

**В.А. КОВАЛЕВ**, д-р техн. наук, доц., НТУУ «КПИ», Киев

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРАХ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Представлены результаты численного моделирования инерционных течений вязкой несжимаемой жидкости в цистернах и танках нефтеналивных судов. Приведены расчетные гидродинамические поля циркуляционных течений в целиком заполненных резервуарах, проведен анализ распределения компонент вектора скорости, давлений и структуры циркуляционных течений в меридиональных плоскостях. Оценивается силовое влияние течений жидкости на стенки резервуаров и устойчивость подвижных объектов с жидкостью.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, циркуляционное течение, гидродинамическое поле, уравнения Навье – Стокса, кориолисово ускорение, устойчивость подвижных резервуаров.

**Введение.** Возрастание в последние десятилетия интенсивности и масштабов грузовых перевозок предъявляет более высокие требования к безопасности транспортирования грузов и надежности управления подвижными объектами. С этой точки зрения особое внимание уделяется перевозкам больших объемов жидких грузов, например, нефтепродуктов, сжиженных газов или других жидкостей, среди которых могут быть вредные для окружающей среды вещества.

Например, во избежание резонансного плескания жидкости в танках нефтеналивного судна в штормовых условиях при подготовке к транспортировке производится их заполнение жидким продуктом до полного объёма и затем «задраивание» танков. Таким образом, удастся избежать существенного проявления возмущений со стороны жидкости и их влияния на устойчивость судна [1]. При транспортировке жидкостей автомобильными и железнодорожными цистернами на криволинейных участках траектории движения также могут возникать неустойчивости из-за инерционных возмущений со стороны

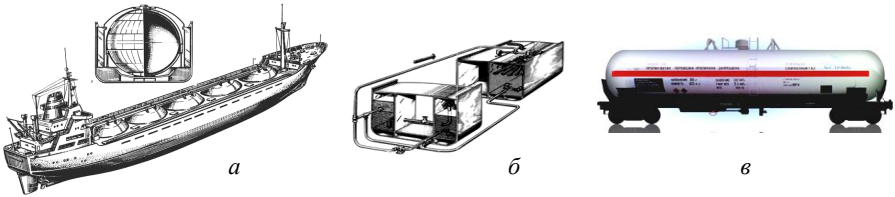


Рис.1 – Внешний вид резервуаров объектов с жидкостью [1, 2]:  
а – сфера; б – параллелепипед; в – цилиндр.

жидкости, что может привести к аварийным ситуациям (рис.1). Поэтому

научные изыскания в этой области, основанные на теоретических и экспериментальных исследованиях, представляются весьма актуальными.

Экспериментальные исследования течений в ограниченных объемах связаны с разработкой и созданием специальных гидродинамических стендов, позволяющих моделировать в лабораторных условиях те или иные виды течений, а также созданием соответствующей измерительной и регистрирующей аппаратуры для фиксации параметров течений. Кроме того, при физическом моделировании течений с помощью стендов необходимо строгое соответствие основным критериям подобия, позволяющим распространить результаты моделирования на реальные условия и габариты подвижных объектов.

В последние десятилетия, в связи существенным возрастанием вычислительных возможностей компьютерной техники и многочисленными теоретическими исследованиями течений в ограниченных объемах стали популярными и эффективными методы численного моделирования на основе уравнений движения жидкости с соответствующими граничными и начальными условиями. Численное интегрирование уравнений с помощью методов конечных разностей, объемов и конечных элементов позволяет получить приближенные решения полных уравнений движения жидкости с достаточно высокой точностью, сопоставить результаты расчетов с существующими экспериментальными данными и сделать вывод о корректности той или иной математической модели течений.

**Постановка задачи численного моделирования течений в резервуарах.** В лаборатории гидродинамики Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» проводился комплекс экспериментальных исследований поведения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченных объемах с помощью специально разработанных экспериментальных стендов, измерительной и регистрирующей аппаратуры [3, 4]. Полученные экспериментальные результаты послужили основой для разработки математических моделей течений и позволили достаточно корректно сформулировать задачи, установить граничные и начальные условия.

В качестве базовых были приняты *полные уравнения Навье-Стокса* течения вязкой несжимаемой жидкости, выражающих воздействие основных гидродинамических факторов – конвективных ускорений, сил Кориолиса, центробежных сил инерции и градиентов давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

а также уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – соответственно окружная, радиальная и меридиональная компоненты вектора скорости;  $p$  – давление в течении;  $Re$  – центробежное число Рейнольдса,  $Re = \Omega \cdot r^2 / \nu$ ,  $\Omega$  – угловая скорость сосуда;  $r$  – расстояние до оси вращения;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Для решения уравнений (1) и (2) в терминах компонент вектора скорости и давления широко применяется метод переменных направлений, а для уравнений в терминах функции тока и завихренности – метод последовательной релаксации. В указанном методе градиенты течения в вертикальном направлении аппроксимируются и корректируются итерациями по времени.

Итерационная процедура по времени позволяет избежать взаимного влияния узлов расчетной сетки в поперечном направлении, уменьшающих в свою очередь область вычислений, и снизить время вычислений. Для всех пространственных переменных во внутренней области можно применить центральные разности, а производные по времени можно аппроксимировать односторонними разностями второго порядка на трех уровнях.

Согласно условиям имитационного моделирования с помощью метода конечных элементов производилось построение области моделирования, которая разбивалась на сетку с соответствующим количеством узлов [3]. Уравнения движения жидкости дополнялись соответствующими начальными и граничными условиями, известными гипотезами и допущениями

Например, пусть круглый цилиндрический сосуд, целиком заполненный несжимаемой жидкостью, вплоть до момента времени  $t \leq 0$  вращается как сплошное твердое тело вокруг своей вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . При рассмотрении течения в системе координат, жестко связанной с оболочкой, все компоненты вектора скорости  $u$ ,  $v$  и  $w$ , а также градиент давления равны нулю. То есть, начальные условия задачи представляются в виде:

$$\text{при} \quad t \leq 0, \quad v = w = 0, \quad u = \Omega_0 \cdot R. \quad (3)$$

При  $t > 0$  оболочка внезапно останавливается, тогда как жидкость в резервуаре продолжает двигаться под действием сил инерции. В результате возникает инерционное азимутальное течение относительно стенок сосуда, которое сопровождается образованием меридиональных циркуляций. При этом из условий прилипания жидкости к стенкам сосуда все составляющие скорости на стенках равны нулю:

$$\text{при} \quad R = R_0, \quad u = v = w = 0, \quad (4)$$

а в предположении об осевой симметрии течения все скорости на оси сосуда также равны нулю:

при  $R = 0$ ,  $u = v = w = 0$ .

Для численного решения уравнений движения использовались стандартные пакеты прикладных программ [3, 4], позволяющие моделировать основные нелинейные особенности распределения гидродинамических параметров в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $Re=700\dots12500$ .

**Анализ результатов численного моделирования течений в резервуарах подвижных объектов.** Одной из важных особенностей численного моделирования с помощью прикладных программ является достаточно широкий круг задач, неограниченные размеры области компьютерных вычислений и широкий диапазон изменения критериальных параметров. Это позволяет получить результаты для натуральных объектов с жидкостью и исключить многие критериальные оценки гидродинамических особенностей замкнутых течений.

На рис.2 приведены результаты расчета поля давлений в танках с прямоугольным меридиональным сечением при бортовой качке нефтеналивного судна для различных чисел Рейнольдса.

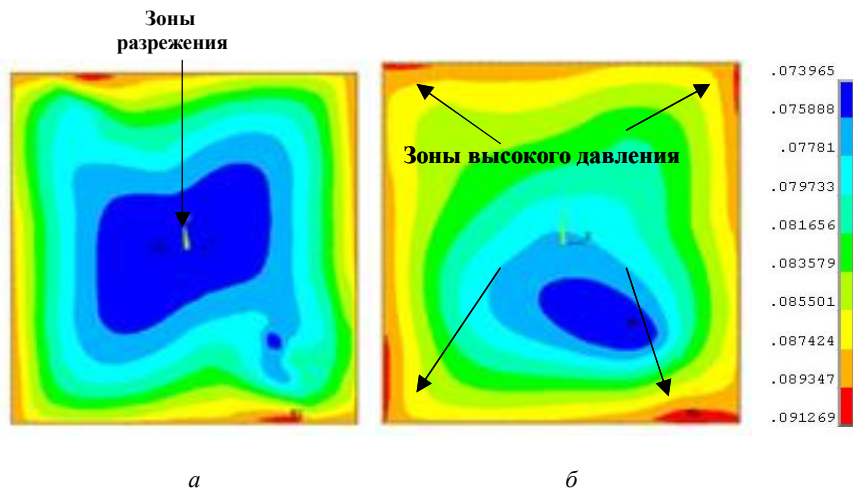


Рис.2 – Контурные распределения давления в меридиональной плоскости в танках при бортовой качке судна-танкера:  
 $a - Re=1250$ ;  $б - Re=1520$ .

При малых числах Рейнольдса  $Re=1100$ , что соответствует угловым скоростям  $\Omega=0,09$  1/с, характерным для подобных ситуаций, имеет место почти симметричное распределение давления, однако, уже при  $Re=1520$  наблюдается смещение центра циркуляции к стенкам сосуда.

Для количественного определения круговых возмущающих моментов целесообразно построение поля меридиональной скорости и установление структуры циркуляций, примеры которых приведены на рис.3.

Как видно из рисунка, в меридиональном сечении возникает устойчивая одно - циркуляционная структура, являющаяся базовой для формирования кругового возмущающего момента. При этом около вершин квадрата возникают устойчивые циркуляционные области, направление течения в которых противоположно течению в центре сосуда.

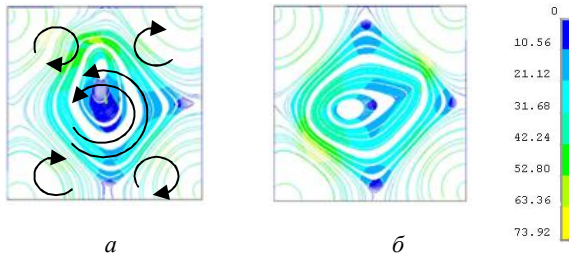


Рис. 3 – Траектории жидких частиц и контурное изображение поля скорости в меридиональном сечении танка:  
*a* -  $Re=1100$ ; *б* -  $Re=1250$ .

Поскольку указанные циркуляции имеют преобладающую площадь контакта со стенками сосуда (до 90%) по сравнению с базовой циркуляцией в центре резервуара, именно они характеризуют величину возмущающего кругового момента и зависимость ее от времени течения. При возрастании безразмерного времени инерционного течения  $T=\Omega \cdot t=5,67 \dots 11,2$  влияние пристеночных областей распространяется на базовую циркуляцию, уменьшая соответственно занимаемое ею пространство и увеличивая суммарное возмущающее влияние на стенки резервуара. Как и в сосудах цилиндрической и сферической конфигурации, эволюция циркуляций в пространстве танка хорошо прогнозируема и представляет собой экспоненциальное уменьшение скорости, и, следовательно, возмущающих круговых моментов воздействия жидкости на стенки.

При рассмотрении задачи об инерционном круговом течении жидкости в автомобильной цистерне, пример которой приведен на рис. 4, имеют место следующие граничные и начальные условия. Ось вращения находится за пределами сосуда, имитируя радиус кривизны траектории движения автомобиля, например, при повороте дороги. Учитывая среднюю скорость движения автомобиля (50...80 км/час) и диапазон радиусов кривизны дороги ( $R=300 \dots 800$  м), можно составить критериальные зависимости, позволяющие определить условия имитационного моделирования движения.

Как видно из рисунка, около стенок, расположенных ближе к оси вращения,

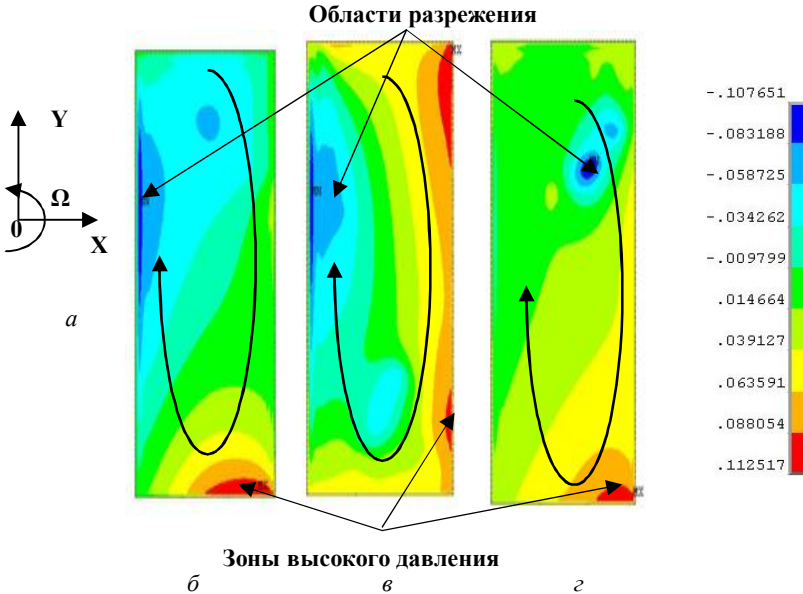


Рис.4 – Система координат и контурное изображение поля давления при круговом течении в автомобильной цистерне:

*a* – система координат; *б* –  $Re=950$ ; *в* –  $Re=1120$ ; *г* –  $Re=1230$ .

наблюдаются области разрежения, свидетельствующие о влиянии центробежных сил инерции, пропорциональных радиусу кривизны траектории и продольной компоненте вектора скорости. В задней (на рисунке – нижней) торцевой области сосуда возникают зоны повышенного давления типа приливных течений, инициирующие появление продольной циркуляции (рис.4 *в*) в горизонтальной плоскости сосуда. Однако, на устойчивость объекта эта структура заметного влияния не оказывает, тогда как циркуляции в меридиональном сечении сосуда могут существенно влиять на устойчивость движения цистерны.

В периферийной области сосуда наблюдается увеличение давления (правая область на рис.4 *б*) и меньшие по величине меридиональные скорости  $w$ . Однако, круговые моменты вязкого трения жидкости о стенки сосуда представляются весьма малыми и их влиянием на характер движения подвижного объекта можно пренебречь. Учитывая то обстоятельство, что максимальная скорость движения автомобиля-цистерны ограничивается диапазоном 50...60 км/час, возмущающие круговые моменты составляют не более

$$M_{кр} = 2...4,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

и могут компенсироваться упругими опорами в виде усиленной ходовой части автомобиля.

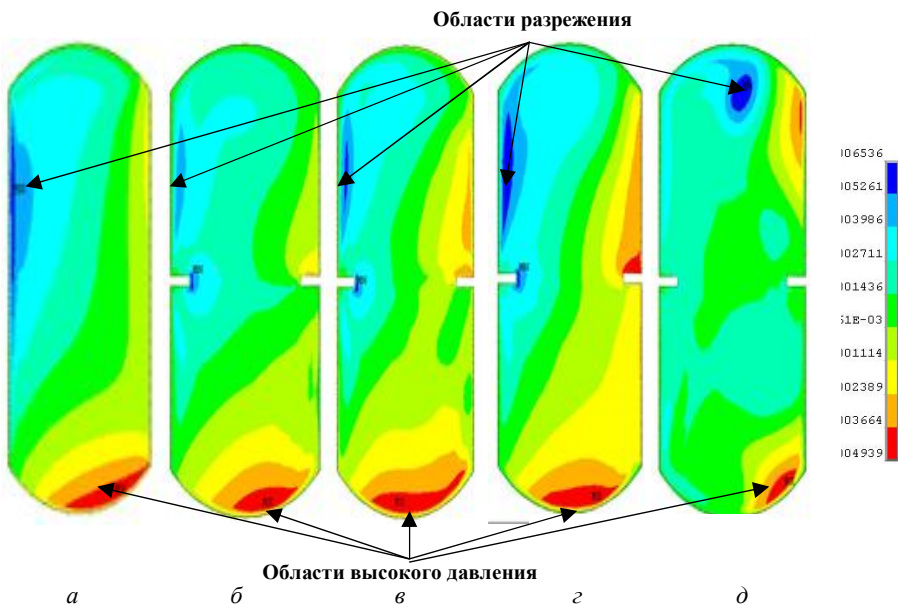


Рис.5. Поля давления в железнодорожной цистерне при движении по криволинейной траектории при  $Re_0 = 2580$  при различных  $T$ :  $a$  – без перегородок;  $a, б - T=0,42$ ;  $в - 2,73$ ;  $г - 7,12$ ;  $д - 17,6$ .

Для задачи о круговом течении жидкости в полости железнодорожной цистерны, объем которой может составлять до  $50 \text{ м}^3$ , и скорости движения состава до  $120 \text{ км/час}$ , величины возмущающих круговых моментов существенно возрастают и могут составлять до  $500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Поскольку при движении железнодорожной цистерны в составе поезда радиус кривизны траектории достаточно велик (порядка  $1...3 \text{ км}$ ), то при моделировании возмущающих воздействий со стороны жидкости угловые скорости объекта на криволинейной траектории представляются весьма малыми ( $\Omega_0 = 0,001...0,01 \text{ 1/с}$ ). При этом диапазон чисел Рейнольдса составляет  $Re = 2500...15000$ , который можно промоделировать с помощью уравнений движения с соответствующими граничными и начальными условиями, выраженными равенствами (1) – (4).

Результаты расчета течений при движении железнодорожной цистерны по криволинейной траектории приведены на рис.5. Как видно из рисунка, области разрежения в графических зависимостях давления позволяют установить координаты центров циркуляций и способствуют прогнозированию развития вторичного течения и его влияние на поле скоростей во всем пространстве резервуара. Кроме того, эти области существенно влияют на особенности построения поля скоростей основного потока  $u$  и вторичных течений: радиальной  $v$  и меридиональной  $w$  компонент вектора скорости жидкости.

**Выводы.** Результаты имитационного моделирования течений в подвижных объектах, содержащих емкости с жидкостью, позволяют сделать вывод о геометрическом их подобии и возможности применения *критериальных зависимостей Рейнольдса, Россби, Струхаля, Эйлера и Ньютона*. Это позволяет использовать для расчетов гидродинамических полей течений и определения основных силовых воздействий жидкости на стенки резервуаров математические модели с учетом начальных и граничных условий, специальных гипотез и допущений.

Представленные численные результаты являются одним из примеров количественного определения возмущений со стороны жидкости, что позволяет организовать компенсационные мероприятия в виде внутренних перегородок или демпфирующих элементов для обеспечения устойчивости и надежности движения объекта с жидкостью. Указанные результаты можно распространить на другие диапазоны скоростей движения, геометрические параметры объекта и объемы жидкости.

**Список литературы:** 1. Сайт о морских судах. Как устроены морские суда. Наливные суда (танкеры) / [Электр. ресурс] / Режим доступа к журналу: <http://www.seaships.ru/>. 2. Богомаз Г.И. Динамика железнодорожных вагонов-цистерн. – К.: Наукова Думка. – 2004. – 224 с. 3. Ковалев В.А., Кришук Н.Г. Структура циркуляционных течений в ограниченных объемах при инерционном вращении жидкости // Гідравліка і гідротехніка. – 2010. – Вип. 64. – С. 29-36. 4. Ковалев В.А., Кришук Н.Г., Конохов А.С. Численное моделирование течений жидкости в емкостях с перегородками // Вестник НТУУ «Киевский политехнический институт», Машиностроение.– 2010. – Вып.59. – С.51 – 55. 5. *Xinjun C.* A Numerical Study of the Recirculation Zones During Spin-Up and Spin-Down for Confined Rotating Flows // Journal of Theoretical and Computation in Fluid Dynamics. – 2003. – vol.1. – P.31-49.

*Поступила в редколлегию 15.10.2012*

---

УДК 532.53

**Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в резервуарах подвижных объектов / А. В. Ковалёв // Вісник НТУ «ХП». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях».**–Харків: НТУ «ХП».– 2012.– №54(960). –С.99-106. – Бібліогр.: 5 назв.

Представлено результати чисельного моделювання інерційних течій в'язкої нестисливої рідини в цистернах і танках нафтоналивних суден. Наведено розрахункові гідродинамічні поля циркуляційних течій у цілком заповнених посудинах, проведено аналіз розподілу компонент вектора швидкості, тиску і структури циркуляційних течій у меридіональних площинах. Оцінюються силові впливи течій рідини на стінки резервуарів та стійкість рухомих об'єктів з рідиною.

**Ключові слова:** в'язка рідина, циркуляційна течія, гідродинамічне поле, рівняння Нав'є – Стокса, кориолисово прискорення, стійкість рухомих резервуарів.

The numerical simulations results of inertial viscous incompressible fluid flows in tank cars and tanks of oil tankers. The calculated hydrodynamic fields OF the flow circulations in a fully filled vessels, the analysis of the velocity vector components distributions, pressure and structure of the circulations in the meridional planes of the tanks. We estimate the impact force of fluid flows in the tank wall and the stability of moving objects with fluid.

**Key words:** viscous liquid, circulating flow, hydrodynamic field, Navies – Stokes Carioles acceleration, stability moving tanks.