБК (тобто до надходження на виконавчий механізм). Тоді, як видно з наведеної на малюнку схеми, у регулюванні швидкісного режиму беруть участь три зазначені взаємозалежні внутрішні відносні координати.

Причому, координата φ залежить від x через передатну функцію двигуна [4]; координата x у свою чергу залежить від x' через передатну функцію алгоритму ЕБК. Залежність x' від φ можна виразити у вигляді суми передатних функцій окремих ланок в алгоритмі електронного регулятора:

- пропорційної $W_{\Pi}(p)\varphi$,
- диференціальної $W_{\Delta}(p)\varphi$,
- інтегральної $W_{\text{И}}(p)\varphi$.

Це дозволяє записати рівність:

$$x' = W_{\Pi}(p)\varphi + W_{\Delta}(p)\varphi + W_{\text{И}}(p)\varphi. \quad (1)$$

Передатна функція пропорційної ланки описує підсилювач сигналу з коефіцієнтом k_{Π} [5], де k_{Π} – пропорційний коефіцієнт регулятора. Тоді:

$$W_{\Pi}(p)\varphi = k_{\Pi}\varphi. \quad (2)$$

Запишемо передатну функцію ідеальної інтегруючої ланки [5]:

$$W_{\text{И}}(p)\varphi = \left(\frac{k_{\text{И}}}{p} \right) \varphi. \quad (3)$$

Однак, при програмній реалізації такої функції потрібна організація інтегрування по нескінченному проміжку часу, що для системи керування двигуном внутрішнього згоряння неможливо технічно. Звичайне інтегрування показників процесу роботи обмежується якимсь кінцевим проміжком часу $T_{\text{И}}$, що і назвемо *часом інтегрування*. Оскільки робочий процес у двигуні здійснюється періодично, з періодом, кратним частоті обертання колінчастого вала, то й величина $T_{\text{И}}$ змінюється дискретно, і може приймати значення, підлеглі такому закону:

$$T_{\text{И}} = N \frac{120}{n}, \quad (4)$$

де N – число робочих циклів, що враховуються для інтегрування; n – частота обертання колінчастого вала, хв^{-1} ; $120/n$ – тривалість одного робочого циклу.

Передатна функція такої кінцевої (із уповільненням) інтегруючої ланки має вигляд [5]:

$$W_{\text{И}}(p)\varphi = \left(\frac{k_{\text{И}}}{p(1+0,5T_{\text{И}}p)} \right) \varphi, \quad (5)$$

де k_H – інтегральний коефіцієнт регулятора.

Ідеальна диференціальна ланка описується передатною функцією [5]:

$$W_D(p)\varphi = k_d p \varphi, \quad (6)$$

і також не може бути технічно реалізована. Для її заміни використовується диференціальна ланка із уповільненням, що описується передатною функцією [5]:

$$W_D(p)\varphi = \left[\frac{k_d p}{(T_d p + 1)} \right] \varphi. \quad (7)$$

Тут T_d – крок диференціювання за часом, k_d – диференціальний коефіцієнт регулятора. Для системи керування двигуном внутрішнього згорання обирають в якості T_d тривалість одного робочого циклу.

Підстановка отриманих виразів (2), (5), (7) у рівняння (1) приводить його до виду:

$$-x' = k_n \varphi + k_d \frac{p}{T_d p + 1} \varphi + k_u \frac{1}{0,5 T_u p^2 + p} \varphi. \quad (8)$$

Після перетворень рівняння (8) одержимо диференціальне рівняння електронного ПД-регулятора:

$$\begin{aligned} & 0,5 T_d T_H p^3 x' + (T_d + 0,5 T_H) p^2 x' + p x' = \\ & = 0,5 (k_H T_d + k_d) T_H p^3 \varphi + (k_H (0,5 T_H + T_d) + k_H T_d + k_d) p^2 \varphi + k_H p \varphi + k_H \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут і у всіх виразах вище p – це позначення оператора Лапласа.

Виходячи з виразу (4) і даного раніше визначення величини T_d , можна вважати, що $T_H = N T_d$. Тоді рівняння (9) запишеться так:

$$\begin{aligned} & 0,5 N T_d p^3 x' + (0,5 N + 1) T_d p^2 x' + p x' = 0,5 N (k_H T_d + k_d) T_d p^3 \varphi + \\ & + \left((0,5 N + 1) k_H + k_H \right) T_d p^2 \varphi + k_H p \varphi + k_H \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Подальший аналіз отриманого рівняння проведемо нижче, після його спрощення.

Передатна функція алгоритму ЕБК. Формування керуючого сигналу в ЕБК має часову затримку T_3 , пов'язану зі збором й обробкою інформації від датчиків. Очевидно, що $T_3 \geq T_d$; точніше, воно може приймати значення відповідно до закону:

$$T_3 = N_3 \frac{120}{n}, \quad (11)$$

де $N_3 = 1, 2, 3, \dots$ – ціле число робочих циклів двигуна, протягом яких відбувається формування керуючого сигналу.

Ланка затримки, або «чистого» запізнювання описується передатною функцією [5]:

$$W(p)x' = e^{-T_3 px'}. \quad (12)$$

Експонентну функцію розкладемо в ряд Маклорена з урахуванням перших двох членів ряду:

$$e^{-T_3 p} \approx \frac{1}{1 + T_3 p}. \quad (13)$$

Крім того, наявність суматора, як видно зі схеми на малюнку, визначає, що в алгоритм ЕБК надходить величина тривалості керуючого сигналу, що містить дві складові: x і α_p , де остання є зовнішнім керуючим впливом, викликаним примусовим переміщенням органа керування двигуном (*електронної педалі*). Тобто, з наближеної рівності (13) випливає, що процес затримки сигналу може бути розглянутий як аперіодична ланка першого порядку, передатна функція якої має вигляд:

$$W(p)(x' + \alpha_p) = \frac{1}{T_3 p + 1}(x' + \alpha_p). \quad (14)$$

Запишемо диференціальне рівняння цієї ланки:

$$T_3 px + x = x' + \alpha_p. \quad (15)$$

Загальне рівняння електронної частини. Диференціальне рівняння, що описує весь процес проходження сигналу в електронному блоці керування, включаючи регулятор, може бути отримане шляхом зведення в одну систему рівнянь (10) і (15):

$$\begin{cases} 0,5NT_d p^3 x' + (0,5N + 1)T_d p^2 x' + px' = 0,5N(k_{II}T_d + k_d)T_d p^3 \varphi + \\ + (((0,5N + 1)k_{II} + k_{II})T_d + k_d)p^2 \varphi + k_{II} p \varphi + k_{II} \varphi; \\ T_3 px + x = x' + \alpha_p. \end{cases} \quad (16)$$

Для спрощення подальшого аналізу прийемо таке.

1. Час затримки сигналу в алгоритмі ЕБК T_3 дорівнює часу одного робочого циклу двигуна ($N_3 = 1$) і, отже, виходячи з рівняння (11):

$$T_3 = 1 \cdot \frac{120}{n} = T_d. \quad (17)$$

2. Регулятор реалізований у вигляді ПД-регулятора. У цьому випадку в рівнянні (10) $N = 0$ й $k_{II} = 0$.

3. Огляду на прийняте, рівняння системи (16) приймуть вид:

$$\begin{cases} T_d px' + x' = (k_{II}T_d + k_d) p \varphi + k_{II} \varphi; \\ T_d px + x = x' + \alpha_p. \end{cases} \quad (18)$$

Отримана система диференціальних рівнянь може бути зведена до одного рівняння за допомогою відповідної підстановки:

$$T_d^2 p^2 x + 2T_d p x + x = (k_{II} T_d + k_d) p \varphi + k_{II} \varphi + T_d p \alpha_p + \alpha_p. \quad (19)$$

Пронормуємо отримане рівняння (19), як це прийнято в теорії САР ДВЗ [1]:

$$\frac{T_d^2}{k_{II}} p^2 x + \frac{2T_d}{k_{II}} p x + \frac{1}{k_{II}} x = \left(T_d + \frac{k_d}{k_{II}} \right) p \varphi + \varphi + \frac{T_d}{k_{II}} p \alpha_p + \frac{1}{k_{II}} \alpha_p. \quad (20)$$

Введемо позначення: $T_d / \sqrt{k_{II}} = T_p$ – постійна часу ЕБК, що включає електронний регулятор; $2T_d / k_{II} = T_K$ – постійна часу катаракта (в'язкого тертя), $1/k_{II} = \delta_z$ – місцевий ступінь нерівномірності; $(T_d + k_d / k_{II}) = T_r$ – постійна часу для впливу по прискоренню колінчатого вала.

Тоді рівняння (20), що описує електронний блок керування із ПД-регулятором прийме класичний вид для теорії САР ДВЗ:

$$T_p^2 p^2 x + T_K p x + \delta_z x = T_r p \varphi + \varphi + 0,5 T_K p \alpha_p + \delta_z \alpha_p. \quad (21)$$

Аналіз отриманого диференціального рівняння показує, що оскільки $\delta_z \neq 0$, електронна система, що управляє двигуном, в складі регулятора й алгоритму ЕБУ має *статизм*, тобто при роботі двигуна з такою системою буде мати місце похибка в підтримці заданого швидкісного режиму. Отже, такий регулятор може бути використаний для транспортного двигуна. Для створення астатичного електронного регулятора необхідно вводити в його склад інтегральну ланку, яка може бути включена як паралельно (в алгоритм регулятора у вигляді інтегральної ланки), так і послідовно (в алгоритм ЕБК у вигляді позитивного зворотного зв'язку).

Крім того, як видно з рівняння (21), навіть при нульовому значенні диференціального коефіцієнта регулятора k_d регулятор буде мати диференціальну ланку, тобто залишиться ПД-регулятором.

Статична характеристика описаного регулятора може бути отримана з його динамічної характеристики шляхом обчислення похибки регулювання через зворотну передатну функцію [3]. Відомо [1], що статична характеристика – це залежність $\varphi = f(x)$ на сталому, рівноважному режимі при постійному настроюванні регулятора, що у цьому випадку виражається координатою α_p . Покладемо, що зовнішній керуючий вплив відсутній, тобто $\alpha_p = 0$.

Тоді, виражаючи через зворотну передатну функцію, з рівняння (21) маємо:

$$\varphi = \frac{T_p^2 p^2 + T_K p + \delta_z}{T_r p + 1} x. \quad (22)$$

Після загасання всіх доданків, що описуються експоненціальними функціями, наприкінці процесу регулювання маємо [5]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p) = 0. \quad (23)$$

З огляду на це, у рівнянні (22) перейдемо до оригіналів і одержимо асимптотичне співвідношення:

$$\varphi(t) \approx \delta_z x, \quad (24)$$

тобто, наприкінці процесу регулювання кутова швидкість обертання колінчатого вала зміниться в порівнянні з початковою на величину, пропорційну місцевому ступеню нерівномірності, що і є статичною похибкою регулювання.

Висновки.

1. Отримано диференціальне рівняння електронного ПД-регулятора, що може бути використане для синтезу САР дизеля з електронним керуванням.
2. Показано, що на роботу регулятора впливає процес формування керуючого сигналу в електронному блоці керування.
3. Аналіз диференціального рівняння проходження сигналу через ЕБК, включаючи ПД-регулятор, показав, що заснована на такій схемі САР буде мати певний статизм, для виключення якого в схему регулювання необхідно вводити інтегруючі блоки.

Список літератури. 1. *Крутов В.И.* Автоматическое регулирование и управление двигателями внутреннего сгорания. / М.: Машиностроение, 1989. – 416 с. 2. Системы управления дизельными двигателями. Перевод с немецкого. Первое русское издание. – М.: ЗАО “КЖИ “За рулем”, 2004. — 480 с. 3. Теория автоматического управления для "чайников". Учебник. / *К.Ю. Поляков*, Санкт-Петербург, 2008. – 139 с. 4. *Прохоренко А.А.* Дифференциальное уравнение динамики дизеля с аккумуляторной системой топливоподачи как объекта регулирования / Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ», №2, 2011. СС. 81-86. 5. *Бесекерский В.А.* Теория систем автоматического управления / *В. А. Бесекерский, Е. П. Попов.* — изд. 4-е, перераб. и доп. — СПб, изд-во «Профессия», 2004. — 752 с.

Надійшла до редколегії 26.03.2012

А.Ю. РЕБРОВ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСХОДА ТОПЛИВА ДВИГАТЕЛЕМ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТА ВЕРОЯТНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Запропоновано метод визначення витрати пального двигуном ймовірністним методом, який базується на двовірному нормальному законі розподілу завантаження двигуна по крутному моменту і по частоті обертання колінчастого валу, а також на використанні багатопараметрової характеристики двигуна. Наведено результати обчислення ймовірності питомої витрати пального двигуном в ході виконання технологічного процесу по обробці ґрунту при навантаженні, яке має випадковий характер.

Предложен метод определения расхода топлива двигателем вероятностным методом, который базируется на двумерном нормальном законе распределения загрузки двигателя по крутящему моменту и по частоте вращения коленчатого вала, а также на использовании многопараметровой характеристики двигателя. Приведены результаты расчета вероятности удельного расхода топлива двигателем в ходе выполнения технологического процесса по обработке почвы при нагрузке, которая носит случайный характер.

The authors propose a method for determining the fuel consumption of motor probabilistic method, which is based on two-dimensional normal distribution of the motor load by torque and speed of the crankshaft, as well as the use of multiparameter characteristics of the engine. The results of calculating the probability of engine specific fuel consumption in the implementation process for the treatment of soil under load, which is random.

Введение. Моделирование расхода топлива двигателем при случайном характере нагрузки на стадии создания новых тракторов и машинно-тракторных агрегатов (МТА), а также совершенствовании имеющихся конструкций и комплектовании МТА, является актуальной задачей, которая связана с обоснованием их рациональных параметров и режимов работы.

Анализ последних исследований. Определение расхода топлива дизельным двигателем расчетным путем можно осуществить с использованием многопараметрической характеристики [1], а выбрать рациональный режим его работы возможно в соответствии с линией наибольшей экономичности [2]. Однако в реальной эксплуатации нагрузочно-скоростные режимы работы двигателя в общем случае являются величинами случайными [3]. Поэтому случайный характер загрузки двигателя требует вероятностного подхода в определении расхода топлива МТА.

Постановка задачи. Задачей данного исследования является создание и апробация методики расчета расхода топлива МТА вероятностным методом с учетом случайного характера нагрузки, действующей на трактор. Расчет вероятности расхода топлива предлагается рассмотреть на примере трактора с дизельным двигателем в составе пахотного МТА.

Математическая модель. Определение расхода топлива двигателем МТА будем проводить с использованием универсальной или многопараметрической характеристики двигателя (в частности топливной характеристики). Расход топлива определяется нагрузочными и скоростными режимами работы двигателя, которые в общем случае являются случайными.

Для каждого вида механической обработки почвы имеются данные относительно статистических характеристик тягового сопротивления орудий. Примем допущение о том, что распределения тягового сопротивления орудия и скорости движения подчиняются нормальному закону. Тогда плотность распределения вероятности нагрузочно-скоростного режима работы двигателя можно описать функцией двух переменных:

$$f(M, \omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_M \cdot \sigma_\omega \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{2 \cdot (1 - \rho^2)} \cdot \left(\frac{(M - M_M)^2}{\sigma_M^2} - \rho^2 \cdot \frac{(M - M_M)(\omega - M_\omega)}{\sigma_M \cdot \sigma_\omega} + \frac{(\omega - M_\omega)^2}{\sigma_\omega^2} \right) \right), \quad (1)$$

где M_M , M_ω , σ_M , σ_ω – статистические характеристики крутящего момента и угловой скорости двигателя; ρ – определитель ковариационной матрицы, который полагаем равным нулю.

Вероятность работы двигателя в области режимов $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, $M \in [M_1, M_2]$ определяется интегралом:

$$p = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{M_1}^{M_2} f(M, \omega) dM d\omega. \quad (2)$$

Однако вероятность, определенная с использованием интеграла (2), соответствует прямоугольной области на многопараметровой характеристике двигателя. Кривые равного удельного расхода топлива многопараметровой характеристики представляют собой либо замкнутые контуры, либо фрагменты контуров с выходами на внешнюю скоростную характеристику двигателя, ограничивающую все возможные режимы работы двигателя сверху по крутящему моменту, справа по угловой скорости (рис. 1 а).

Вероятность расхода топлива в интервале $g_e \in [g_{emin}, g_{eu}]$, соответствует вероятности $p = p(g_e \leq g_{eu})$. Для ее определения необходимо знать связь координат (в данном случае ω и M) в каком-либо виде по линии контура равного удельного расхода топлива, соответствующего g_{eu} .

Расход топлива двигателем внутреннего сгорания во всем диапазоне нагрузочно-скоростных режимов моделируется выражением [1]:

$$g_e = g_{ном} \cdot \left(a_\omega + b_\omega \cdot \varepsilon_\omega + c_\omega \cdot \varepsilon_\omega^2 \right) \cdot \left(a_N + b_N \cdot \varepsilon_{Nвсх} + c_N \cdot \varepsilon_{Nвсх}^2 \right), \quad (3)$$

где $a_\omega, b_\omega, c_\omega, a_N, b_N, c_N$ – коэффициенты аппроксимации; $\varepsilon_\omega = \omega / \omega_{\text{ном}}$ – коэффициент загрузки двигателя по частоте вращения; $\omega, \omega_{\text{ном}}$ – текущая и номинальная угловые скорости коленчатого вала; $\varepsilon_{N_{\text{всх}}} = N_e / N_{\text{всх}}$ – коэффициент загрузки двигателя по мощности относительно внешней скоростной характеристики на данном скоростном режиме; $N_e, N_{\text{всх}}$ – текущая мощность и мощность, соответствующая внешней скоростной характеристике на данном скоростном режиме.

Пределы интегрирования для интеграла (2) с учетом криволинейной области контура равного удельного расхода топлива можно получить согласно методике [1]. Определим значения минимальной и максимальной частоты вращения коленчатого вала, соответствующей изолинии рассматриваемого удельного расхода топлива g_{ei} . Для этого решаем уравнение (4), полученное из условия существования единственного корня параболы (5), аппроксимирующей зависимость расхода топлива от загрузки по мощности:

$$c_\omega \cdot \varepsilon_\omega^2 + b_\omega \cdot \varepsilon_\omega + \left(a_\omega - \frac{4 \cdot c_N \cdot (g_{\text{ei}} / g_{\text{ном}})}{4 \cdot c_N \cdot a_N - b_N^2} \right) = 0, \quad (4)$$

$$b_N^2 - 4 \cdot c_N \cdot \left(a_N - \frac{g_{\text{ei}}}{g_{\text{ном}}} \frac{1}{(a_\omega + b_\omega \cdot \varepsilon_\omega + c_\omega \cdot \varepsilon_\omega^2)} \right) = 0. \quad (5)$$

Искомые коэффициенты загрузки двигателя по частоте вращения и соответствующие им частоты вращения определяются выражениями:

$$\varepsilon_{\omega_{\text{max, min}}} = \frac{-b_\omega \pm \sqrt{b_\omega^2 - 4 \cdot c_\omega \cdot \left(a_\omega - \frac{4 \cdot c_N \cdot (g_{\text{ei}} / g_{\text{ном}})}{4 \cdot c_N \cdot a_N - b_N^2} \right)}}{2 \cdot c_\omega}, \quad (6)$$

$$\omega_{\text{max, min}} = \varepsilon_{\omega_{\text{max, min}}} \cdot \omega_{\text{ном}}. \quad (7)$$

Величины $\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}$ являются пределами интегрирования в (2) по частоте вращения. Определим верхний и нижний пределы интегрирования (2) по нагрузке двигателя крутящим моментом в виде функций частоты вращения коленчатого вала в интервале $\omega \in [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}]$. С этой целью предварительно найдем пределы интегрирования для коэффициента загрузки двигателя по мощности относительно внешней скоростной характеристики на каждом скоростном режиме:

$$\varepsilon_{N_{\text{всх}}}^{\text{в.н}}(\varepsilon_\omega) = \frac{-b_N \pm \sqrt{b_N^2 - 4 \cdot c_N \cdot \left(a_N - g_{\text{ei}} / \left(g_{\text{ном}} \cdot (a_\omega + b_\omega \cdot \varepsilon_\omega + c_\omega \cdot \varepsilon_\omega^2) \right) \right)}}{2 \cdot c_N}. \quad (8)$$

Пределы интегрирования для коэффициента загрузки крутящим моментом определяются с использованием параболы, аппроксимирующей внеш-

ную скоростную характеристику двигателя в нормированном виде, так, чтобы в номинальном режиме значение крутящего момента было равно 1:

$$M_K(\varepsilon_\omega) = \frac{\nu^2 + (1-2\nu) \cdot k_M}{(1-\nu)^2} + \frac{2 \cdot (k_M - 1) \cdot \nu}{(1-\nu)^2} \cdot \varepsilon_\omega - \frac{(k_M - 1)}{(1-\nu)^2} \cdot \varepsilon_\omega^2, \quad (9)$$

где k_M – коэффициент приспособляемости двигателя по крутящему моменту:

$$k_M = M_{\max} / M_{\text{ном}}, \quad (10)$$

где M_{\max} – максимальный эффективный крутящий момент двигателя; $M_{\text{ном}}$ – номинальный эффективный крутящий момент двигателя; ν – коэффициент, обратный коэффициенту приспособляемости двигателя по частоте вращения:

$$\nu = \omega_{M_{\max}} / \omega_{\text{ном}}, \quad (11)$$

$\omega_{M_{\max}}$ – частота вращения коленчатого вала двигателя, соответствующая максимальному эффективному крутящему моменту;

$$\varepsilon_M^{\text{B,H}}(\varepsilon_\omega) = \varepsilon_{\text{Nвсх}}^{\text{B,H}}(\varepsilon_\omega) \cdot M_K(\varepsilon_\omega). \quad (12)$$

Окончательно пределы интегрирования (2) по крутящему моменту определяем в виде функции частоты вращения, заменив $\omega = \varepsilon_\omega \cdot \omega_{\text{ном}}$:

$$M_e^{\text{B,H}}(\omega) = \varepsilon_{\text{Nвсх}}^{\text{B,H}}(\omega) \cdot M_K(\omega) \cdot M_{\text{ном}}. \quad (13)$$

Тогда интеграл (2) получат вид:

$$p = \int_{\omega_{\min} M_e^{\text{B}}(\omega)}^{\omega_{\max} M_e^{\text{B}}(\omega)} \int f(M, \omega) dM d\omega, \quad \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]. \quad (14)$$

Анализ результатов математического моделирования. Рассмотрим в качестве примера расчет удельного расхода топлива двигателем, приняв допущение о том, что скорость движения трактора на вспашке не выходит за пределы агротехнических норм $V \in [V_{\min}, V_{\max}]$ в интервале скоростей (1,7...3,0 м/с) с вероятностью $p \leq 0,954$. Тогда интервал скорости $[V_{\min}, V_{\max}]$ соответствует $4\sigma_V$. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение скорости движения $M_V = 2,35$ м/с, $\sigma_V = 0,325$ м/с, коэффициент вариации $y_V = 0,138$. Математическое ожидание момента сопротивления двигателя:

$$M_M = M_{\text{рк}} \cdot r_k / u, \quad (15)$$

где $M_{\text{рк}}$ – математическое ожидание касательной силы тяги; r_k – радиус ведущего колеса; u – передаточное число трансмиссии трактора.

Для тяговых технологий (в частности при вспашке) коэффициент вариации находится в пределах 0,12...0,16 [3].

Результаты построения многопараметрической характеристики двигателя

ля, совмещенной с изолиниями плотности распределения вероятности загрузки двигателя, в соответствии с двумерным нормальным законом распределения, приведены на рис. 1 а. На рис. 1 б показаны изолинии расхода топлива $g_{eu} = 200$ г/(кВт·ч), полученные в виде верхнего и нижнего пределов интегрирования.

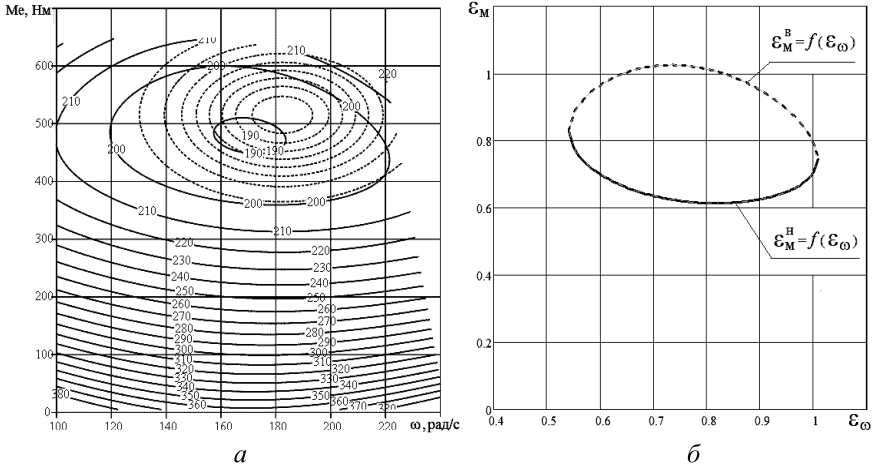


Рисунок 1 – Многопараметрическая характеристика двигателя:

- а – изолинии равного расхода топлива и изолинии равной плотности вероятности;
- б – изолинии расхода топлива g_{eu} в виде пределов интегрирования

Если поверхность плотности распределения вероятности выходит за пределы внешней скоростной характеристики двигателя, то возможны нагрузочно-скоростные режимы, превышающие максимально возможные. В этом случае двигатель переходит на внешнюю скоростную характеристику с вероятностью:

$$p_{всх} = 1 - p(g_e \leq g_{e\max}). \quad (16)$$

Расход топлива на внешней скоростной характеристике принимается по усредненному значению с вероятностью $p_{всх}$.

Вычисление вероятности $p = p(g_e \leq g_{eu})$ производилось в интервале расхода топлива $g_e \in [g_{emin}, g_{emax}]$. Поверхности расхода топлива и плотности распределения вероятности приведены на рис. 2 а.

Кривые вероятности $p = p(g_e \leq g_{eu})$ приведены на рис. 2 б, анализ которых показывает, что при выбранных статистических характеристиках загрузки двигателя вероятность $p(g_e \leq g_{eu})$ на второй передаче выше чем на первой. Так, например, $p(g_e \leq 200$ г/(кВт·ч)) равна 0,55 на первой передаче и 0,68 на второй. Вероятность выхода на внешнюю скоростную характеристику на второй передаче (рис. 2 б) равна 0,12, а на первой – 0,27. Полученные

результаты показывают, что для выбранных статистических характеристик технологического процесса вспашки рациональным с точки зрения расхода топлива МТА является движение на второй передаче. Вероятность $p(g_e \leq g_{eu})$ на второй передаче превышает соответствующую вероятность на первой передаче на величину меньшую 0,15. Это объясняется совместным изменением математических ожиданий нагрузочных и скоростных режимов работы двигателя с уменьшением передаточного числа трансмиссии таким образом, что точка (M_ω, M_M) на второй передаче находится ближе к режиму $g_{e\min}$ многопараметрической характеристики двигателя.

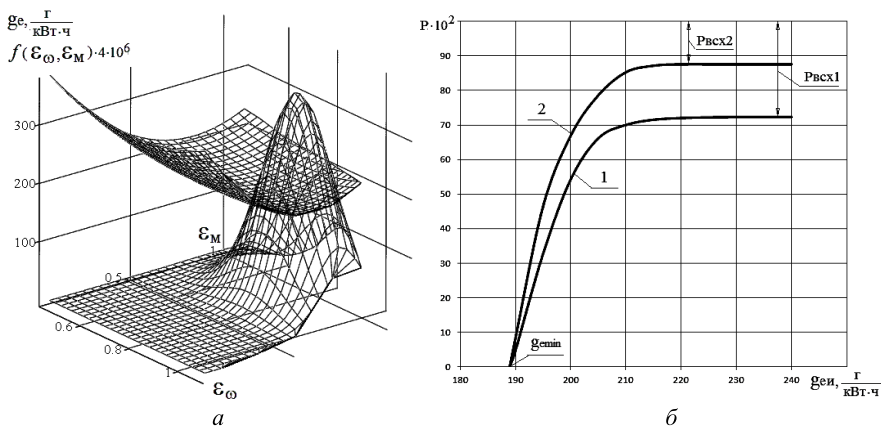


Рисунок 2 – Вероятностные характеристики расхода топлива:
 а – поверхности расхода топлива и плотности распределения вероятности;
 б – зависимости $p = p(g_e \leq g_{eu})$ на 1 и 2 передачах трактора.

Выводы. В данной работе приведена и апробирована методика расчета расхода топлива дизельным тракторным двигателем вероятностным методом. Методика позволяет выбрать рациональную передачу движения при выполнении тяговых технологий с известными статистическими характеристиками, оценить расход топлива и вероятность выхода двигателя на внешнюю скоростную характеристику.

Список литературы: 1. Шанко В.Ф., Шанко С.В. Метод розрахунку багатопараметрової характеристики автомобільного двигуна внутрішнього згорання // Вісник КДПУ імені Михайла Остроградського. Випуск 1. -2009. (54). Частина 1. –С. 93-96. 2. Новиков Г.В. Система адаптивной автоматической оптимизации работы двигателя на тракторе с бесступенчатой трансмиссией // Тракторы и сельскохозяйственные машины. -2006. -№ 1. –С. 17-20. 3. Барский И.Б., Анилович В.Я., Кутыков Г.М. Динамика трактора. – М.: Машиностроение, 1973. – 280 с.

Надійшла до редколегії 05.04.2012

Ю.О. САХНО, д-р. техн. наук. проф., ЧДТУ, Чернігів;
Є.Ю. САХНО, д-р. техн. наук. проф., ЧДІЕУ, Чернігів;
Г.І. ТУР, ст. викл., ЧДІЕУ, Чернігів;
Я.В. ШЕВЧЕНКО, ст. викл., ЧДІЕУ, Чернігів

МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ РАДІАЛЬНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПОЛОЖЕННЯ КОЛІНВАЛА В МОДЕРНІЗОВАНІЙ ГІДРООПОРІ

Побудовано розрахункову модель модернізованої гідросистеми двигуна внутрішнього згорання автомобіля. Розглянуто рух колінвала без урахування обертаючого моменту в радіальному напрямку. Отримано рівняння залежностей переміщення, швидкості та прискорення колінвала від часу спрацювання модернізованої системи живлення гідростатичної опори.

Построена расчетная модель модернизированной гидросистемы двигателя внутреннего сгорания автомобиля. Рассмотрен процесс перемещения коленвала без учета вращающего момента в радиальном направлении. Получены уравнения зависимости перемещения, скорости и ускорения от времени срабатывания модернизированной системы питания гидростатической опоры.

A calculation model of the modernized hydraulic internal combustion engine vehicle. A movement without regard to crankshaft torque in the radial direction. The equation dependencies displacement, velocity and acceleration of the crankshaft-time operation system upgrading power hydrostatic bearing.

Вступ. Відомо, що при роботі під навантаженням двигуна внутрішнього згорання (ДВЗ) автомобіля відбувається радіальне зміщення колінчастого вала в гідроопорі, що викликає знос корінних та шатунних шийок, несучих сегментів гідростатичної опори і призводить до металевого контакту у спряженні колінвал – гідроопора, наслідком чого є вихід зі строю двигуна.

Аналіз літератури. Для компенсації зміщення вала під навантаженням розроблена [1] модернізована система живлення гідроопор, яка автоматично подає до опори додатковий об'єм рідини, що стабілізує радіальне положення колінвала. При моделюванні положення колінчастого вала з урахуванням модернізованої системи живлення опор необхідно визначити його переміщення, швидкість і прискорення, що необхідне для вибору параметрів руху робочої рідини, яка додатково подається в кишені гідростатичних підшипників.

Відомо, що при роботі двигуна внутрішнього згорання автомобіля, сумарні сили, діючі в кривошипно-шатунному механізмі, визначаються шляхом складання алгебраїчної суми сил від дії газів і сил інерції зворотно-поступального руху мас [2, 3]:

$$P = P_z + P_f . \quad (1)$$

При цьому сила тиску газів на поршень визначається за формулою:

$$P_z = (p_z - p_0)F_{II} ,$$

де $(p_z - p_0)$ – різниця тиску в циліндрі; F_{II} – площа поршня.

Сила інерції від зворотно-поступального руху мас визначається за формулою:

$$P_j = -m_j \cdot j = -m_j R \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi),$$

де m_j і j – відповідно маса і прискорення рухомих частин: R – радіус центру мас; ω – кутова швидкість обертання; φ – кут відхилення шатуна в початковий момент прискорення від положення верхньої мертвої точки (ВМТ); λ – коефіцієнт, який залежить від відношення радіуса обертання кривошипа до довжини шатуна.

Запишемо відцентрову силу інерції рухомих мас, що обертаються: $K_R = -m_R R \omega^2$, де m_R – маса частин, що обертаються. Сила інерції K_R є результуючою двох сил: сил інерції мас шатуна і кривошипа, що обертаються навколо осі. Сумарна сила P з формули (1) направлена по осі циліндра і прикладена до осі поршневого пальця. Дія від сили P передається на стінки циліндра перпендикулярно його осі з силою N , і на шатун в напрямку його осі з силою S . Сила N діє перпендикулярно до осі і визначається як $N = P \cdot \operatorname{tg} \beta$. Сила S діє вздовж шатуна і вважається позитивною, якщо його стискає, і негативною, якщо його розтягує; вона визначається за формулою:

$$S = P \frac{1}{\cos \beta}.$$

Від дії сили S на шатунну шийку виникають дві складові: сила K_R , яка направлена по радіусу обертання кривошипа

$$K_R = P \frac{\cos(1 + \beta)}{\cos \beta},$$

і тангенціальна T , направлена по дотичній до кола радіусу кривошипа

$$T = P \frac{\sin(1 + \beta)}{\cos \beta}.$$

При цьому результуюча сила, що діє на корінну шийку [4], визначається геометричним складанням сил, рівних, але протилежних по напрямку силам, які передаються від двох суміжних колін $R_{ки} = \vec{R}_{ki} + \vec{R}_{k(i+1)}$.

Постановка задачі. Однією з пріоритетних задач даної роботи є розрахунок модернізованої системи живлення гідростатичної опори з урахуванням переміщення колінвала під навантаженням в початковий момент роботи ДВЗ в момент спрацювання керуючого золотника.

Фізична та математична моделі. Для компенсації результуючої сили в гідростатичній опорі колінвала (при його перевантаженнях) пропонується модернізована система живлення гідростатичних опор, в якій у момент найбільшого зміщення колінвала під навантаженням в опору від додаткового насоса $H2$ подається додатковий об'єм рідини змащування (рис. 1). Внаслідок

док чого в кишенях опори формується тиск від двох насосів

$$P_{\Sigma} = P_{H1} + P_{H2},$$

який і компенсує силу $R_{ки}$, що діє на корінну шийку. Розглядаючи замкнуту гідростатичну опору з дросельним регулюванням можна визначити алгебраїчну суму зовнішнього навантаження P_3 і реакцію з боку тиску рідини в кишенях, від яких залежить прискорення ротора в опорі.

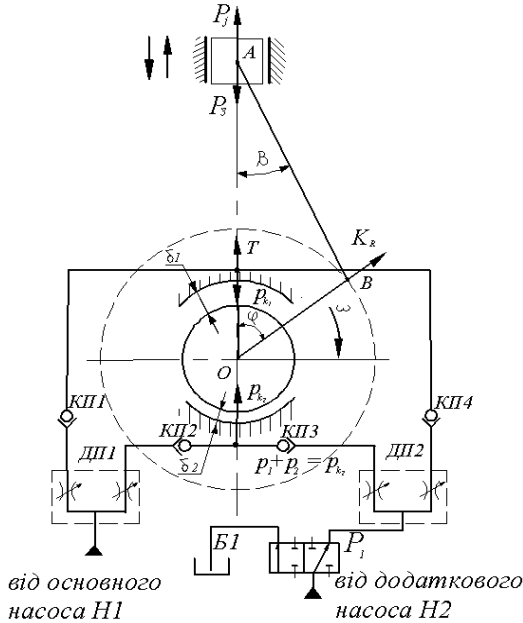


Рисунок 1 – Розрахункова схема гідросистеми.

Розглядаючи рух кривошипа без врахування обертаючого моменту, його переміщення в радіальному напрямі описується рівнянням динамічної рівноваги (рис. 1):

$$\frac{m \cdot d^2 h}{dt^2} = P_3 + p_{k1} \cdot F_1 - (p_1 + p_2) \cdot F_2 + T_1, \quad (2)$$

де m – маса рухомих частин; $d^2 h / dt^2$ – прискорення рухомих частин; p_{k1} – тиск в кишені 1 гідроопори; T_1 – сила рідинного тертя; P_3 – сила зовнішнього навантаження; h – переміщення корінної шийки колінвала відносно осі гідроопори; t – час; $p_1 + p_2 = p_{k2}$ – сумарний тиск в кишені 2 гідроопори від насоса $H1$ і додаткового $H2$.

При цьому зміна тиску на радіусі r в кишені з додатковою системою подачі рідини визначається рівнянням:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{6\mu(Q_1 + Q_2)}{\pi \cdot r \cdot h_1^3}, \quad (3)$$

де p – тиск рідини в кишені; $Q_1 + Q_2$ – алгебраїчна сума витрат рідини від двох насосів (Q_1 – від насоса $H1$, Q_2 – від насоса $H2$) у момент спрацювання керуючого золотника.

Розв'яжемо рівняння (2) відносно зміни сумарного тиску в опорі від часу спрацювання системи $d(p_1 + p_2)/dt$.

Зміну тиску p_{k1} приймаємо виходячи з роботи [5]: $p_{k1} = k_3 h_0 + g$, де k_3 і g – відповідно коефіцієнти нелінійності і поправочний коефіцієнт для ділянок прямої лінії, що проходить через задані точки; h_0 – діаметральне значення зміни розмірів щілини на Δh .

Силу рідинного тертя T_1 визначимо як $T_1 = k_1 dh'/dt$, де k_1 – приведенний коефіцієнт лінійної залежності сил тертя від швидкості. Тоді рівняння (2) приймає наступний вигляд:

$$\frac{m \cdot d^2 h}{dt^2} = (p_1 + p_2) \cdot F_2 - (k_3 h_0 + g) F_1 + k_1 \frac{dh_0}{dt} - P_B, \quad (4)$$

де $F_1 = F_2 = F$.

Звідки:

$$p_1 + p_2 = \frac{m}{F_2} \frac{d^2 h_0}{dt^2} - \frac{k_1}{F_2} \frac{dh_0}{dt} + \frac{P_B}{F_2} + \frac{(k_3 h_0 + g) F_1}{F_2}. \quad (5)$$

Після диференціювання рівняння (5) отримаємо:

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = \frac{m}{F_2} \frac{d^3 h_0}{dt^3} - \frac{k_1}{F_2} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + k_3 \frac{dh_0}{dt}. \quad (6)$$

Рівняння нерозривності потоку з врахуванням стисливості рідини має вигляд [5]:

$$(Q_2 - k_y p_{k2}) \cdot dt = \beta V_0 dp_{k2} + F_2 dh', \quad (7)$$

де Q_2 – витрата рідини в силовій кишені; k_y – коефіцієнт втрат рідини через щілини опори; β – коефіцієнт стисливості рідини; h' – величина переміщення валу; F_2 – ефективна площа кишені.

Підставляючи значення $p_{k2} = p_1 + p_2$ з формули (5) в вираз (7), отримуємо:

$$\begin{aligned} Q_2 - k_y \left(\frac{m}{F_2} \frac{d^2 h_0}{dt^2} - \frac{k_1}{F_2} \frac{dh_0}{dt} + \frac{P_3}{F_2} + \frac{(k_3 h_0 + g) F_1}{F_2} \right) &= \\ = \beta V_0 \left(\frac{m}{F_2} \frac{d^3 h_0}{dt^3} - \frac{k_1}{F_2} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + k_3 \frac{dh_0}{dt} \right) + F_2 \frac{dh_0}{dt}. \end{aligned} \quad (8)$$

Після перетворення рівняння (8) маємо:

$$\begin{aligned} \beta V_0 \frac{m}{F_2} \frac{d^3 h_0}{dt^3} + k_y \frac{m}{F_2} - \beta V_0 \frac{k_1}{F_2} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \beta V_0 k_3 + \frac{k_y k_1}{F_2} + F_2 \frac{dh'}{dt} - k_y k_3 h_0 = \\ = k_y \frac{P_B}{F} + k_y g - Q_2; \end{aligned} \quad (9)$$

Позначаємо $\beta V_0 (m/F_2) = a_0$; $-\beta V_0 (k_1/F_2) = a_1$; $\beta V_0 k_3 + k_y k_1/F_2 + F_2 = a_2$; $k_y k_3 = a_3$; $k_y P_B/F + k_y g - Q = b$.

Тоді після перетворення виразу (9) отримаємо:

$$a_0 \frac{d^3 h_0}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 h_0}{dt^2} + a_2 \frac{dh_0}{dt} + a_3 h_0 = b. \quad (10)$$

Для розв'язку рівняння (10), розділимо всі його складові на a_0 , тоді вираз приймає вигляд:

$$\frac{d^3 h_0}{dt^3} + \frac{a_1}{a_0} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \frac{a_2}{a_0} \frac{dh_0}{dt} + \frac{a_3}{a_0} h_0 = \frac{b}{a_0}. \quad (11)$$

Вводимо позначення: $dh_0/dt = y'$; $a_1/a_0 = p_1$; $a_2/a_0 = p_2$; $b/a_0 = p$, тоді рівняння (11) запишеться у вигляді лінійного неоднорідного рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами:

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' = p. \quad (12)$$

Відомо, що загальний інтеграл лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі будь-якого його власного інтеграла y' і загального інтеграла того ж однорідного рівняння (при $p = 0$) [6], тому для вирішення (12) з постійними коефіцієнтами p_i необхідно знайти функції u і y_1 , або: $y = u + y_1$.

Знаходимо загальний інтеграл u однорідного рівняння

$$y''' + p_1 y'' + p_2 y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$k^3 + p_1 k^2 + p_2 k = 0 \quad \text{або} \quad k \cdot (k^2 + p_1 k + p_2) = 0.$$

При цьому отримуємо один корінь при $k_0 = 0$, а два інших будуть дійсними або комплексними, від чого залежатиме загальний вигляд інтеграла u .

Нехай дискримінант $D = p_1^2 - 4p_2 > 0$, тоді корні характеристичного рівняння k_2 і k_3 дійсні.

У цьому випадку загальний інтеграл u буде мати вираз:

$$u = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + c_3 e^{k_3 t} = c_2 e^{k_2 t} + c_3 e^{k_3 t} + c_1. \quad (13)$$

У разі, якщо $D = p_1^2 - 4p_2 < 0$, характеристичне рівняння має два різні комплексні кореня $k_{2,3} = 2 \pm \beta i$. Тоді загальний вигляд рішення буде:

$$u = c_1 e^{k_1 t} + e^{mt} (c_2 \cdot \cos \beta t + c_3 \cdot \sin \beta t). \quad (14)$$

І у випадку, якщо $D = 0$, то $k_2 = k_3 = m$, корені кратні і рішення матиме вигляд:

$$u = c_1 e^{K_1 t} + e^{mt} (c_2 + c_3 t). \quad (15)$$

Далі знаходимо власне рішення неоднорідного рівняння, в якому права його частина багаточлен, тому $y_1 = Ax$. Продиференціювавши, знаходимо значення $y' = A, y'' = 0, y''' = 0$, і підставляючи значення y_1, y_1', y_1'', y_1''' в рівняння (10) отримуємо: $p_2 A = p$; $A = p/p_2$; $y_1 = (p/p_2)x$.

Таким чином, загальний інтеграл даного неоднорідного рівняння $y = u + y_1$ залежатиме від характеру коренів характеристичного рівняння:

1) якщо корені дійсні і різні, то:

$$y = c_2 e^{k_2 t} + c_3 e^{k_3 t} + c_1 + (p/p_2)t; \quad (16)$$

2) якщо характеристичне рівняння має комплексні корені, тоді:

$$y = c_1 + e^{\alpha t} (c_2 \cdot \cos \beta t + c_3 \cdot \sin \beta t) + \frac{P}{p_2} t; \quad (17)$$

3) якщо корені кратні, то загальне рішення буде:

$$y = c_1 + e^{mt} [(c_2 + c_3 t) + (p/p_2)t]. \quad (18)$$

Таким чином, змінюючи значення тиску в кишені гідроопори p_{k1} і $p_{k2} = p_1 + p_2$ можна визначити величину $y' = dh_0/dt$, зміни зазору в опорі з часом, тобто переміщення, швидкість і прискорення колінвала з врахуванням підведення додаткового тиску рідини в кишеню гідроопори.

Результати моделювання. У роботі [5] визначена залежність зміни тиску в кишені гідростатичної опори від переміщення осі корінної шийки кривошипа відносно центру підшипника. Ця залежність представлена на рис. 2, на ньому виділено три ділянки зміни руху. При цьому, на першій ділянці, $h_0 = 0 \div 0,007$, де тиск буде $p_{k1} = -80 \cdot h_0 + 17,9$. Для прямої *b* на ділянці II, при $h_0 = 0,007 \div 0,0076$, отримали $p_{k1} = 600 \cdot h_0 + 30,3$. І для прямої *c* ділянки III, при $h_0 = 0,0076 \div 0,008$ отримуємо: $p_{k1} = 77 \cdot h_0 \cdot 01^3 - 5837$.

Вирішуємо рівняння (11), підставляючи постійні a_0, a_1, a_2, a_3, b і диференціюючи рівняння (11) для кожної з трьох ділянок графіка рис. 2 при наступних значеннях:

$$\beta = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{Н}; P_B = 3 \text{ кН}; F = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; V_0 = 32,5 \text{ см}^3;$$

$$m = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ кГс} \cdot \text{с}/\text{см}; Q = 58,33 \text{ см}^3/\text{с}; k_y = 1,3 \text{ кГс} \cdot \text{с}/\text{см};$$

$$k_1 = 233,62 \cdot 10^{-6} \text{ кГс} \cdot \text{с}/\text{см}.$$

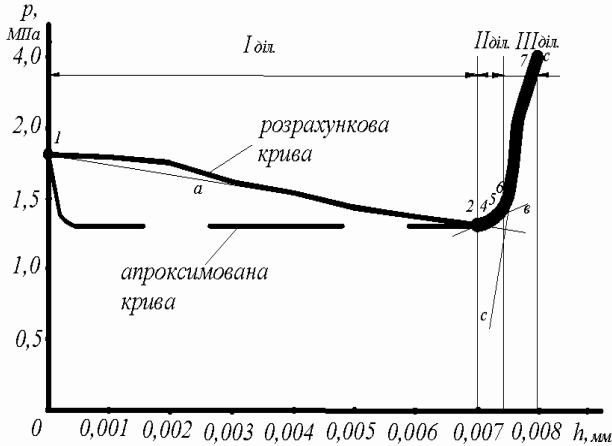


Рисунок 2 – Графік залежності $p_k = f(h_0)$.

Тоді для ділянки I коефіцієнти будуть дорівнювати: $k_3 = 4,3$, $a_0 = 26,4 \cdot 10^{-7}$, $a_1 = 1,7 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = 7,5$, $a_3 = 5,59$, $b = 32,14$ і рівняння (11) приймає вигляд:

$$26,4 \cdot 10^{-7} \frac{d^3 h}{dt^3} + 1,7 \cdot 10^{-3} \frac{d^2 h}{dt^2} + 7,5 \frac{dh}{dt} + 5,59 h = 32,14.$$

Відповідно для ділянки II: $a_0 = 26,4 \cdot 10^{-7}$, $a_1 = 1,7 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = 7,5$, $a_3 = 780$, $b = 86,68$, $k_3 = 600$ і рівняння (11) набуває вигляду:

$$26,4 \cdot 10^{-7} \frac{d^3 h}{dt^3} + 1,7 \cdot 10^{-3} \frac{d^2 h}{dt^2} + 7,5 \frac{dh}{dt} + 780 h = 86,68.$$

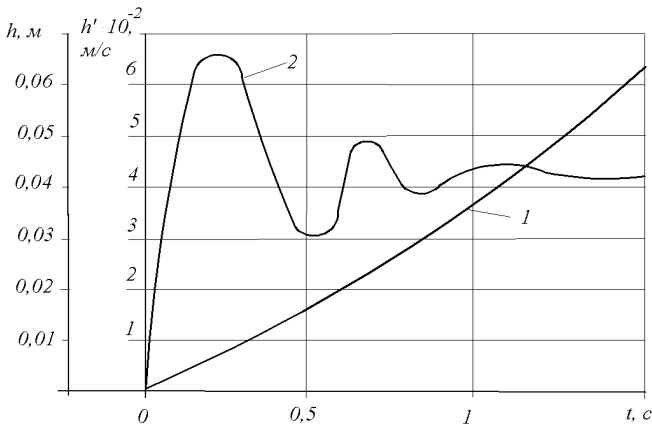


Рисунок 3 – Залежність переміщення та швидкості від часу спрацювання від обох насосів: 1 – переміщення, 2 – швидкість.

І для ділянки ІІІ при $a_3 = 11446$, $b = 902,4$ буде:

$$26,4 \cdot 10^{-7} \frac{d^3 h}{dt^3} + 1,7 \cdot 10^{-3} \frac{d^2 h}{dt^2} + 7,5 \frac{dh}{dt} + 11446h = 902,4.$$

Розв'язок рівнянь проводимо за допомогою ПЕОМ, для чого представимо їх в зручному для розрахунку вигляді:

$$h''' = 1,21 \cdot 10^{-7} - 643,93h'' - 2840909h' - 2117424,2h;$$

$$h'' = 3,28 \cdot 10^{-7} - 643,93h' - 2840909h - 2,95 \cdot 10^8 h;$$

$$h' = 3,418 \cdot 10^{-8} - 643,93h - 2840909h' - 4,3 \cdot 10^9 h.$$

Початкові умови розрахунку приймаємо такі: $t_0 = 0$; $h_0 = 0$; $h'_0 = 0$; $h''_0 = 0$; час t змінюється від 0 до 2 секунд. За отриманими даними будемо графіки залежності переміщення і швидкості валу від часу рис. 3.

З графіків видно, що період перехідного процесу переміщення вала знаходиться в межах 1,5 с. В момент запуску чи перевантаження ДВЗ, при спрацюванні додаткової системи живлення від насосу $H2$ відбувається стабілізація положення колінвала в гідроопорі, після чого система вимикається і опора працює в нормальному режимі.

Перспективи подальших досліджень. Для подальших досліджень авторами планується проведення експерименту та перевірка роботи розробленої системи з використанням дільника потоку на відповідність розробленій математичній моделі.

Висновки. В результаті отримано рівняння руху колінвала двигуна внутрішнього згорання автомобіля з урахуванням роботи додаткової системи живлення гідростатичного підшипника.

Також визначено швидкість і переміщення валу у початковий момент часу при спрацюванні керуючого золотника та подачі додаткового об'єму рідини змащування в гідростатичну опору.

Список літератури: 1. *Сахно Ю.О., Сахно Є.Ю., Шевченко Я.В., Бойко С.В.* Модернізація системи змащування підшипників колінчатого валу // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. – Чернігів. 2008. – № 34, Технічні науки – С. 95 – 99. 2. *Алексеев В.П., Грехов Л.В. и др.* Двигатели внутреннего сгорания: устройство и работа поршневых и комбинированных двигателей / Под общ. ред. *А.С. Орлина.* – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с. 3. *Гоц А.И.* Кинематика и динамика кривошипно-шатунного механизма поршневых двигателей. / учебное пособие. – Владимир: Редакционно-издательский комплекс ВлГУ, 2005. – 124 с. 4. *Вырубов Д. Н. и др.* Двигатели внутреннего сгорания: теория поршневых и комбинированных двигателей – М.: Машиностроение, 1983. – 164 с. 5. *Сахно Ю.О., Сахно Є.Ю., Шевченко Я.В.* Стабілізація положення кривошипа під навантаженням в гідростатичній опорі // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь, 2010. – № 10. Том 9. – С. 26 – 35. 6 *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике / Государственное издательство физико-математической литературы. Москва. 1960. – 412 с.

Надійшла до редколегії 13.03.2012

А.Н. СЕМКО, д-р техн. наук, проф., ДонНУ, Донецк;
Ю.В. ЛОКТЮШИНА, аспирант, ДонНУ, Донецк

О ВЛИЯНИИ ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ ГИДРОПУШКИ

Оцінюється вплив густини рідини на параметри гідрогармати. Дослідження виконано в рамках моделі ідеальної нестисливої рідини для квазіоднорізного наближення. Отримані розподіли швидкості та тиску рідини по довжині гідрогармати. Розраховані параметри, що характеризують ефективність гідрогармати (максимальна швидкість струменя, максимальний тиск в соплі, тиск гальмування, імпульс високошвидкісної ділянки струменя, коефіцієнт перевищення тиску, коефіцієнт перетворення енергії), які порівнюються із відповідними значеннями для водяного заряду.

Оценивается влияние плотности жидкости на параметры гидропушки. Исследование выполнено в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости для квазиодномерного приближения. Получены распределения скорости и давления жидкости по длине гидропушки. Рассчитаны параметры, характеризующие эффективность гидропушки (максимальная скорость струи, максимальное давление в сопле, давление торможения, импульс высокоскоростного участка струи, коэффициент превышения давления, коэффициент преобразования энергии), которые сравниваются с соответствующими значениями для водяного заряда.

In this paper evaluated the effect of liquid density on the parameters hydrogun. The study was conducted in the model of ideal incompressible fluid to quasi approximation. The dependence of the velocity distribution and pressure along the length of hydrogun are received. The parameters which characterize the efficiency of hydrogun (maximum speed of the jet, the maximum pressure in the nozzle, brake pressure, the impulse of high-speed segment of the jet, the coefficient of excess pressure, the coefficient of energy conversion), which are compared with the corresponding values for the water charge are calculated.

Введение. Импульсные высокоскоростные струи жидкости нашли широкое применение в различных технологических процессах и отраслях промышленности, таких как: обработка материалов, разрушение горных пород, очистка поверхностей, тушение газовых факелов, разминирование взрывоопасных предметов и др. Для получения таких струй используют импульсный водомет (ИВ) и гидропушку (ГП), в которых реализуются экструзионный и инерционный принципы ускорения жидкости [1, 2]. Разный механизм ускорения жидкости в этих установках существенно влияет на основные гидродинамические параметры ультраструй: максимальную скорость струи, ее компактность, дальность и коэффициент превышения давления. Зависимость этих параметров от формы сопла и других конструктивных факторов ГП достаточно подробно исследована в [3]. В этой работе сформулированы критерии для оценки эффективности ГП и предложена методика оптимизации параметров ГП путем изменения ее конструкции.

Одним из существенных недостатков гидропушки с поршневым приводом является небольшая дальность, которая обусловлена особенностью

истечения импульсной струи жидкости из сопла ГП. Как правило, струя ГП начинает истекать с максимальной скоростью, которая затем быстро уменьшается. Это приводит к возникновению больших продольных градиентов скорости в струе, появлению растягивающих напряжений, приводящих к возникновению кавитации и последующему разрушению струи, что резко снижает ее дальнобойность. И если влияние геометрических факторов на параметры ГП в какой-то мере изучено, то влияние свойств рабочей жидкости (плотность, сжимаемость, вязкость) на параметры ГП практически не рассматривалось.

В качестве рабочей жидкости для ГП обычно применяется вода, как наиболее доступный ресурс. Для увеличения плотности рабочей жидкости применяют вещества, хорошо растворимые в воде: глину, мел, известняк, соль. Молотый мел и известняк применяются для приготовления безглинистых растворов. В качестве утяжелителей применяются барит и железистые утяжелители (гематит, магнетит) [4]. Глинистый раствор приготавливают из порошкообразных или комовых глин в специальных устройствах. Для придания требуемых свойств в глинистый раствор добавляют различные химические реагенты, тяжёлые минеральные порошки (утяжелители), нефть и др. Глинистый раствор в движении обладает свойствами жидкости, в покое – твёрдого тела [5].

В работе [6] при оценке влияния вязкости жидкости на параметры ГП методом исчезающей вязкости показано хорошее совпадение результатов расчетов в точной осесимметричной постановке для вязкой жидкости и приближенной квазиодномерной для идеальной жидкости, что свидетельствует о незначительном влиянии вязкости жидкости на параметры ГП.

В работе [7] в качестве критерия для оценки влияния сжимаемости жидкости на параметры ГП предложено число Маха, рассчитанное по максимальной скорости жидкости. Исследования показали, что при небольших числах Маха ($M < 1$) сжимаемостью жидкости можно пренебречь. При больших числах Маха пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к большим погрешностям. Например, при числе Маха $M = 2$ максимальные скорости для несжимаемой и сжимаемой жидкости отличаются на 34%. Однако, при существенном расхождении результатов качественный характер процесса для моделей сжимаемой и несжимаемой жидкости подобный. Поэтому предварительные расчеты параметров ГП можно проводить в упрощенной постановке без учета сжимаемости жидкости.

В настоящей работе в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости для квазиодномерного приближения проведена оценка влияния плотности жидкости на параметры ГП. Получены распределения скорости и давления жидкости по длине ГП на разные моменты времени. Рассчитаны параметры, характеризующие эффективность гидропушки (максимальная скорость струи, максимальное давление в сопле, давление торможения, импульс высокоскоростного участка струи, коэффициент превышения давления, коэффи-

циент преобразования энергии), которые сравниваются с соответствующими значениями для водяного заряда.

Математическая модель гидропушки. На рис. 1 приведена схема поршневой ГП безударного действия. Поршень 2 вместе с водяным зарядом 3 предварительно разгоняется сжатым газом 1 в цилиндрическом стволе 4 до некоторой скорости, с которой жидкость начинает втекать в сужающееся сопло 5, когда передний фронт водяного заряда достигает входа в сопло. При этом происходит ускорение жидкости в окрестности переднего фронта и торможение остальной массы жидкости вместе поршнем. Энергия поршня и прилегающей к нему жидкости передается передним частицам жидкости, скорость которых существенно возрастает.

Движение жидкости в ГП рассматриваем в квазиодномерной постановке, вязкостью и сжимаемостью жидкости пренебрегаем, деформации корпуса не учитываем, передний фронт жидкости считаем плоским, давлением воздуха в сопле пренебрегаем.

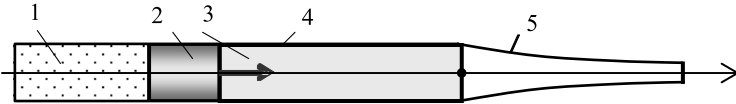


Рисунок 1 – Гидропушка.

1 – ресивер; 2 – поршень; 3 – вода; 4 – ствол; 5 – сопло.

В принятой постановке уравнения нестационарного движения идеальной несжимаемой жидкости в ГП можно записать в виде:

$$\frac{\partial uF}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (2)$$

Здесь u , p и ρ – скорость, давление и плотность, x и t – координата и время, $F = F(x)$ – площадь поперечного сечения сопла, которая является заданной функцией координаты x [2]. Начало координат размещено у входа в сопло, где в начальный момент находится передний фронт жидкости.

Начальные и граничные условия для ГП следующие

$$u(0, x) = u_0, \quad p(0, x) = 0, \quad -L \leq x \leq 0, \quad x_R(0) = -L, \\ x_F(0) = 0, \quad u(t, x_R) = u_R, \quad p(t, x_F) = 0,$$

где u_0 – начальная скорость воды и поршня; x_R и x_F – координаты заднего и переднего фронта водяного заряда; u_R – скорость заднего фронта; L – длина водяного заряда; индексами « R » и « F » отмечены параметры на зад-

нем и переднем фронте водяного заряда.

Разобьем выстрел ГП на две стадии: втекание жидкости в сужающееся сопло и истечение импульсной струи из сопла.

Втекание. Стадия втекания, с которой начинается выстрел ГП, заканчивается тогда, когда передний фронт жидкости достигает среза сопла. Запишем балансы массы и энергии на стадии втекания:

$$m = x_R \rho F_R + \rho \int_0^{x_F} F(x) dx, \quad (3)$$

$$\frac{(m + m_p) u_0^2}{2} = \left[m_p - x_R \rho F_R \right] \frac{u_R^2}{2} + \int_0^{x_F} \frac{\rho u^2}{2} F(x) dx. \quad (4)$$

Здесь m_p и m – масса поршня и заряда жидкости; F – площадь поперечного сечения сопла; u – скорость жидкости.

К уравнениям течения жидкости присоединим уравнение движения поршня с начальными условиями

$$m_p \dot{u}_p = -p_R F_R, \quad \dot{x}_p = u_p, \quad u_p(0) = u_0, \quad x_p(0) = -L,$$

где $u_p = u_R$ – скорость поршня; $x_p = x_R$ – координата поршня; p_R – давление на поршень; точка обозначает производную по времени.

Проинтегрируем уравнение неразрывности (1) и запишем в виде:

$$u(t, x) F(x) = u_R F_R. \quad (5)$$

Из уравнений (3) и (4) выразим координату и скорость заднего фронта, как функции координаты переднего фронта

$$x_R = \int_0^{x_F} \frac{F(x)}{F_R} dx - \frac{m}{\rho F_R}, \quad (3')$$

$$u_R = \sqrt{\frac{(m + m_p) u_0^2}{m_p - x_R \rho F_R + \rho F_R^2 \int_0^{x_F} \frac{dx}{F(x)}}}. \quad (4')$$

Из выражения (5) получим распределение скорости по длине водяного заряда

$$u(t, x) = u_R \frac{F_R}{F(x)}. \quad (5')$$

Исключим из уравнения (2) скорость при помощи выражения (5')

$$\frac{F_R}{F(x)} \dot{u}_R + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_R^2}{2} \frac{F_R^2}{F^2(x)} + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (6)$$

Проинтегрировав это уравнение по координате от x_R до текущей координаты x и учтя, что $p_R = -m_p \dot{u}_R / F_R$, получим распределение давления по длине водяного заряда

$$p(t, x) = -\dot{u}_R \left(\frac{m_p}{F_R} + \rho F_R \int_{x_R}^x \frac{dx}{F(x)} \right) - \frac{\rho u_R^2}{2} \left(\frac{F_R^2}{F^2(x)} - 1 \right), \quad (7)$$

Ускорение заднего фронта жидкости \dot{u}_R найдем из выражения (7) с учетом граничного условия на свободной поверхности ($p(t, x_F) = 0$)

$$\dot{u}_R = -\frac{\rho u_R^2}{2} \left(\frac{F_R^2}{F^2(x)} - 1 \right) \cdot \left(\frac{m_p}{F_R} + \rho F_R \int_{x_R}^x \frac{dx}{F(x)} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Приведенные формулы полностью описывают втекание жидкости в сопло ГП и дают распределение скорости и давления по длине водяного заряда на разные моменты времени или положения переднего фронта.

Истечение. При истечении струи из сопла масса и энергия жидкости в ГП уменьшаются. Пусть истечение струи началось в момент времени t_0 . К моменту времени $t \geq t_0$ из сопла вытечет масса жидкости Δm и будет унесена энергия ΔE :

$$\Delta m = \rho F_s \int_{t_0}^t u_s(t') dt', \quad \Delta E = \frac{1}{2} \rho F_s \int_{t_0}^t u_s^3(t') dt'.$$

Здесь индексом «s» отмечены параметры на срезе сопла. Поскольку объем жидкости больше объема сопла, то на начало истечения поршень находится в стволе ($x_R(t_0) < 0$).

Запишем баланс энергии на этот момент времени

$$\frac{(m + m_p) u_0^2}{2} = \left[m_p - x_R \rho F_R \right] \frac{u_R^2}{2} + \int_0^{x_F} \frac{\rho F u(x)^2}{2} dx + \frac{\rho F_s}{2} \int_{t_0}^t u_s^3(t') dt'. \quad (9)$$

Преобразуем уравнение баланса энергии (9) с учетом уравнения неразрывности $F_s u_s = F_R u_R = F(x) u(x)$ к виду

$$(m + m_p) u_0^2 = \left[m_p - x_R \rho F_R + \rho F_R^2 \int_0^{x_F} \frac{dx}{F(x)} \right] u_R^2 + \frac{\rho F_R^3}{F_s^2} \int_{t_0}^t u_s^3(t') dt'. \quad (10)$$

Продифференцировав уравнение (10) по времени и учтя, что $\dot{u}_R = u_R \frac{du_R}{dx_R}$, после преобразований получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\left[m_p - x_R \rho F_R + \rho F_R^2 \int_0^{x_F} \frac{dx}{F(x)} \right] \frac{du_R}{dx_R} + \left(\frac{F_R^2}{F_S^2} - 1 \right) \frac{\rho F_R u_R}{2} = 0. \quad (11)$$

Обозначив $k_1 = m_p + \rho F_R^2 \int_0^{x_F} \frac{dx}{F(x)}$, $k_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{F_R^2}{F_S^2} - 1 \right)$ и проинтегрировав

уравнение (11) с учетом начальных условий на момент истечения, найдем зависимость скорости заднего фронта жидкости (поршня) от его координаты:

$$u_R = u_{R0} \left(\frac{k_1 - x_R \rho F_R}{k_1 - x_{R0} \rho F_R} \right)^{k_2}, \quad (12)$$

где x_{R0} и u_{R0} – координата и скорость заднего фронта на начало истечения, которые рассчитываются по формулам (3') и (4').

Учитывая, что $u_R = \frac{dx_R}{dt}$, после подстановки в уравнение (12) и интегрирования, получим выражение, связывающее координату заднего фронта x_R со временем на стадии истечения

$$t = t_0 + \frac{(m + m_p) u_0^2}{(k_2 - 1) \rho F u_{R0}^3} \left[\left(\frac{k_1 - x_{R0} \rho F_R}{k_1 - x_R \rho F_R} \right)^{k_2 - 1} - 1 \right], \quad (13)$$

где учтено, что $k_1 - x_{R0} \rho F_R = (m + m_p) u_0^2 / u_{R0}^2$. Из выражений (12) и (13) следует явная зависимость x_R и u_R от времени:

$$x_R = \frac{k_1}{\rho F_R} - \frac{k_1 - x_{R0} \rho F_R}{\rho F_R \left[1 + \frac{(k_2 - 1) \rho F_R u_{R0}^3}{(m + m_p) u_0^2} (t - t_0) \right]^{\frac{1}{k_2 - 1}}}, \quad (14)$$

$$u_R = u_{R0} \left[1 + \frac{(k_2 - 1) \rho F_R u_{R0}^3}{(m + m_p) u_0^2} (t - t_0) \right]^{\frac{-k_2}{k_2 - 1}}. \quad (15)$$

Зависимость скорости истечения от времени определяется выражением:

$$u_S = u_R \frac{F_R}{F_S} = u_{R0} \left[1 + \frac{(k_2 - 1) \rho F_R u_{R0}^3}{(m + m_p) u_0^2} (t - t_0) \right]^{\frac{-k_2}{k_2 - 1}} \cdot \frac{F_R}{F_S}. \quad (16)$$

Скорость истечения в $k_F = F_R / F_S$ раз больше скорости поршня. Истечение струи ГП всегда начинается с максимальной скоростью, равной

$$u_{S\max} = u_{R0} k_F, \quad (17)$$

которая затем быстро уменьшается со временем.

Анализ результатов расчетов. Расчеты проводились для лабораторной ГП, размеры и параметры которой взяты из работы [8]: радиус ствола и входа в сопло $R_c = 33$ мм, радиус выхода из сопла $R_s = 5$ мм, длина сопла $L_s = 253$ мм, начальная скорость поршня и заряда жидкости $u_0 = 76$ м/с, масса поршня $m_p = 2,25$ кг, масса жидкости $m = 0,85$ кг. Профиль сопла экспоненциальный, который описывается уравнением $R(x) = R_c e^{-kx}$, где $k = (1/L_s) \ln(R_c/R_s)$. Начало координат совмещено с входом в сопло.

Для расчета параметров ГП использовались следующие вещества: безглинистый раствор, глинистый раствор, соляной раствор, вода, керосин и аммиак, значения плотности для которых приведены в следующей табл. 1.

Таблица 1

Значения плотностей рассчитываемых веществ.

№ п/п	Вид вещества	Плотность, кг/м ³
1	Безглинистый раствор	2500
2	Глинистый раствор	2000
3	Соляной раствор	1350
4	Вода	1000
5	Керосин	850
6	Аммиак	610

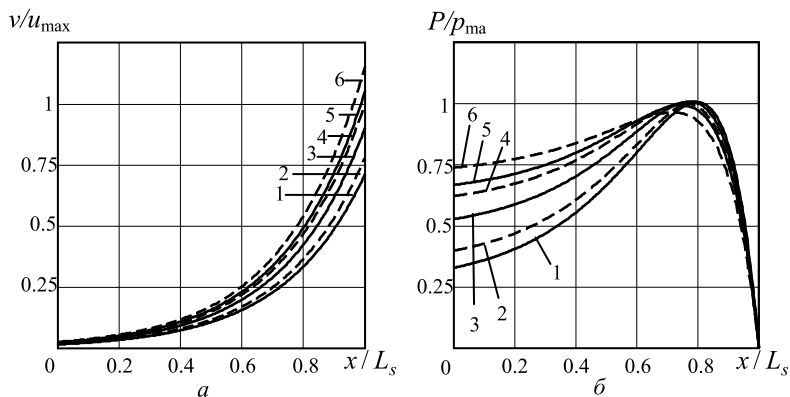


Рисунок 1 – распределение скорости a и давления b в стволе ГП в момент начала истечения. 1 – безглинистый раствор, 2 – глинистый раствор, 3 – соляной раствор, 4 – вода, 5 – керосин, 6 – аммиак.

На рис. 1 a и b приведено распределение скорости и давления в стволе ГП в момент начала истечения для исследуемых веществ. Величины на графиках представлены в безразмерном виде; в качестве масштабов выбраны

максимальная скорость воды u_{\max} , максимальное давление воды p_{\max} в стволе ГП, длина сопла L_s .

Для оценки влияния плотности жидкости на эффективность ГП были использованы следующие критерии: максимальная скорость струи u_{\max} , максимальное давление в сопле p_{\max} , давление торможения p_b , импульс высокоскоростного участка струи I , коэффициент превышения давления k_p , коэффициент преобразования энергии k_E [3]. Численные значения этих критериев для воды, которая являлась эталонной жидкостью, приведены в табл. 2:

Таблица 2

Значения главных параметров ГП для водяного заряда.

	u_{\max} , м/с	p_{\max} , МПа	p_b , МПа	I , кг·м/с	k_p	k_E
Вода	1497	410	1120	1,61	2,73	0,117

В табл. 3 приведены относительные критерии эффективности ГП для исследуемых жидкостей (критерии исследуемых жидкостей отнесены к соответствующим критериям эталонной жидкости).

Таблица 3

Значения главных параметров ГП для исследуемых веществ.

№ п/п	Вид вещества	u_{\max}	p_{\max}	p_b	I	k_p	k_E
1	Безглинистый раствор	0,71	1,004	1,28	1,28	1,27	0,92
2	Глинистый раствор	0,78	1,007	1,22	1,22	1,21	0,96
3	Соляной раствор	0,90	1,007	1,10	1,10	1,10	1
4	Вода	1,00	1,000	1,00	1,00	1,00	1
5	Керосин	1,05	0,992	0,94	0,94	0,95	0,99
6	Аммиак	1,15	0,963	0,81	0,82	0,85	0,95

При уменьшении плотности жидкости на 40% максимальная скорость струи увеличивается на 15%. При увеличении плотности на 150% скорость струи уменьшается на 30%. Максимальное давление в ГП для разных жидкостей отличается незначительно, всего на 4%. А вот локальные значения давления внутри установки для разных жидкостей различаются существенно. Например, на поршне давление для самой легкой жидкости (аммиак) почти в 2 раза больше, чем для самой тяжелой (безглинистый раствор) (кривые 6 и 1 на рис. 2). Чем тяжелее жидкость, тем меньше давление на поршне при примерно одинаковом максимальном давлении, которое наблюдается на расстоянии 0,2 от среза сопла.

Коэффициент превышения давления характеризует насколько макси-

мальное давление струи на жесткую преграду превышает максимальное давление внутри установки, при помощи которой получена струя. Находится как отношение максимального скоростного напора струи $\rho v^2/2$ к максимальному давлению внутри установки.

$$k_p = \rho v^2 / 2 p_{\max} .$$

Этот коэффициент максимальный для наибольшей плотности жидкости. При увеличении плотности на 150% k_p изменяется на 27%. При уменьшении плотности на 40% k_p уменьшается на 15%.

Коэффициент преобразования энергии $k_E = 1/E_0 \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} (\rho v^2 / 2) v F_s dt$ характеризует кинетическую энергию высокоскоростного участка струи. Чем больше этот коэффициент, тем эффективнее начальная энергия ГП преобразуется в энергию высокоскоростного участка, который определяет эффективность силового воздействия струи на объект обработки. Зависимость этого коэффициента от плотности жидкости аналогична соответствующей зависимости коэффициента превышения давления k_p – чем больше плотность, тем больше коэффициент. Изменение k_E не превышает 8%.

Таблица 4

Комплексная оценка эффективности ГП для разных рабочих жидкостей.

№ п/п	Вид вещества	Критерий						Σ
		\tilde{u}_{\max}	\tilde{p}_{\max}^{-1}	\tilde{p}_b	\tilde{I}	\tilde{k}_p	\tilde{k}_E	
1	Безглинистый раствор	2	96	100	100	100	92	550
2	Глинистый раствор	68	96	96	96	95	96	546
3	Соляной раствор	78	96	87	86	86	100	533
4	Вода	87	96	78	78	79	100	518
5	Керосин	91	97	74	73	75	99	509
6	Аммиак	100	100	66	64	67	95	491

Импульс высокоскоростного участка струи характеризует силовое воздействие струи на преграду. Максимальный в случае наибольшей плотности. Его изменение по отношению к водяному заряду равно 28%. В случае уменьшения плотности на 40% – уменьшение значения коэффициента равно 22%.

В табл. 4 представлены результаты комплексной оценки эффективности ГП в зависимости от плотности рабочих жидкостей. Оценка проводилась по 100-бальной шкале согласно методике [3] для следующих критериев: \tilde{u}_{\max} ,

\tilde{p}_{\max}^{-1} , \tilde{p}_b , \tilde{I} , \tilde{k}_p , \tilde{k}_E . Значения критериев в каждой категории отнесены к максимальному значению той категории, которое принято за 100 баллов (например, $\tilde{u}_{\max} = 100u_{\max} / \max(u_{\max})$). Наиболее эффективным считалось вещество с наибольшей суммой баллов.

По результатам расчетов видно, что из рассмотренных жидкостей, наилучшие показатели имеет безглинистый раствор, у которого максимальные значения коэффициента превышения давления, импульса высокоскоростного участка струи, давления торможения (рейтинг 550). Хорошие показатели у глинистого раствора, у которого высокие показатели по всем критериям, кроме максимальной скорости (рейтинг 546). У соляного раствора (рейтинг 533) и воды (рейтинг 518) максимальный коэффициент преобразования энергии. Худшие показатели у аммиака, хотя в этом случае получается струя с максимальной скоростью при минимальном давлении внутри установки (рейтинг 491).

Выводы. Зависимость максимального давления внутри установки от плотности жидкости незначительна. Значение плотности оказывает наибольшее влияние на параметры ГП, характеризующие силовое воздействие на преграду. При увеличении плотности в 2,5 раза можно достигнуть 30% увеличения дальности и компактности струи, несмотря на существенное уменьшение ее скорости в момент истечения. Комплексная оценка эффективности применения различных веществ в качестве рабочей жидкости в ГП показала, что наиболее эффективной является жидкость с наибольшей плотностью.

Список литературы: 1. *Атанов Г. А.* Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К.: Вища школа, 1987. – 155 с. 2. *Семко А. Н.* Импульсные струи жидкости высокого давления. Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2007. – 149 с. 3. *Решетняк В. В.* Оптимизация параметров гидропушки: Дис.... канд. техн. наук.: 01.02.05. Донецк: ДонНУ, 2010. – 167 с. 4. <http://www.drillings.ru/mel/>; Материалы, применяемые для приготовления промывочных жидкостей. – 21.10.2011. 5. <http://bse.sci-lib.com/article010933.html>; Глинистый раствор. – 22.10.2011. 6. *Веремеев С. А., Семко А. Н.* Влияние вязкости жидкости на параметры гидропушки. Вісник Донецького університету, Серія А. Природничі науки. – 2005. – №2. – С. 90 – 96. 7. *Семко А. Н., Локтюшина Ю. В.* Об учете сжимаемости жидкости при расчете течения в гидропушке. Донецк: ДонНУ, 2011. – С. 95 – 101. 8. *Атанов Г. А., Семко А. Н., Украинский Ю. Д.* Исследование внутренней баллистики гидропушки // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.- 1983.- № 4.- С. 168-170.

Поступила в редколлегию 04.02.2012

Э.А. СИМСОН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Д.Б. ПИВОВАРОВ, магистр, НТУ «ХПИ»;
В.Л. ХАВИН, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
С.А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, с. н. с., НТУ «ХПИ»

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ИЗГОТОВЛЕНИЯ КОРПУСА ПОГЛОЩАЮЩЕГО АППАРАТА

Наведені підходи для розв'язання задачі моделювання фізико-механічних процесів при виготовленні корпусу поглинаючого апарату. Описана математична модель досліджуваного процесу. Наведені розрахункові та експериментальні результати дослідження.

Приведены подходы к численному моделированию физико-механических процессов при изготовлении корпуса поглощающего аппарата. Описана математическая модель исследуемого процесса. Приведены численные и экспериментальные результаты исследования.

In the paper the approaches are presented for task's solution of modeling of physical and mechanical processes at manufacturing of details by casting. The mathematical model of the researching process is described. The numerical and experimental results of research are discussed.

Введение и постановка задачи. Стремительное развитие CAD/ CAM/ CAE-систем является общемировой тенденцией промышленных технологий [1,2]. Исследование современных технологических процессов обуславливает необходимость интеграции математических моделей высокого уровня, описывающих взаимосвязанные физико-механические поля [3]. Увеличение производительности компьютеров, повышение эффективности вычислений (за счет сетевых Internet-технологий, многопроцессорности и параллелизации) способствовало интеграции соответствующих вычислительных технологий для так называемой симуляции и инженерного анализа моделирования виртуальных испытаний [4].

Литейное производство является основной базой по подготовке заготовок для многих отраслей машиностроения. Качество производимых отливок напрямую связано с этапом разработки технологического процесса, то есть с выбором оптимальных параметров процесса литья. Очевидно, что неправильно выбранные параметры литья (форма литниковой системы, скорость заливки, температура расплава, тип противопригарного покрытия и тому подобное) могут существенно снизить качество и повысить процент брака. Вместе с этим, в условиях высокой конкуренции и непрерывного повышения цен на энергоресурсы снижение брака даже на несколько процентов дает ощутимый экономический эффект.

Применение методов математического моделирования литейных процессов является одним из наиболее действенных способов увеличения эф-

фективности производства. Изучая полученные расчётным способом распределения температурно-фазовых полей в отливке и форме, количество жидкой фазы, поля скоростей и давлений, места возможного образования усадочных раковин и микропористости, траекторию и места скопления шлаковых частиц можно с минимальным количеством натуральных экспериментов судить о достоинствах и недостатках предлагаемых технологических процессов.

В настоящее время существует несколько подходов к моделированию процесса литья с помощью различных численных методов: метод конечных элементов; метод конечных разностей; метод конечных объёмов (МКО). Как показано в [5,6], МКО является более предпочтительным при решении задач заполнения формы металлом и её последующего остывания, так как он более эффективен в задачах гидродинамики и позволяет учесть взаимодействие различных сред: жидкого и застывшего сплава, воздуха.

Целью данной работы являлся поиск путей снижения основных видов литейного брака с помощью проведения численного моделирования процесса литья на примере детали корпуса поглощающего аппарата ПМКП-110.

Физическая модель процесса. Анализ основных типов брака, приведенных в табл. 1, показал, что при заливке детали типа «Корпус поглощающего аппарата» применяемые параметры технологического процесса не являются оптимальными. В частности, это связано с появлением усадочных раковин в тепловых узлах отливки, которое вызвано тем, что при затвердевании отливки появляются изолированные участки жидкого металла, не связанные с питателями или прибылью.

Объём изолированного участка в этом случае остаётся постоянным, а подпитка жидким металлом невозможна. При дальнейшем охлаждении, из-за сжатия стали при затвердевании, в таких участках образуются поры или полости. Устранить данный дефект возможно с помощью, например, усовершенствования литниковой системы [5].

Появляющиеся в отливке шлаковые и газовые раковины связаны с попаданием в литниковую систему соответственно шлаковых и газовых частиц и захватом их потоком расплавленного металла. Данный дефект проистекает из-за неудачной, с точки зрения гидродинамики, геометрии литниковой системы.

Литье детали ПМКП-110.00.00.002 «Корпус» производится по технологии гравитационного литья в песчано-глинистые разовые формы. Материал отливки - Сталь 30 ГСЛ-Б ГОСТ 22253-76. Форма изготовлена по технологии холоднотвердеющей смеси на основе фуранового затвердителя. Для изготовления стержней использована технология cold-box-amin. Схема литья приведена на рис 1. Угол наклона струи материала Q составляет 15° .

Основные типы брака при отливке ПМКП-110 «Корпус».

Тип брака	Процент брака	Характеристики
Усадочные раковины	15%	15x10x5 мм
Шлаковые раковины	10%	SiO_2, Fe_2O_3 размер 0,2-1мм
Газовые раковины	30%	
Горячие трещины	5%	
Прочее	40%	Не связано с технологией

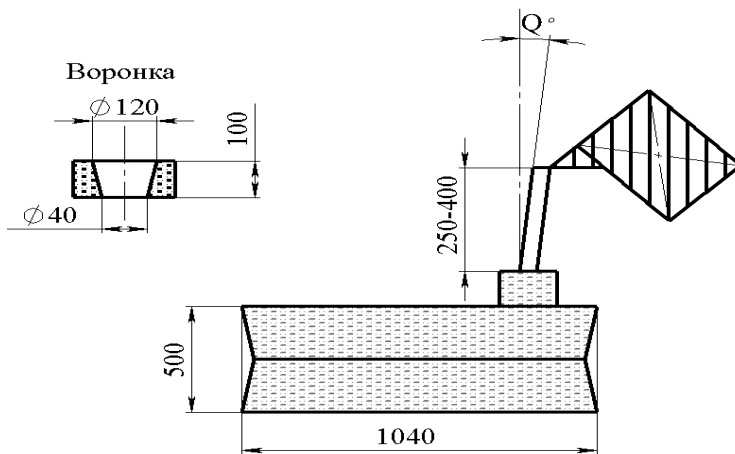


Рисунок 1 – Схема заливки.

Весь процесс моделирования литья можно условно разделить на 3 этапа:

1. Разработка математической модели, выбор основных варьируемых параметров, влияющих на качество технологического процесса.
2. Проведение компьютерной симуляции и верификация результатов.
3. Анализ чувствительности математической модели к выбранным параметрам технологического процесса.

При построении математической модели процесса литья расплавленного металла в форму процесс представляется как нестационарная задача течения вязкой неоднородной жидкости с учетом конвективного теплообмена, фазовых переходов, взаимодействия различных сред (сплава и вытесняемого из формы газа), изменения геометрии канала в ходе его заполнения. Подробное рассмотрение особенностей постановок задачи, вычислительных аспектов данной задачи и методов моделирования литейных процессов приведены в [6].

Уравнения математической модели. Метод конечных объёмов использует уравнения в интегральной форме. В таком виде уравнения движения (*уравнения Навье-Стокса*) можно интерпретировать как закон сохранения импульса (1) – изменение импульса внутри объёма равно импульсу (ρU), вносимому в объём вместе с потоком через поверхность (Un), и мощности внешних сил (A). Внешней силой может быть давление на поверхность, вызывающее движение в материале.

Уравнение неразрывности (2) принимает вид уравнения сохранения массы – изменение массы в некоем объёме (ρdV) равно потоку массы (ρU) через поверхность этого объёма. *Уравнения энергии* (3) описывает сохранение полной внутренней энергии вещества, то есть суммы тепловой энергии (записанной через энтальпию h) и кинетической энергии ($0,5U^2 \rho dV$). Изменение полной внутренней энергии некоего объёма равно энергии, вносимой потоком вещества ($\bar{U}\bar{n}$) сквозь поверхность, а также мощности внутренних источников (N).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot \bar{U} dV = - \int_S \rho \cdot \bar{U} \cdot \bar{U} \cdot \bar{n} dS - A, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \bar{U} \cdot \bar{n} dS, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho (h + \bar{U} \cdot \bar{U} / 2) dV = - \int_S \rho (h + \bar{U} \cdot \bar{U} / 2) \bar{U} \cdot \bar{n} dS - N, \quad (3)$$

где h – энтальпия; U – вектор скоростей; n – нормаль к поверхности ячейки; ρ – плотность жидкости; A – работа внешних сил, совершаемая за единицу времени dt ; N – мощность внутренних источников тепла и кинетической энергии; V – объём ячейки; S – площадь поверхности конечного объёма V . Граничные условия третьего рода представляют так называемые уравнения баланса.

Для решения задачи гидродинамики в первую очередь необходимо определить, является ли течение расплава ламинарным или турбулентным. Известно соотношение для определения *числа Рейнольдса*:

$$Re = v_0 l_0 / \nu, \quad (4)$$

где v_0 – характерная скорость жидкости в канале; l_0 – характерный размер канала; ν – кинематическая вязкость.

Расчёты показали, что число Рейнольдса в литниковой системе составляет $Re = 11 \cdot 10^3 - 2,9 \cdot 10^5$, что значительно превышает критическое значение $Re_{кр} = 2300$, следовательно, поток является турбулентным. Так как турбулентное течение наблюдается лишь в узком и относительно коротком прямом канале литниковой системы, при моделировании заливки всей формы может

быть использована модель ламинарного течения.

В качестве исходных данных для моделирования были использованы параметры процесса, приведенные в табл. 2. Геометрическая модель детали и исходная форма литниковой системы приведены на рис 2.

Таблица 2

Основные параметры заливки.

Параметр	Обозначение	Исходное значение
Толщина стенки формы, мм	H	150
Напор, мм	h	300
Коэффициент теплоотдачи на границе расплав-форма, Вт/м ² /К	λ	350-750
Время заполнения, с	t	40
Диаметр струи, входящей в литниковую систему, мм	d	18
Температура расплава, °С	T	1580

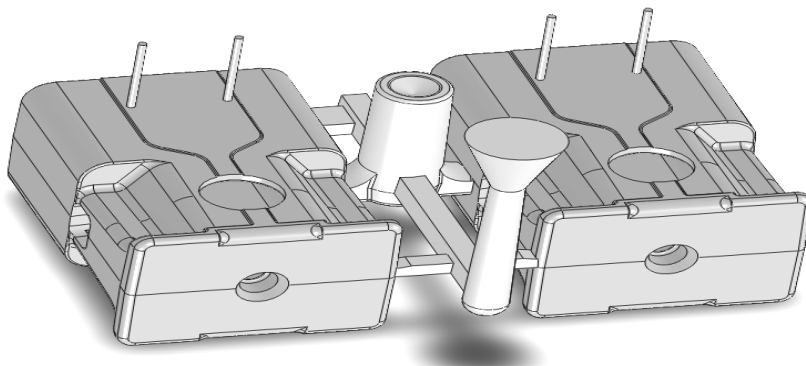


Рисунок 2 – Геометрия детали и литниковой системы.

Одним из основных параметров, влияющих на процесс заполнения и остывания формы, является коэффициент теплоотдачи на границе расплав-форма, который во многом определяется функцией, типом и толщиной противопригарного покрытия. Теоретические соотношения, приведенные в работе [7], позволяют вычислить его для случая идеального теплового контакта сплава и формы. Приняв указанное выше допущение был определен коэффициент теплоотдачи $\lambda_1 = 2500-10000$ Вт/м²/К. С учётом противопригарного покрытия толщиной $\delta = 0.4$ мм и теплопроводностью $\alpha = 0.4$ Вт/м/К получаем согласно [7] результирующий коэффициент

$$\lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\delta}{\alpha}} = 700-900 \text{ Вт/м}^2/\text{К}. \quad (5)$$

Как показано в [8] рекомендуется принимать коэффициент теплоотдачи

для песчаных форм в пределах $\lambda_1 = 500-1000$ Вт/м²/К, так как тепловой контакт является неидеальным из-за наличия пор и воздушных прослоек на поверхности песчано-глинистой формы. Тогда, с учётом покрытия, получаем $\lambda_2 = 330-500$ Вт/м²/К. Следует отметить, что при моделировании заливки со значением $\lambda_2 > 500$ наблюдалось преждевременное застывание сплава в канале и, следовательно, недолив.

Анализ результатов и чувствительность к параметрам процесса литья. В ходе численного моделирования с помощью МКО были выявлены области отливки, которые при данных технологических условиях становятся изолированными при застывании, и в которых высока вероятность появления усадочных дефектов рис 3. Данные результаты совпали с наблюдаемым на предприятии браком. При моделировании отслеживалось движение вброшенных в поток металла шлаковых и газовых частиц, выявлялись места их скопления (рис 4). Данные результаты также подверглись верификации и показали качественное совпадение.

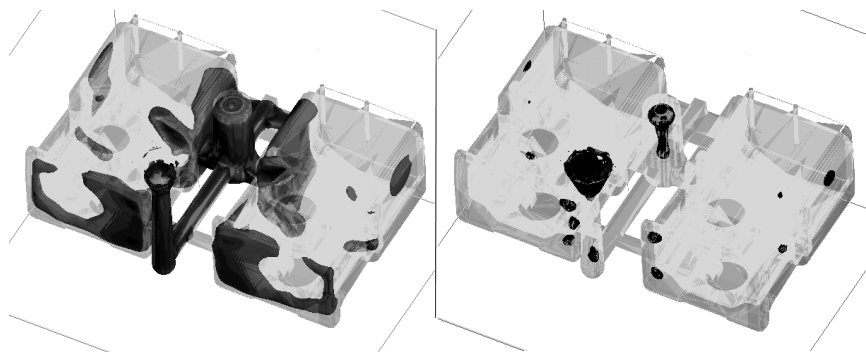


Рисунок 3 – Изолированные зоны жидкого металла и расположение усадочных раковин.

На основании результатов, полученных при варьировании технологическими условиями литья, были получены следующие выводы, которые могут быть использованы в производстве. Скорость течения (время заполнения) оказывает существенное влияние на расположение газовых и шлаковых включений. Медленное равномерное течение способствует всплытию всех частиц в области прибыли. Увеличение толщины и коэффициента теплоотдачи на границе расплав-форма уменьшает области, в которых высока вероятность появления усадочных дефектов. Колебание температуры расплава в пределах $\pm 60^\circ\text{C}$ не оказывает влияние на затвердевание. Большие колебания технологически невозможны.

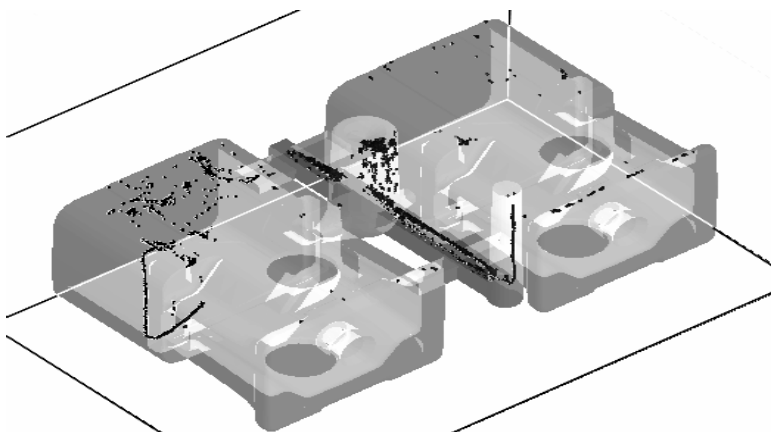


Рисунок 4 – Места скопления частиц газа и шлака.

Используемая на данный момент форма стояка способствует появлению интенсивных завихрений в литниковой системе. Это нежелательно как с точки зрения захвата сплавом воздушных частиц, так и из-за вероятности размыва стенок песчаной формы потоком расплава. На рис. 5 представлена модель с незначительно отличающейся геометрией литниковой системы. На рис. 6 приведено поле усадочных дефектов для этой модели. Уменьшилось количество и размер усадочных раковин в теле отливки, основной объём усадочных раковин сместился в литниковую систему.

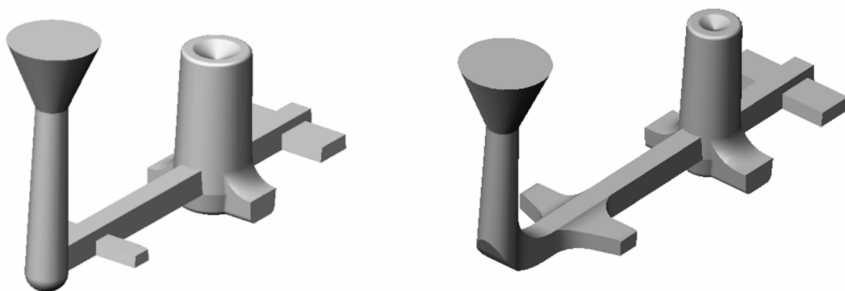


Рисунок 5 – Сравнение изменённой литниковой системы (справа) с исходной.

Диаметр бобышки (прибыли) можно уменьшить с 11,38 до 7,26 кг, что приведет к увеличению степени полезного использования материала. Установка выпоров возле боковых стенок позволяет уменьшить размер усадочных раковин в этой области. Форма передних боковых ответвлений литниковой системы такова, что способствует образованию в этой области усадочных дефектов. Образование изолированных участков хорошо видно на рис. 3. Утолщение этих каналов и увеличение радиусов скругления

позволяет уменьшить размер усадочных раковин и, благодаря устранению завихрений, уменьшить количество проходящих сквозь эти каналы шлаковых частиц.

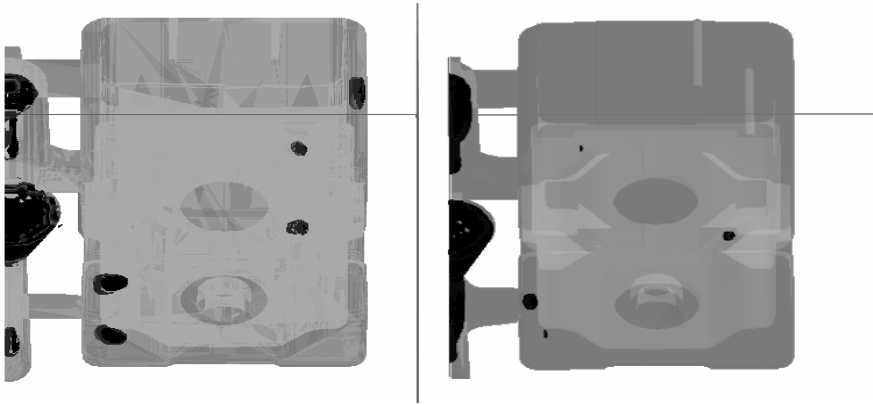


Рисунок 6 – Усадочные дефекты при изменённой форме литников (справа) в сравнении с исходной (слева).

Выводы и перспективы развития модели. Получен ряд результатов, которые могут облегчить дальнейшее проведение численных исследований: Оказалось, что толщина формы не оказывает существенного влияния на процесс затвердевания ввиду низкой теплопроводности материала, поэтому при моделировании можно ограничиться минимальной толщиной формы не более 15 мм, что существенно уменьшит количество конечных объемов. С помощью цифрового прототипа корпуса поглощающего аппарата можно уменьшить число опытных образцов, ускорить выпуск конструкций на рынок.

Список литературы: 1. Грабченко А.И., Доброскок В.Л., Чернышов С.И. Система моделирования рабочих процессов интегрированных технологий. // Сучасні технології у машинобудуванні: зб. наук. праць. – Вип. 1– Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – С. 236-268. 2. <http://www.cimdata.com/> 3. F Flager, B Welle, P Bansal, G Soremekun Multidisciplinary process integration and design optimization of a classroom building // Journal of Information Technology in Construction (ITcon). – 2009. – Vol. 14. – P. 595-612. 4. Тимофеев Ю.В., Фадеев В.А., Степанов М.С., Назаренко С.А. Обобщенная структура жизненного цикла машиностроительного производства и его изделий // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут». – Харків, НТУ “ХПІ”, 2009. – Вип. 1. С. 86-95. 5. Чуркин Б.С. Теория литейных процессов: учеб./под редакцией Э.Б. Гофмана – Екатеринбург, 2006 – 454с. 6. Alexandre Reikher, Michael R. Barkhudarov, Casting: an analytical approach. Springer-Verlag London Limited, 2007. – 177с. 7. Цветков Ф.Ф. Григорьев Б.А. Тепломассообмен: учебное пособие для вузов, испр. и доп. М: Издательство МЭИ, 2005. – 550 с. 8. ProCAST User Manual – version 2010.0/ Pre-Processing/ Thermal.

Поступила в редколлегию 27.01.2011

Т.В.ШМАТКО, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХП»

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ОРТОТРОПНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ

Запропоновано метод визначення критичного навантаження для ортотропних пологих оболонок, навантажених в серединній площині, який базується на застосуванні теорії R-функцій та варіаційних методів. Розроблені алгоритми враховують неоднорідний докритичний стан оболонки. Показано порівняння одержаних чисельних результатів з відомими результатами для ортотропних оболонок із прямокутним та квадратним планом. Чисельні результати представлено у вигляді таблиць для критичного навантаження та власних частот коливань.

Предложен метод нахождения критической нагрузки для ортотропных пологих оболочек, нагруженных в срединной поверхности. В основу метода положено использование теории R- функций и вариационных методов. Разработанные алгоритмы предусматривают расчет неоднородного докритического состояния оболочки. Показано сравнение полученных численных результатов с ранее известными для ортотропных оболочек прямоугольного и квадратного плана. Численные результаты представлены в виде таблиц для критической нагрузки и собственных частот сжимаемых оболочек.

Method of investigation buckling of the orthotropic shallow shells subjected to load in a middle surface is proposed. The method is based on R-functions theory and variational methods. Inhomogeneous prebuckling state is calculated and taken into account by developed approach. Comparison of obtained results with known for shallow shells with rectangle and square planform confirms the validation of the worked out method. Shallow shells with complex planform are considered. Obtained numerical results are presented as table of buckling load and natural frequencies.

Вступ. Широке використання пологих оболонок та пластин, виготовлених із композитних матеріалів, в будівельній, машинобудівній, авіаційній та інших галузях промисловості ставить перед вченими проблему, пов'язану із розробкою ефективних методів розрахунку композитних елементів тонкостінних конструкцій на стійкість, міцність та довговічність. Дана робота присвячена розробці метода дослідження стійкості пологих оболонок, що знаходяться під дією статичного навантаження в серединній площині.

З проведеного аналізу літератури, присвяченій цій проблемі, можна зробити висновок, що це питання далеко не остаточно розроблено, особливо для оболонок довільної форми плану та різних типів граничних умов, а також для оболонок змінної товщини. Більшість результатів одержано для пологих оболонок з прямокутним планом [1 – 4], та є декілька публікацій, в яких розглянуто скривлені панелі з вільними прямокутними отворами [5, 6]. Практично у всіх роботах для розв'язання задачі використовується метод скінчених елементів (МСЕ) або метод граничних елементів (МГЕ). В більшості робіт вважається, що докритичний стан є однорідним і відомим завдяки діючому навантаженню, прикладеному до граничного контуру. Раніше в роботах [7, 8] для дослідження ізотропних, ортотропних та багатошарових пластин довіль-

ної геометричної форми було запропоновано альтернативні МСЕ методи, що базуються на використанні теорії R-функцій [9, 10] (RFM) та варіаційних методах. В роботах [7, 8] такий підхід було застосовано для дослідження параметричних коливань одношарових ізотропних та ортотропних пластин, в роботі [11] RFM вперше застосовано для дослідження параметричних коливань багатшарових пластин під дією статичних та періодичних зусиль в серединній площині. В даній роботі розглянуто подальший розвиток RFM стосовно вивчення стійкості ортотропних пологих оболонок, які навантажені в серединній площині статичним навантаженням.

Математична постановка. Розглянемо ортотропну пологу оболонку, яка стискується в серединній поверхні навантаженням $p = p_0$. Для математичної постановки задачі використаємо класичну геометрично нелінійну теорію пологих оболонок Донела-Муштарі-Власова [12, 13], припускаючи при цьому, що виконуються наступні припущення:

- оболонка навантажена у серединній площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;
- докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності,
- всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру λ .

Відносні деформації розтягу та зсуву $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$ в серединній площині та відносні деформації згину та крутіння $\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$ задано наступними виразами :

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y},$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Зусилля $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$ та моменти $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$ в рамках обраної теорії визначаються як:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix},$$

де

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

C_{ij}, D_{ij} – жорсткісні характеристики матеріалу. У разі, якщо напрямки осей ортотропії співпадають з напрямками координатних осей, то коефіцієнти

$$C_{16} = C_{26} = D_{16} = D_{26} = 0.$$

Рівняння руху в операторній формі мають вигляд

$$[L]\vec{U} = NL(W) + m_1\vec{U}_{,tt}, \quad (1)$$

де $[L]$ є матриця лінійних операторів

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix},$$

$\vec{U} = (u, v, w)^T$ – вектор переміщень,

$NL(w) = (-Nl_1(w), -Nl_2(w), -Nl_3(u, v, w))^T$ – стовпчик, що містить в собі нелінійні відносно переміщень члени, та вектор $\vec{U}_{,tt} = (u_{,tt}, v_{,tt}, w_{,tt})^T$, який об'єднує інерційні члени.

Лінійні диференціальні оператори L_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ визначаються наступним чином:

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{13} = -L_{31} = -k_1 C_{11} \frac{\partial}{\partial x} - k_2 C_{12} \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{23} = -L_{32} = -k_1 C_{12} \frac{\partial}{\partial y} - k_2 C_{22} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + k_1^2 C_{11} + k_2^2 C_{22} + 2k_1 k_2 C_{12},$$

де $k_1 = \frac{1}{R_x}$, $k_2 = \frac{1}{R_y}$ – кривини оболонок відповідно в напрямках осей Ox та Oy .

Для зручності подальших викладок представимо вектор деформацій розтягу та вектор зусиль у вигляді суми лінійних та нелінійних доданків, а саме:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(L)} + \varepsilon^{(NL)}, \quad \varepsilon^{(L)} = \left(\varepsilon_{11}^{(L)}, \varepsilon_{22}^{(L)}, \varepsilon_{12}^{(L)} \right)^T, \quad \varepsilon^{(NL)} = \left(\varepsilon_{11}^{(NL)}, \varepsilon_{22}^{(NL)}, \varepsilon_{12}^{(NL)} \right)^T,$$

$$N = N^{(L)} + N^{(NL)}, \quad N^{(L)} = \left(N_{11}^{(L)}, N_{22}^{(L)}, N_{12}^{(L)} \right)^T, \quad N^{(NL)} = \left(N_{11}^{(NL)}, N_{22}^{(NL)}, N_{12}^{(NL)} \right)^T \quad (2)$$

Тоді зв'язок між зусиллями та деформаціями в компактній формі може бути представлено як:

$$\vec{N}^{(N)} = C \vec{\varepsilon}^{(N)}, \quad \vec{N}^{(L)} = C \vec{\varepsilon}^{(L)}, \quad \vec{N}^{(NP)} = C \vec{\varepsilon}^{(NP)}, \quad (3)$$

де

$$\vec{\varepsilon}^{(L)} = \left(u_{,x} + k_1 w; v_{,y} + k_2 w; u_{,y} + v_{,x} \right), \quad \vec{\varepsilon}^{(N)} = \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2; \frac{1}{2} w_{,y}^2; w_{,x} w_{,y} \right).$$

Вирази для нелінійних диференціальних операторів Nl_i , $i = 1, 2, 3$, як складових вектора $NL(w) = (-Nl_1(w), -Nl_2(w), -Nl_3(u, v, w))^T$, мають наступний

пний вигляд:

$$NI_1(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{11}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{12}^{(N)}(w), \quad NI_2(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{12}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{22}^{(N)}(w),$$

$$NI_3(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Система рівнянь (1) доповнюється граничними умовами, які залежать від способу закріплення краю оболонки. Звернемо увагу на те, що на навантаженої частині контуру крайові умови в площині визначаються як

$$N_n = -p, T_n = 0. \quad (4)$$

В формулах (4) N_n , T_n визначаються наступним чином:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm, \quad T_n = N_{12}(l^2 - m^2) + (N_{22} - N_{11})lm,$$

$$u_n = ul + vm, v_n = -um + vl,$$

де l та m – направляючі косинуси нормалі до границі області.

Представимо контурні зусилля N_n , T_n також у вигляді суми:

$$N_n = N_n^{(L)} + N_n^{(N)}, \quad T_n = T_n^{(L)} + T_n^{(N)},$$

де

$$N_n^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11}l^2 + C_{12}m^2) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{12}l^2 + C_{22}m^2) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) C_{66}lm,$$

$$N_n^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{11}l^2 + C_{12}m^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{12}l^2 + C_{22}m^2) + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} C_{66}lm,$$

$$T_n^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11}(l^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11})lm) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{22} - C_{12})lm +$$

$$+ C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (l^2 - m^2), \quad T_n^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{12} - C_{11})lm +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{22} - C_{12})lm + C_{66} \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} (l^2 - m^2).$$

Метод розв'язання.

1. *Визначення докритичного стану оболонки.* Враховуючи, що в разі оболонок складної форми плану та з отворами докритичний стан може бути неоднорідним, перш за все, пропонується визначити докритичний стан оболонки. З цією метою на базі другого припущення про докритичний стан оболонки сформулюємо варіаційну постановку задачі, яка є еквівалентною до розв'язання однорідної системи рівнянь:

$$L\vec{U} = 0 \quad (5)$$

з неоднорідними крайовими умовами

$$N_n^{(L)}(u_1, v_1) = -1, T_n^{(L)}(u_1, v_1) = 0 \quad (6)$$

на навантаженій частині контуру.

Як відомо, варіаційна постановка цієї проблеми (5), (6) формулюється на базі принципу Лагранжа та зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$I(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}^{(L)} \varepsilon_{11} + N_{22}^{(L)} \varepsilon_{22} + N_{12}^{(L)} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(L)} u_{1n} d\Omega_1 \quad (7)$$

де $\partial\Omega_1$ – навантажена частина границі. Побудову координатних функцій, що задовольняють крайовим умовам для оболонок складної форми будемо виконувати за допомогою методу R-функцій.

Розв'язавши задачу (5 – 7), отримуємо функції $u_1, v_1 \dots$ та w_1 , що дозволяють визначити неоднорідний докритичний стан, а саме, зусилля $N^{(L)} = (N_{11}^{(L)}, N_{22}^{(L)}, N_{12}^{(L)})^T$ за формулами (2), (3).

2. Задача про лінійні коливання оболонки, що навантажена в серединній площині статичним навантаженням.

Ця задача може бути розв'язана за допомогою методу Рітца як результат мінімізації функціоналу:

$$J = \Pi_{\max} - T_{\max}. \quad (8)$$

У формулі (8) T_{\max} – це кінетична енергія, а Π_{\max} – потенціальна енергія оболонки, які визначаються за наступними формулами:

$$T_{\max} = \frac{\Omega_L^2 \rho}{2} \iint_{\Omega} h(x, y) (U^2 + V^2 + W^2) d\Omega,$$

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12} + N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12}) + p_0 (N_x^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{xy}^{(L)}(u_1, v_1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y})] d\Omega, \quad (9)$$

де Ω_L – власна частота, що відповідає даному навантаженню p_0 .

Таким чином, розв'язання лінійної задачі про коливання оболонки зводиться до розв'язання задачі на власні значення при відповідних однорідних крайових умовах.

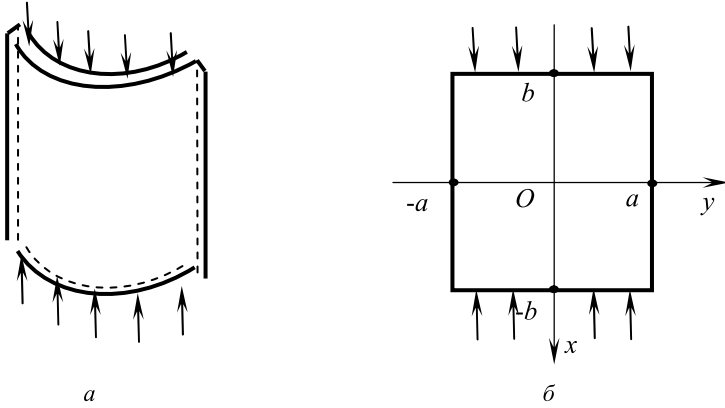


Рисунок – План циліндричної пологої оболонки.

3. *Визначення критичного навантаження.* Для визначення критичного навантаження скористаємося *динамічним методом*, запропонованим в монографії С.Г. Лехницького [14]. Згідно цього методу власні частоти оболонки залежать від її розмірів, пружних сталей, способу закріплення та від параметру $\lambda = p_0$. Із зростанням параметру λ для деяких частот можуть бути одержані нульові або уявні значення. Тоді відповідні значення прогину будуть нескінченно зростаючими із збільшенням часу, звідки випливає, що плоска форма стійкості оболонки (пластини) стає нестійкою. Найменше, що не дорівнює нулю, значення параметра λ , яке відповідає переходу від незатухаючих коливань до руху, що характеризується необмежено зростаючими відхиленнями від плоскої форми рівноваги, і буде критичним.

Треба зауважити, що на практиці стає необхідним розв'язати низку лінійних задач для визначення критичного навантаження. Для побудови системи координатних функцій, які необхідні для знаходження мінімуму відповідного функціонала (9), будемо використовувати теорію R-функцій [9].

Чисельні результати.

Задача 1. Перш за все, розглянемо тестову задачу про визначення критичного навантаження для ізотропних циліндричних пологих оболонок різної кривини:

$$R/b = 5; 7.5; 11.5; 17.5; 27.5; 63.$$

Вважається, що оболонка стискається рівномірним навантаженням в напрямку, паралельному вісі Ox (рисунок); має прямокутний план з відношенням сторін $a/b = 2$, товщиною $h/b = 0.015$, модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Будемо розглядати два способи закріплення країв оболонки: шарнірне та жорстке закріплення. Саме така задача була розв'язана в роботі [2]. В табл. 1 та 2 наведено порівняння одержаних результатів для безрозмірного параметра критичного навантаження

$$K = \frac{N_{kr} 12(1-\nu^2)b^2}{\pi^2 E h^3}$$

з результатами роботи [2].

Таблиця 1

Порівняння безрозмірного параметра критичного навантаження K шарнірно закріпленої ізотропної панелі з відомими результатами.

R_1 / b	Шарнірне опирання			
	RFM	МГЕ[2]	МСЕ[2]	МГЕ[3]
5	5.919	5.982	5.621	5.642
7.5	4.879	4.910	4.716	4.734
11.5	4.381	4.392	4.274	4.291
17.5	4.167	4.170	4.084	4.100
27.5	4.061	4.068	3.997	4.012
63	4.005	4.012	3.948	3.964
пластина	4.001	3.999	3.937	3.952

Порівняльний аналіз свідчить про вірогідність запропонованого підходу та створеного програмного забезпечення, що реалізує запропонований метод.

Таблиця 2

Порівняння безрозмірного параметра критичного навантаження K жорстко закріпленої ізотропної панелі з відомими результатами.

R_1 / b	Жорстке закріплення			
	RFM	МГЕ[2]	МСЕ[2]	МГЕ[3]
5	9.902	10.671	10.453	10.402
7.5	8.906	9.212	9.048	8.985
11.5	8.442	8.541	8.403	8.334
17.5	8.243	8.259	8.131	8.060
27.5	7.966	8.131	8.009	7.963
63	7.885	8.061	7.943	7.868
пластина	7.855	8.044	7.925	7.852
	8.076			

Задача 2. Розглянемо ортотропну пологу оболонку з прямокутним планом. Механічні характеристики матеріалів, для яких проведено дослідження, представлені в табл. 3. Вважаємо, що геометричні параметри оболонки і то-

вщина співпадають з даними першої задачі.

В табл. 4 представлені значення безрозмірного параметра К критичного навантаження, який визначається за формулою:

$$K = \frac{N_{kr} 12(1 - \nu_1 \nu_2) b^2}{\pi^2 E_2 h^3}. \quad (10)$$

Таблиця 3

Механічні характеристики ортотропних матеріалів.

Матеріал	E_1 / E_2	G / E_2	$\nu_1 = \nu_2 E_1 / E_2$
Glass-epoxy	3	0.6	0.25
Boron-epoxy	10	0.33	0.22
Graphite-epoxy	40	0.6	0.25

Треба звернути увагу на те, що оболонки лишаються стійкості по різним формам коливань, що суттєво залежить від способу закріплення, кривизни та особливо від матеріалу. Якщо ізотропні оболонки в основному лишаються стійкості за формою коливань (2,1), дивись табл. 4, то ортотропні оболонки з більшою жорсткістю в напрямку осі Ox (Boron-epoxy та Graphite) лишаються стійкості по першій формі коливань.

Таблиця 4

Значення безрозмірного параметра критичного навантаження К ортотропної панелі з прямокутним планом (рис.).

R_1 / b	Жорстке закріплення			Шарнірне обпирання		
	Glass- Epoxy	Boron- Epoxy	Graph.- Epoxy	Glass- Epoxy	Boron- Epoxy	Graph.-Epoxy
5	16.23	29.46	65.31	9.440	11.05	22.057
7.5	14.83	27.79	61.68	7.976	9.316	19.204
11.5	14.17	26.80	59.85	7.262	8.796	17.881
17.5	13.87	26.39	59.24	7.060	8.469	17.323
27.5	13.75	26.20	58.91	6.940	8.361	17.080
63	13.68	26.10	58.73	6.869	8.288	16.944
пластина	13.67	26.07	58.69	6.845	8.252	16.874
Форма коливань	(2,1)	(1,1)	(1,1)	(2,1)	(1,1)	(1,1)

Для прямокутного плану у разі жорстко закріпленої панелі в табл. 2 наведено значення критичного параметру по формі коливань (2,1) курсивом, а дійсне критичне навантаження є меншим та здійснюється по формі (1,1). В таблиці воно позначено жирним шрифтом.

Висновки. В роботі запропоновано підхід для дослідження стійкості ортотропних пологих оболонок з довільною формою плану, який враховує визначення неоднорідного докритичного стану. Метод базується на теорії R-функцій та варіаційних методах. Алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL. За допомогою створеного програмного забезпечення було проведено тестування та розв'язані нові задачі стійкості ортотропних пологих оболонок під дією статичного навантаження в серединній поверхні. Запропонований метод в подальшому буде розвинено для дослідження стійкості анізотропних та багатошарових оболонок.

Список літератури: **1.** Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition / J.N.Reddy // USA: CRC PRESS, – 2004. – p.834. **2.** P.M.Baiz Buckling analysis of shear deformable shallow shells by boundary element method/P.M. Baiz, M.N.Aliabadi J. Engineering Analysis with Boundary Elements 31(2007)361–372. **3.** (11) P.M.Baiz Linear buckling analysis of shallow shells by boundary domain element method. /P.M. Baiz, M.N.Aliabadi J. Comput Modelling Eng Sci 2006; 13:19–34. **4.** Singha M.K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. // Journal of Sound and Vibration, – 2009, – pp.541–554. **5.** S. K. Sahu Dynamic Stability of Curved Panels with Cutouts / P. K. Datta, S. K. Sahu. // Journal of Sound and Vibration , 2002, **251**(4), – pp. 683-696. **6.** S. K. Sahu Dynamic Stability of Laminated Composite Curved Panels with Cutouts / P. K. Datta, S. K. Sahu // Journal of engineering mechanics - november 2003 – pp. 1245-1253. **7.** Курна Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курна, О.С. Мазур // машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9–15. **8.** Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method. / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P. 179–189. **9.** Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с. **10.** Курна Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек./ Л.В.Курна // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408с. **11.** Курна Л.В. Параметричні коливання багатошарових пластин під дією періодичного навантаження// Курна Л.В., Мазур О.С.,Ткаченко В.В. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях.2011.-№13-С.134–145. **12.** Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.;Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с. **13.** Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448с. **14.** Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат. – 1957. – 464с.

Надійшла до редколегії 27.04.2012

А.І. ЩЕРБА, канд. фіз.-мат. наук, ЧДТУ, Черкаси;
Г.В. КАНАШЕВИЧ, д-р техн. наук, проф., ЧДТУ, Черкаси;
І.В. ДРОБОТ, ст. викл., ЧДТУ, Черкаси

АЛГОРИТМ КЕРУВАННЯ ЯКІСТЮ ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ ОПТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ЕЛЕКТРОННО-ПРОМЕНЕВІЙ МІКРООБРОБЦІ

Побудована математична модель задачі теплопровідності для оптичного матеріалу і рухомого електронного потоку на етапах нагріву та електронно-променевої мікрообробки (ЕПМ) та представлена нова постановка задачі теплопровідності з врахуванням леткості матеріалу розплаву ЕПМ. Розроблений алгоритм керування якістю поверхневого шару оптичних матеріалів ЕПМ.

Построена математическая модель задачи теплопроводности для оптического материала и подвижного электронного потока на этапах нагрева и электронно-лучевой микрообработки (ЭЛМ), представлена новая постановка задачи теплопроводности с учетом летучести материала расплава ЭЛМ. Разработан алгоритм управления качеством поверхностного слоя оптических материалов ЭЛМ.

Is built the mathematical model of heat conduction task for an optical material and the electron stream moving at the stages of heating and electron-radial stream micromachining (ESM) and presented a new formulation of the heat conduction task, taking into account a volatility of fusion material of ESM. An algorithm is made for ruling of the quality of the surface layer of optical materials ESM.

Вступ. Проблема керування якістю поверхневого шару (ПШ) оптичних матеріалів при виготовленні елементів нового покоління для інтегральної оптики і мікрооптики, з високим ступенем інтеграції (200...700 ел/мм² тощо) [1 - 8], на поверхні плати є головною в сучасній техніці і технології обробки. Одним із засобів вирішення цієї проблеми є розробка і застосування новітніх методів мікрообробки та прецизійного високопродуктивного, екологічно чистого інструментарію і технологій, спрямованих на надання ПШ оптичних матеріалів таких властивостей і характеристик, які на теперішній час традиційними методами отримати неможливо. Яскравим прикладом такого інструменту і методу обробки є електронний потік стрічкової форми [9 - 15] та електронно-променевої мікрообробка (ЕПМ) плоских поверхонь у вакуумі [7, 12 - 15].

Проте, якість виробів практично неможливо забезпечити без розробки відповідного алгоритму ЕПМ, багатоетапного моделювання та гнучкого керування процесом з використанням сучасної комп'ютерної техніки. Алгоритм та моделювання ЕПМ дозволяють не тільки скоротити обсяг експериментальних досліджень, а й суттєво знизити витрати на проведення натурних випробувань та візуалізувати сам процес мікрообробки тощо.

Таким чином, метою даної роботи є розробка алгоритму керування якістю поверхневого шару оптичних матеріалів при ЕПМ.

Обладнання і матеріали. Об'єкт обробки. Паралельні пластини з оптичного скла К8, К108, К208, БК10, ТК21 у формі дисків (діаметр 20,0 мм, товщина 2;4; 6; 8 мм) та у формі прямокутників з лінійними розмірами $70 \times 14 \times 6$ мм, з відполірованими поверхнями $R_z = 0,025$ мкм.

Інструмент обробки. Електронно-променева гармата Пірса, що розташована у вакуумній установці УВН74-ПЗ і генерує стрічковий електронний потік питомої потужності $10^1 \text{ Вт/см}^2 \leq P_{\text{ном}} \leq 10^5 \text{ Вт/см}^2$, який може переміщуватися по поверхні виробу зі швидкістю $v_{\text{ном}} = 0 \dots 20$ см/с, b' – ширина стрічки 0,5...3 мм.

Поверхня пластини оплавляється електронним потоком на глибину до 160 мкм (рис. 1 а), а охолодження є кінцевою стадією формування модифікованого ПШ (рис. 1 б). Сформований ПШ відрізняється від основного матеріалу структурою, хімічним складом, оптичними властивостями, мікрогеометрією.

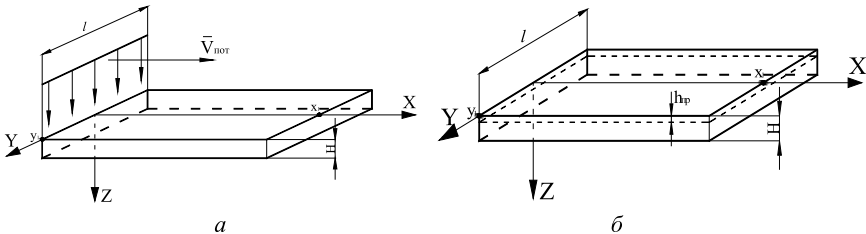


Рисунок 1 – Схема дії стрічкового електронного потоку на плоско-паралельну пластину (а) та розташування модифікованого ПШ (б).

За критерії якості ПШ при мікрообробці вибрані:

- середньостатистичний нанорельєф RZ поверхні;
- середньостатистична глибина h_{np} модифікованого ПШ;
- оптична однорідність ПШ (бездефектність, залишкові термонапруження);
- площинність N , ΔN поверхні пластин;
- залишковий рівень вихідної поверхні Δh .

При цьому, якість мікрообробки визначається станом технологічного середовища, досконалістю інструмента обробки – електронного потоку та точністю і гнучкістю керування процесом.

Постановка задачі та алгоритм ЕПМ. Для моделювання і візуалізації процесу ЕПМ оптичних матеріалів розроблений програмний комплекс, в основу якого покладено математичну модель, що включає рівняння задачі теплопровідності для оптичних матеріалів, та алгоритм ЕПМ.

У табл. 1 наведена загальновідома постановка задач теплопровідності для оптичного матеріалу і рухомого електронного потоку на етапах нагріву

та електронно-променевої мікрообробки у вигляді рівнянь, а на рис. 3 а-г схематично представлені відповідні теплові схеми, які використовуються при ЕПМ.

У табл. 2 представлена нова постановка задачі теплопровідності на етапі ЕПМ з врахуванням леткості матеріалу розплаву, що дозволило зменшити похибку розрахунку до 5...7%. Відповідна теплова схема для нової постановки задачі ЕПМ представлена на рис. 3 д.

Таблиця 1

Загальновідома постановка задач теплопровідності для оптичного матеріалу і рухомого електронного потоку на етапах нагріву та ЕПМ.

Етап термічного циклу	Диференційне рівняння теплопровідності	Крайові умови	Теплова схема [Посилання]
Попередній нагрів (радіаційний)	$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$T _{t=0} = T_0, \quad T \rightarrow T_0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty;$ $-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big _{z=0} = \varepsilon_S \cdot \sigma \cdot (T_S^4 - T_C^4)$ $\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty$	Рис. 3 а [9]
Нагрів поверхні матеріалу рухомих електронним потоком	$C_V \frac{\partial T}{\partial t} =$ $= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) +$ $+ C_V \cdot V_{nom} \frac{\partial T}{\partial x}$	$T _{t=0} = T_1, \quad T \rightarrow T_1, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \rightarrow 0$ при $x, y \rightarrow \pm\infty; t \rightarrow +\infty$	Рис. 3 б [2-4]
Завершальне відповідальне охолодження (радіаційне)	$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$T _{t=0} = \phi(z), \quad T \rightarrow T_0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty;$ $-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big _{z=0} = \varepsilon_S \cdot \sigma \cdot (T_C^4 - T_S^4)$ $\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty$	Рис. 3 в [8]
Завершальне інерційне охолодження		$T _{t=0} = T_4, \quad T \rightarrow T_0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty$ $\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty$	Рис. 3 г [9]

Нова постановка задачі теплопровідності на етапі електронно-променевої мікрообробки з врахуванням леткості матеріалу розплаву.

Етап термічного циклу	Диференційне рівняння теплопровідності	Крайові умови
Нагрів і випаровування з поверхні матеріалу в результаті дії електронного потоку	$C_V \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + C_V \cdot V_{nom} \frac{\partial T}{\partial x}$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big _{z=0} = F_n(x_0 - V_{nom} \cdot t, y, 0, t) - L_n(x, y, 0, t, T_{z=0})$ $\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=x_0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=x_1} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big _{z=z_1} = 0,$ $\frac{\partial T}{\partial y} \Big _{y=y_0} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{y=y_1} = 0, \quad T \Big _{t=0} = T_0$ <p>при $t \rightarrow +\infty$; $x_0 \leq x \leq x_1$; $y_0 \leq y \leq y_1$; $0 \leq z \leq z_1$</p>

Оцінка глибини проплавлення оптичної поверхні проводиться за теплофізичними характеристиками матеріалу, параметрами електронного потоку та рівнем зниження поверхні.

При попередньому нагріві ПШ підвищує свою чутливість до електронного потоку, що виражається у підвищенні електропровідності матеріалу, а низька теплопровідність матеріалу дозволяє накопичувати тепло у ПШ на певну глибину. Енергетика потоку щодо поверхні матеріалу змінюється за гаусовим законом. В розробленій математичній моделі суттєвим є умовний поділ електронної стрічки на три основних складових: фронт, вершину та хвіст потоку (рис. 2).

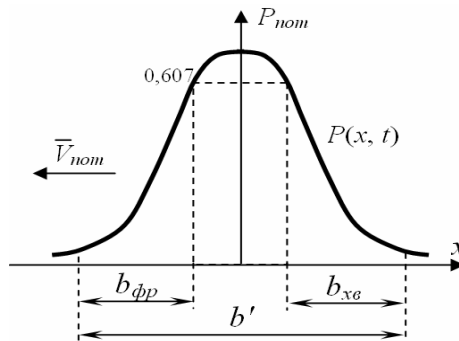


Рисунок 2 – Схема умовного розподілу потужності стрічкового електронного потоку за перерізом: $b_{фр}$ – фронт потоку;

$b_{хв}$ – хвіст потоку, V_{nom} – швидкість потоку, b' – ширина стрічки.

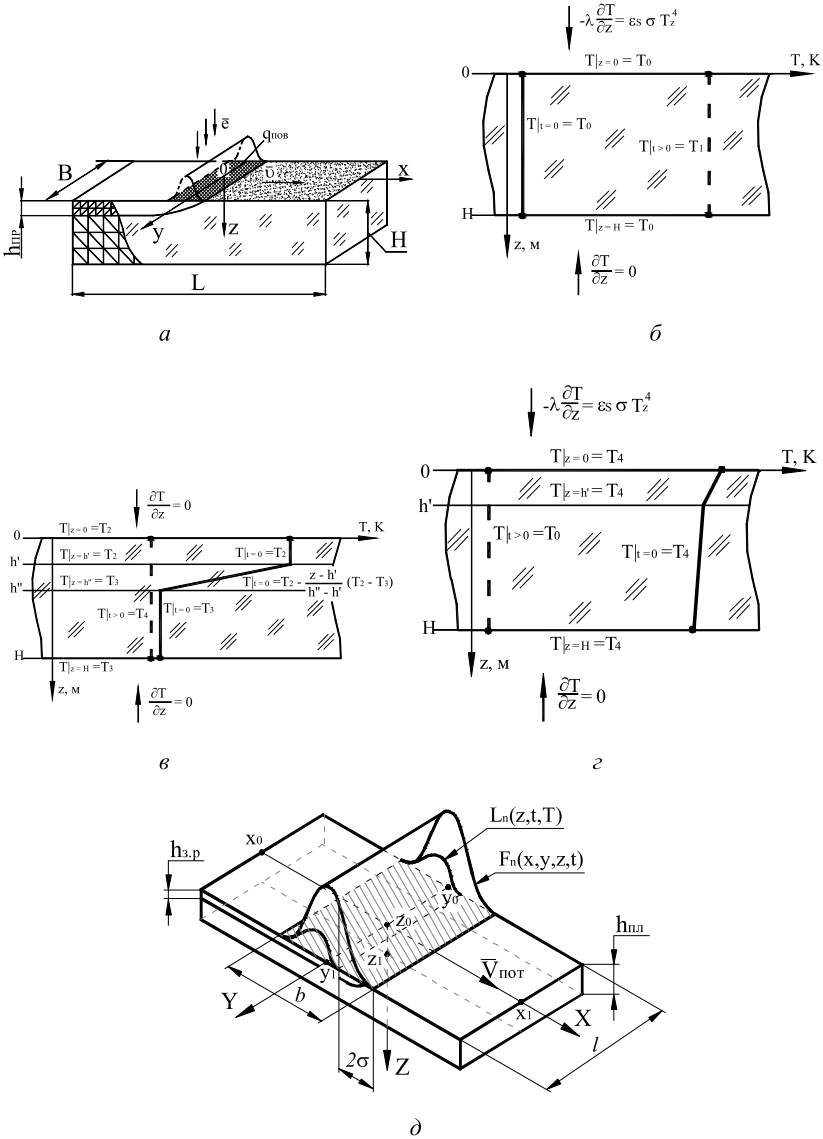


Рисунок 3 – Теплові схеми, які використовуються при ЕПМ:
a – попередній нагрів (радіаційний); *б* – нагрів поверхні матеріалу рухомим електронним потоком; *в* – завершальне відповідальне охолодження (радіаційне);
г – завершальне інерційне охолодження;
д – модель, яка використовується з врахуванням леткості матеріалу розплаву.

Зауважимо, що саме такий підхід до вивчення взаємодії електронного потоку з ПШ запропонований вперше. В розробленій моделі враховано вплив кожної складової потоку, що надало можливість здійснити більш керований процес енергетичного впливу потоку шляхом зміни коефіцієнта зосередженості потоку k_e .

Вважаємо, що вся енергія електронного потоку розподіляється на нагрів, плавлення та випаровування (легкість) матеріалу ПШ на глибину h_{np} . У даному випадку, рівняння теплового балансу має вигляд:

$$Q_{пот} = Q'_{нагр} + Q''_{нагр.плавл} + Q'''_{нагр.вип}$$

де $Q'_{нагр}$ – нагрів до температури 570...850°C, що відповідає твердому і пластичному стану скла з відповідною в'язкістю $\lg \eta_{570} \approx 11 \text{ Пас} \cdot \text{с}$ та $\lg \eta_{850} \approx 4 \text{ Пас} \cdot \text{с}$;

$Q''_{нагр.плавл}$ – нагрів до температур 850...1250°C, що відповідає пластичному стану скла $\lg \eta_{850} \approx 4 \text{ Пас} \cdot \text{с}$ та його рідинному стану $\lg \eta_{1250} \approx 1 \text{ Пас} \cdot \text{с}$;

$Q'''_{нагр.вип}$ – нагрів до температур 850...1250°C, що відповідає інтенсивній легкості матеріалу розплаву і зниженню рівня вихідної поверхні на $h_{зниж}$.

При цьому:

$$Q_{пот} = P_{ном} \cdot t = P_{ном} \cdot l \cdot b_{ном} = P_{ном} \cdot l_{ном} \cdot b_{ном}^2 / V_{ном} = P_{ном} \cdot b_{ном} / V_{ном};$$

$$b_{ном} = b_{\max} + 2b_{фр};$$

$$Q'_{нагр} = V_{ном} \cdot b_{фр} \cdot h_{np} \cdot \rho_1 \cdot c_1 \cdot (850 - 570) \cdot t;$$

$$Q''_{нагр.плавл} = V_{ном} \cdot b_{\max} \cdot h_{np} \cdot \rho_2 \cdot c_2 \cdot (1250 - 850) \cdot t;$$

$$Q'''_{нагр.вип} = V_{ном} \cdot b_{лет} \cdot h_{зниж} \cdot m_3 \cdot \rho_3 \cdot c_3 \cdot (1250 - 850) \cdot t,$$

де $b_{лет} = b_{\max}$; $b_{фр} = b_{\max}$; m_3 – кількість випарованого матеріалу відносно маси розплаву.

Знаходимо взаємозв'язок:

$$P_{ном} = \frac{h_{np} \cdot t \cdot V_{ном}^2 \cdot b_{\max}}{b_{ном}} \cdot \left(\rho_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_1 + \rho_2 \cdot c_2 \cdot \Delta T_2 + \frac{\rho_3 \cdot c_3 \cdot \Delta T_3 \cdot h_{зниж}}{h_{np}} \right).$$

Таким чином, рівняння дозволяє оцінити глибину проплавлення h_{np} за відомими режимами впливу електронного потоку на матеріал: теплофізичними характеристиками матеріалу, k_e – коефіцієнтом зосередженості, залишковим рівнем вихідної поверхні.

Алгоритм задачі ЕПМ. Схему алгоритму керування якістю ПШ оптичних матеріалів при електронно-променевої мікрообробці представлено на рис. 4.

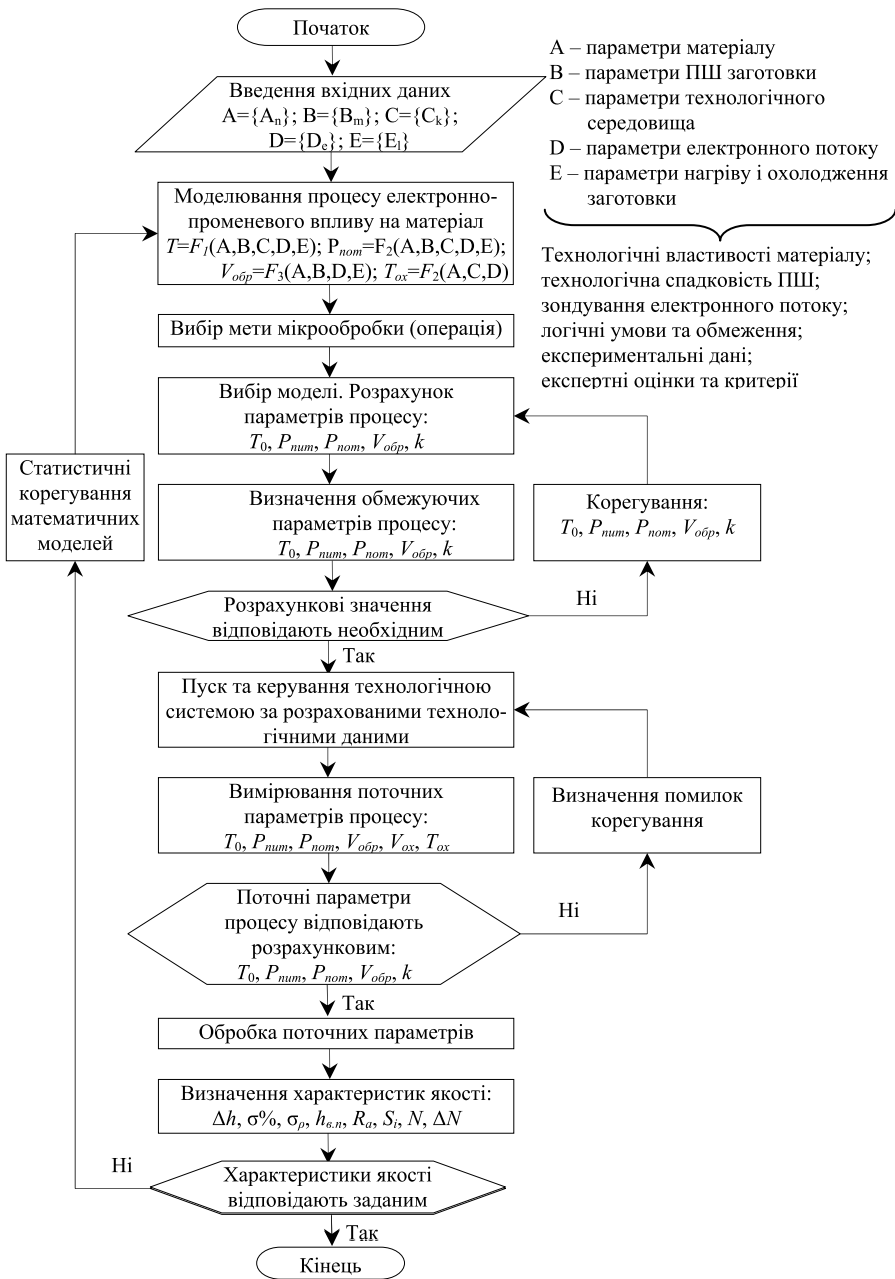


Рисунок 4 – Схема алгоритму керування якістю ПШ електронно-променевою мікрообробкою.

При цьому вибір стану та характеристик ПШ уточнюється технологічними режимами обробки, а саме:

- визначення міцності ПШ до основного матеріалу проводиться через співвідношення $h_{пер} \approx h_{пр}$, яке відповідає високій надійності ПШ при експлуатації ($h_{пер}$, $h_{пр}$ – товщина відповідно перехідного та проплавленого шару);
- визначення рівня зниження поверхні від термічного впливу електронного потоку проводиться через розрахунок кількості випаруваної речовини за ступенем леткості компонентів ПШ;

- визначення очікуваної товщини $h_{пер}$ проводиться з урахуванням швидкості охолодження структури ПШ;

- визначення рівня зниження поверхні від термічного впливу електронного потоку проводиться через розрахунок кількості випаруваної речовини за ступенем леткості компонентів ПШ;

- одержання елементів мікрооптики з необхідними розмірами та ступенем інтеграції обумовлюється технічним рівнем фотолітографії;

- порівняння одержаних якісних показників з існуючими стандартами.

Моделювання ЕПМ. На першому етапі комп'ютерного моделювання ЕПМ використовувався ліцензійний пакет MathCad, за допомогою якого була проведена серія обчислювальних експериментів для виявлення впливу певних параметрів на процес ЕПМ, а також проводилося варіювання технологічними параметрами ЕПМ в межах, що реалізуються на виробництві.

Наступний етап комп'ютерного моделювання ЕПМ виконувався за допомогою розробленого спеціалізованого програмного комплексу (СПК), програмний код якого багато разів тестувався на адекватність експериментальним даним технологічного процесу ЕПМ. Засобом розробки СПК було сервісне середовище програмування Delphi 7.0.

Адекватність результатів, отриманих за допомогою розробленого програмного комплексу, встановлювалася шляхом порівняння з результатами, отриманими в MathCad, та експериментальними даними ЕПМ.

Перспективи подальших досліджень. Розроблений алгоритм керування якістю поверхневого шару може використовуватися при розробці інноваційних технологій створення елементної бази мікрооптики та інтегральної оптики. Галузі застосування: оптична промисловість, волоконно-оптичні лінії зв'язку, приладобудування, медична техніка.

Висновки. Таким чином, розроблений алгоритм керування якістю ПШ при ЕПМ забезпечив наступне.

1. Реалізацію стабільного фізико-технічного процесу електронно-променевої мікрообробки. Досягнуто підвищення якості виробів шляхом оперативного керування і діагностики параметрів обробки, реалізовано весь

необхідний температурний профіль обробки виробу залежно від його теплофізичних характеристик, форми і габаритів, швидкості й напрямку подачі виробу під електронний потік, необхідні технологічні параметри електронного потоку. Даний алгоритм поширюється на інші матеріали спеціального призначення (технічне скло, кварцове скло, оптичну кераміку).

2. Підвищення гнучкості та швидкості переходу від матеріалу до матеріалу при мікрообробці, коли параметрами керування якістю ПШ є температура попереднього нагріву матеріалу T_0 , повна та питома потужність потоку $P_{пот}$, $P_{пит}$, швидкість обробки $V_{пот}$, час $t_{ох}$, швидкість охолодження $V_{ох}$, температурний вплив переднього фронту потоку та його високоінтенсивної частини.

Список літератури: 1. Хаус Х. Волны и поля в оптоэлектронике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 432 с. 2. Интегральная оптика. Под ред. Т. Тамира. – М.: Наука, 1978. – 344 с. 3. Гончаренко А. М., Радько В. П. Введение в интегральную оптику. – Минск: Наука и техника, 1975. – 148 с. 4. Дудко Г. В., Лисоченко В. Н. Проблема формирования особоочистых и бездефектных поверхностей // Материалы краткосрочного семинара. – Ленинград. – 1985. – С. 13-16. 5. Пат. 67516А Україна, МКИ С03С15/00. Спосіб виявлення дефектного приповерхневого шару оптичного скла / Дубровська Г. М., Канашиевич Г. В., Бондаренко М.О; Заявл. 09.10.2003; Опубл. 15.06.2004; Бюл. № 6. 6. Яцевич Н. Н., Шевлик Н. В. Способ изготовления линзовых растров: А.С. 1147699 СССР; Опубл. 30.03.85; Бюл. № 12. 7. Котельников Д. И., Канашиевич Г. В., Дубровская Г. Н. Способ изготовления канальных оптических волноводов: А.С. 1798995 СССР // Б.И. 1991. № 12. 8. Дудко Г.В., Лисоченко В. Н. Проблема формирования особоочистых и бездефектных поверхностей // Материалы краткосрочного семинара. – Ленинград. – 1985. – С. 13-16. 9. Ващенко В. А., Канашиевич Г. В., Краснов Д. М., Дмитренко П. П. Математическое моделирование и расчет глубины оплавления оптических материалов подвижным электронным лучом // Вісник ЧПТ. – № 1. – 2000. 10. Ващенко В. А., Дробот І. В., Канашиевич Г. В. Методика использования математического расчета теплового воздействия электронного луча на оптические материалы // Збірник наукових праць. Інститут проблем моделювання в енергетиці. НАН України. Випуск 11. – Київ: 2001. 11. Ващенко В. А., Дробот І. В., Канашиевич Г. В. Розподіл заданого розподілення теплової дії за допомогою системи стрічкових електронних променів // Радиоэлектроника и информатика. – 2002, № 2 (19). – С. 48-51. 12. Канашиевич Г. В., Котельников Д. И. Электронная обработка оптических материалов // Электронная обработка материалов. – 2002. – № 2. – С. 12-16. 13. Ващенко В. А., Дубровская Г. Н., Поздеев С. В., Канашиевич Г. В. Оптические свойства подложек ОИС из стекла после низкоэнергетической электронно-лучевой обработки // Труды третьего международного симпозиума «Вакуумные технологии и оборудование», т. 1, Харьков, 1999. 14. Канашиевич Г. В. Формирование функциональных слоев и микроэлементов в поверхности стекла электронным потоком // Сборник докладов 5-ой Международной научно-технической конференции «ОТТОМ-5», г. Харьков, 27 сентября – 1 октября, 2004 г. 15. Бондаренко М. О. Підвищення ефективності електронної технології та обладнання для фінішної обробки оптичних пластин під виробу мікрооптики: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.03.07. [Електронний ресурс] / М.О. Бондаренко; НТУУ "КПІ". – К., 2006. – 20 с. – укр. 16. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Надійшла до редколегії 01.04.2012

ЗМІСТ

К 90-летию со дня рождения академика Владимира Александровича Марченко	3
АНДРЕНКО П.М., СВИНАРЕНКО М.С., БЛОШЕНКО Р.Ю. Робочий процес редукційного клапана гальмівної системи літака	11
БАБАЯН А.О. Эффективное решение задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка	17
БАТЛУК, В.А. БЕЛЯВСЬКА, Б.М. БОЧКАЛО Є.Д. Аналіз та моделювання факторів безпеки при використанні мобільного ріжучого інструменту з ротаційною пилою	25
БАТЛУК В.А., ПАРАНЯК Н.М., ОЛЕКСІВ Н.П. Еколого-економічне обґрунтування впровадження пиловловлювачів	33
БЄЛОВ І.С. Про деякі перетворення невід’ємних косинус – многочленів	45
БОРИСЕНКО А.Н., КУБРИК Б.И., СОСИНА Е.В., ЧЕРНАЙ В.Ф. Оптимизация управлений дизель-генератора с турбокомпрессором на базе принципа максимума	49
ВАНИН В.А., ГРИГОРЬЕВ А.А. Результаты математического моделирования винтовых волн трансляции в нелинейных упругих континуумах, вибрирующих синфазно	57
ДАЛЛАКЯН Р.В. О граничных значениях гармонических функций классов U_{α}	73
ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО С. Д. Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на группе	82
КОШОВИЙ А.Г., КОШОВИЙ Г.І. Декартові добутки одновимірних фракталів: фрактальні мережі на площині	86
КУРЦА Л.В., ТИМЧЕНКО Г.Н., БУДНИКОВ Н.А. Вынужденные нелинейные колебания многослойных пологих оболочек несимметрично го строения	92

ЛАМНАУЭР Н.Ю. Модель распределения размеров изделий и её применение для оценки точности обработки	98
ЛЕВТЕРОВ А.М., ЛЕВТЕРОВА Л.И., ГЛАДКОВА Н.Ю., МАРАХОВСКИЙ В.П., АВРАМЕНКО А.Н. Расчетно-экспериментальные исследования характеристик автомобильного двигателя на бензоэтанольных смесях	107
ЛИТВИН О.М. Новий метод розв'язання двоточкових крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь	114
ЛИТВИН О.М. Система сплайнів класу $C^q(R^2)$, які є R -функціями двох змінних	118
ЛИТВИН О.М., АРТЮХ М.В. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі експериментальних даних Коба-Дугласа	124
ЛИТВИН О.О., КУЛИК С.І., ТКАЧЕНКО О.В., МАТВЄЄВА С.Ю., ЧЕРНЯК О.О. Оператори інтерполяції функцій однієї змінної, що збігаються з нею на заданих відрізках області наближення	130
МАКСИМОВ М.В., БРУНЕТКИН А.И., ДОБРОВОЛЬСКАЯ Т.С. Определение собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях сложных форм	134
МАЛИХІНА Т.В., СТЄРВОЄДОВ М.Г. Математичне моделювання проходження електронів через шар речовини як складова частина віртуального лабораторного практикуму з ядерної фізики	144
МИГУЩЕНКО Р.П., КРОПАЧЕК О.Ю., ПЕЧЕРИЦЯ Т.В., МАТЯШ К.В. Аналіз питань компенсації адитивних збурень при діагностиці дизельних агрегатів	154
ОЛЬШАНСКИЙ В.П., ОЛЬШАНСКИЙ С.В. Моделирование продольного удара по стержню с сосредоточенной массой	159
ПЛАКСІЙ К.Ю., МІХЛІН Ю.В. Стійкість нелінійних нормальних форм коливань пружинно-маятникової системи та процес зриву вертикальної форми	167

ПРОХОРЕНКО А.О. Диференціальне рівняння електронного регулятора для дизеля з акумуляторною паливною системою	183
РЕБРОВ А.Ю. Определение расхода топлива двигателем машинно-тракторного агрегата вероятностным методом	190
САХНО Ю.О., САХНО Є.Ю., ТУР Г.І., ШЕВЧЕНКО Я.В. Модель процесу радіальної стабілізації положення колінвала в модернізованій гідроопорі	196
СЕМКО А. Н., ЛОКТЮШИНА Ю.В. О влиянии плотности жидкости на параметры гидропушки	204
СИМСОН Э.А., ПИВОВАРОВ Д.Б., ХАВИН В.Л., НАЗАРЕНКО С.А. Численное моделирование технологического процесса изготовления корпуса поглощающего аппарата	214
ШМАТКО Т.В. Дослідження стійкості ортотропних пологих оболонок зі складною формою плану	222
ЩЕРБА А.І., КАНАШЕВИЧ Г.В., ДРОБОТ І.В. Алгоритм керування якістю поверхневого шару оптичних матеріалів при електронно-променевій мікрообробці	231

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«Харківський політехнічний інститут»**

Тематичний випуск
«Математичне моделювання в техніці та технологіях»
Випуск 27

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін
Технічний редактор: С. Д. Нижник
Відповідальний за випуск: к. т. н. Г. Б. Обухова

Обл. вид. № 75-12

Підп. до друку 07.06.2012 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Хегох WC 275. Умов. друк. арк. 10. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 1695. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, пл. Повстання, 7/8
