

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
Л.С. ЛОБАНОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц., УПА, Харків;
Г.А. МІРОШНИЧЕНКО, асистент, УПА, Харків

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ШЛЯХОМ МІНІМІЗАЦІЇ ПОХИБКИ ПРАВИХ ЧАСТИН В НОРМІ $L_2[0,1]$

Запропоновано новий метод знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок подається у вигляді лінійної комбінації елементів деякої системи лінійно-незалежних функцій. Невідомі сталі розкладу знаходяться з умови найкращого наближення правих частин диференціальних рівнянь системи і (можливо) їх похідних за допомогою вказаної системи лінійно – незалежних функцій. Наведено приклади.

Ключові слова: диференціальне рівняння, задача Коші, наближений розв'язок, мінімізація похибки.

Вступ. Аналіз відомих методів розв'язання задачі Коші та початково - крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними дозволяє виділити наступні методи:

- класичні методи [1], де наближений розв'язок задачі отримується у вигляді скінченних або нескінченних сум відомих функцій (ортогональних поліномів, тригонометричних функцій, спеціальних функцій тощо), або у вигляді сингулярних інтегралів тощо;
- метод скінченних різниць[2], де наближений розв'язок задачі отримується у вигляді таблиці значень у заданій системі точок області інтегрування;
- оптимальний метод скінченних елементів (ОМСЕ) [3-8], у якому координатні функції не задаються заздалегідь, а знаходяться як невідомі сталі в МСЕ – методом мінімізації функціоналу енергії, що відповідає поставленій крайовій задачі.

Вказані методи дозволяють знайти наближені розв'язки, що у все більшій мірі залежні від оператора крайовій задачі і правої частини, причому метод ДР або метод інтегральних співвідношень А.О. Дородніцина можуть бути отримані як частинні випадки методу ЛІДР, метод ОМСЕ може розглядатися, як частинний випадок методу НІДР.

В роботі [9] запропоновано метод наближеного розв'язання двоточкової крайової задачі для лінійного звичайного диференціального рівняння, згідно з яким наближений розв'язок шукається у вигляді лінійної комбінації системи лінійно – незалежних функцій, а невідомі сталі знаходяться з умови найкращого наближення правої частини рівняння лінійною комбінацією функцій, що

отримуються застосуванням диференціального оператора крайової задачі до наближеного розв'язку.

Згідно з відомим правилом обчислювальної математики, *наближуючий оператор, що враховує більше властивостей наближуваної функції, може мати кращі апроксимативні характеристики.* Це правило використовується, зокрема, при побудові алгоритмів без насичення [10,11], при інтегруванні функцій з особливостями [12], у адаптивних системах методу скінченних елементів [13,14] (дивись також у роботі [15]), де базисні функції задаються, а вузли елементів згущуються навколо точок з особливостями за деяким законом тощо.

Постановка задачі. Задача полягає у розробці та дослідженні методу знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A\bar{y} + f(x), \quad (1)$$

$$\bar{y}(0) = 0, \quad (2)$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

у вигляді точного розв'язку задачі Коші (1)-(2) для правих частин, які є наближенням до правої частини системи (1) і залежать від довільних сталих. Пропонується метод знаходження вказаних довільних сталих.

Основні твердження роботи. Пропонується метод розв'язання задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь (1)-(2), який складається з наступних кроків:

– вибір системи лінійно-незалежних функцій $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$, які задовольняють умову

$$\psi_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (3)$$

– знаходження невідомого розв'язку задачі (1)-(2) у вигляді

$$y_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_{\ell}(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де невідомі сталі

$$C_{i,\ell}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \ell = \overline{1, N}$$

знаходимо з умови найкращого наближення правих частин $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ ди-

ференціальних рівнянь системи (1) виразами

$$\sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_{\ell}(x)}{dx} - \psi_{\ell}(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right)$$

в нормі простору $L_2[0,1]$:

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \|u\|_2 = \left(\int_0^1 u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

або простору $W_2^1[0,1]$:

$$W_2^1[0,1] = \left\{ u(x) : \sum_{s=0}^1 \|u^{(s)}\|_2^2 < \infty \right\}.$$

У випадку системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь вказана умова набуває вигляду

$$J_r(C) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \left(f_i^{(s)}(x) - \sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_{\ell}}{dx} - \psi_{\ell}(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right)^{(s)} \right)^2 dx \rightarrow \min_C, \quad (5)$$

$$r = 0, 1.$$

При $r = 0$ – отримуємо умову у просторі $L_2[0,1]$, а при $r = 1$ умова формулюється у просторі $W_2^1[0,1]$.

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції багатьох змінних, для визначення коефіцієнтів $C_{k,\ell}$ ($k = \overline{1, n}$; $\ell = \overline{1, N}$) розкладу наближеного розв'язку по системі функцій $\psi_{\ell}(x)$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial J(C)}{\partial C_{j,p}} = 2 \int_0^1 \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{s=0}^r \left(f_i^{(s)}(x) - \sum_{l=1}^N \left(C_{i,l} \frac{d\psi_{\ell}(x)}{dx} - \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l} \right)^{(s)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(-\psi_p^{(s+1)}(x) \cdot \delta_{i,j} + a_{ij} \psi_p^{(s)}(x) \right) dx = 0, \quad j = \overline{1, n}, p = \overline{1, N}, \right.$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \sum_{l=1}^N \left(C_{i,l} \psi_l^{(s+1)}(x) - \psi_l^{(s)}(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l} \right) \cdot \left(-\psi_p^{(s+1)}(x) \delta_{i,j} + a_{i,j} \psi_p^{(s)}(x) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r f_i^{(s)} \left(-\psi_p^{(s+1)}(x) \delta_{i,j} + a_{i,j} \psi_p^{(s)}(x) \right) dx, \quad j = \overline{1, n}; p = \overline{1, N}; r = 0, 1. \quad (6)$$

Так, наприклад, для випадку системи, що складається з одного, двох або трьох диференціальних рівнянь, система (6) набуває наступного вигляду, якщо розглядати задачу у просторі $L_2[0,1]$:

- при $n = 1$ (одне диференціальне рівняння) –

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left(\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right) \left(\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right) dx = \\ & = \int_0^1 f_1(x) \left(\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right) dx, \quad p = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

- при $n = 2$ (система двох диференціальних рівнянь) –

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right] \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - a_{21}^2 \psi_\ell(x) \psi_p(x) \right\} dx + \\ & + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ a_{12}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right] + a_{21} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_\ell(x) \right] \psi_p(x) \right\} dx = \\ & = \int_0^1 \left\{ f_1(x) \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] + a_{21}f_2(x)\psi_p(x) \right\} dx, \quad p = \overline{1, N}; \\ & \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ a_{12} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right] \psi_q(x) + a_{21}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx + \\ & + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}^2 \psi_l(x) \psi_q(x) + \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_\ell(x) \right] \left[-\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx = \\ & = \int_0^1 \left\{ a_{12}f_1(x)\psi_q(x) + f_2(x) \left[-\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx, \quad q = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

- при $n = 3$ (система трьох диференціальних рівнянь) –

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_\ell(x) \right] \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\ & \quad \left. - a_{21}^2 \psi_l(x) \psi_p(x) - a_{31}^2 \psi_l(x) \psi_p(x) \right\} dx + \\ & \quad + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ a_{12}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{21} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_\ell(x) \right] \psi_p(x) - a_{31} \cdot a_{32}\psi_l(x)\psi_p(x) \Big\} dx + \\
& \quad + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ a_{13}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\
& \quad \left. - a_{21}a_{23}\psi_l(x)\psi_p(x) + a_{31} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{33}\psi_\ell(x) \right] \psi_p(x) \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ f_1(x) \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] + a_{21}f_2(x)\psi_p(x) + a_{31}f_3(x)\psi_p(x) \right\} dx, \\
& \qquad \qquad \qquad p = \overline{1, N}; \\
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ a_{12} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \psi_q(x) + a_{21}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] - \right. \\
& \quad \left. - a_{31}a_{32}\psi_l(x)\psi_q(x) \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}^2\psi_l(x)\psi_q(x) - \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_l(x) \right] \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] - \right. \\
& \quad \left. - a_{32}^2\psi_l(x)\psi_q(x) \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}a_{13}\psi_l(x)\psi_q(x) + a_{23}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] + \right. \\
& \quad \left. + a_{32} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{33}\psi_l(x) \right] \psi_q(x) \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ a_{12}f_1(x)\psi_q(x) + f_2(x) \left[-\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] + a_{32}f_3(x)\psi_q(x) \right\} dx, \\
& \qquad \qquad \qquad q = \overline{1, N}; \\
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ a_{13} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \psi_r(x) - a_{21}a_{23}\psi_l(x)\psi_r(x) + \right. \\
& \quad \left. + a_{31}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_r(x)}{dx} - a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}a_{13}\psi_l(x)\psi_r(x) + a_{23} \left[\frac{d\psi_l(x)}{dt} - a_{22}\psi_l(x) \right] \psi_r(x) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{32}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_r(x)}{dx} - a_{33}\psi_r(x) \right] \Big\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{13}^2 \psi_l(x) \psi_r(x) - a_{23}^2 \psi_l(x) \psi_r(x) - \right. \\
& \left. - \left[\frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{33}\psi_l(x) \right] \left[\frac{d\psi_r(x)}{dx} - a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ a_{13}f_1(x)\psi_r(x) + a_{23}f_2(x)\psi_r(x) + f_3(x) \left[-\frac{d\psi_r(x)}{dx} + a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx, \\
& \qquad \qquad \qquad r = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Теорема. *Наближений розв'язок $y_{i,N}(x)$, $i = \overline{1, n}$ має наступні властивості:*

- а) точно задовольняє початковій умові (2) задачі Коші;*
- б) точно задовольняє системі диференціальних рівнянь*

$$\frac{dy_{i,N}(x)}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} y_{k,N}(x) + f_{i,N}(x), i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де

$$f_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell}{dx} - \psi_\ell \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right), i = \overline{1, n} \quad (8)$$

і сталі $C_{k,\ell}$ ($k = \overline{1, n}$, $\ell = \overline{1, N}$) знаходяться з умови (5) при $r = 0$ або $r = 1$.

Доведення. Кожний доданок у формулі (4) задовольняє умові (2), тому всі функції, що визначаються рівністю (4), теж задовольняють умові (2), тобто твердження а) теореми справджується.

Справедливість твердження б) перевіряється безпосередньою підстановкою виразів (4) для функцій $y_{i,N}(x)$ ($i = \overline{1, n}$) у рівність (7) і врахуванням рівностей (8):

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \sum_{l=1}^N C_{i,l} \psi_l(x) + \sum_{l=1}^N \left(C_{i,l} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \psi_l(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l} \right); \\
\sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} &= \sum_{\ell=1}^N \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{i,\ell} + \sum_{l=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \sum_{l=1}^N \psi_l(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l}; \\
\sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} &= \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Наведена теорема свідчить, що пропонується точний розв'язок задачі (1) – (2) наближати точними розв'язками системи (7) при нульовій початковій умові.

Отже, розв'язання початкової задачі (1) – (2) в запропонованому методі зведено до мінімізації похибки наближення правих частин $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ або правих частин та їх похідних за допомогою функцій

$$f_{i,N} = \sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_{\ell}(x)}{dx} - \psi_{\ell} \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином, похибка наближення $|y_i(x) - y_{i,N}|$ ($i = \overline{1, n}$) повністю визначається похибкою наближення $|f_i(x) - f_{i,N}|$ ($i = \overline{1, n}$) або похибками наближень

$$|f_i(x) - f_{i,N}|, \quad \left| \frac{df_i(x)}{dx} - \frac{df_{i,N}(x)}{dx} \right| \quad (i = \overline{1, n}).$$

Аналіз прикладів. Наведемо чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь, в тому числі і одного диференціального рівняння. Зазначимо, що в усіх наведених прикладах невідомі сталі знаходилися з умови найкращого наближення правих частин диференціальних рівнянь системи в нормі простору $L_2[0, 1]$.

Наближений розв'язок знаходився на відрізку $[0, 1]$.

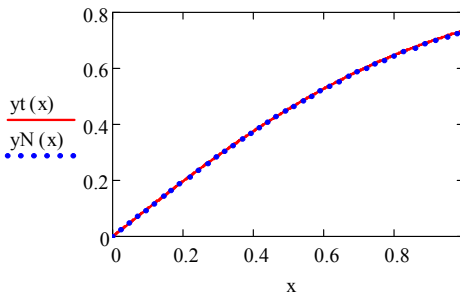


Рис. 1 – Графічні зображення точного $y(x)$ і наближеного $yN(x)$ розв'язків.

Приклад 1. Знайдемо наближений розв'язок запропонованим методом задачі

$$y' + y = e^{-x} (2x + 1), \quad (9)$$

$$y(0) = 1, \quad (10)$$

точний розв'язок якої має вигляд

$$y(x) = (x^2 + x)e^{-x},$$

використовуючи систему функцій

$$\psi_k(x) = x^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Наближений розв'язок знаходили у вигляді

$$y_N(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{\ell} \psi_{\ell}(x).$$

Сталі розкладу C_ℓ , $\ell = \overline{1, N}$ визначались з умови найкращого наближення правої частини рівняння (9):

$$J(C) = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{\ell=1}^N C_\ell \left(\frac{d\psi_\ell}{dx} + \psi_\ell(x) \right) \right)^2 dx \rightarrow \min_C.$$

Чисельні розрахунки показали, що при $N = 8$ похибка наближення розв'язку задачі (9) – (10) склала $\varepsilon = 1,560 \cdot 10^{-8}$.

Порівняння точного і наближеного розв'язків задачі (9)-(10) подано на рис.1.

Приклад 2. Запропонованим методом знаходився наближений розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 6 \cos 2x - 6 \sin 2x + 6 \sin 3x, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 4 \sin 3x - 9 \sin 2x - 6 \cos 3x, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$y_1(x) = 3 \sin 2x, \quad y_2(x) = -2 \sin 3x.$$

Для побудови наближеного розв'язку використовувалась система функцій $\psi_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, \dots, N$.

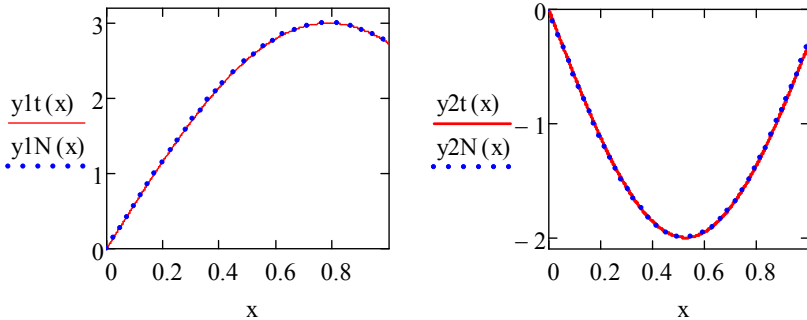


Рис. 2 – Графічний вигляд точного $y_{1t}(x), y_{2t}(x)$ і наближеного $y_{1N}(x), y_{2N}(x)$ розв'язків.

З точністю до 10^{-12} розв'язок, отриманий запропонованим методом при $N = 3$, співпадає з точним розв'язком.

Для порівняння відмітимо, що максимальне відхилення наближеного розв'язку, отриманого за методом Рунге – Кутта четвертого порядку з кроком $h = 0,01$, від точного розв'язку склало відповідно

$$\varepsilon_1 = 4,238 \cdot 10^{-7} \text{ для } y_1(x) \quad \text{і} \quad \varepsilon_2 = 4,239 \cdot 10^{-7} \text{ для } y_2(x).$$

Рис.2 ілюструє якість наближення розв'язку розглядуваної задачі; точні

значення шуканих функцій і їх наближені значення, знайдені запропонованим методом, в масштабі цього рисунку співпали.

Приклад 3. В цьому прикладі запропонованим методом розв'язувалась задача

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 + \sqrt{1+x^2} \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - \sqrt{1+x^2} \end{cases}, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

Використовувалась система функцій $\psi_k(x) = x^k, k = 1, 2, \dots, N$. Похибка наближення при $N = 8$ правої частини першого рівняння системи склала $\varepsilon_1 = 1,434 \cdot 10^{-4}$; для другого рівняння вона склала $\varepsilon_2 = 7,056 \cdot 10^{-6}$.

Максимальне відхилення наближеного розв'язку ($N = 8$) від розв'язку, отриманого за методом Рунге – Кутта з кроком $h = 0,01$, склало відповідно

$$2,229 \cdot 10^{-6} \text{ для } y_1(x) \text{ і } 2,377 \cdot 10^{-8} \text{ для } y_2(x).$$

Рис.3 ілюструє якість наближення правих частин диференціальних рівнянь розглядуваної системи.

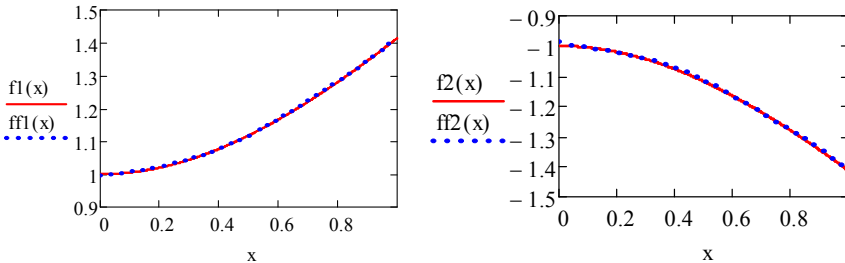


Рис. 3 – Графічне зображення правих частин ($f_1(x), f_2(x)$) рівнянь системи і їх наближення ($ff_1(x), ff_2(x)$).

Перспективи подальших досліджень. В подальшому автори планують узагальнити запропонований метод на випадок розв'язання системи диференціальних рівнянь з управлінням.

Висновки. Запропоновано метод побудови наближених розв'язків задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$d\bar{y} / dx = A\bar{y} + \bar{f}(x), \quad 0 < x < 1,$$

згідно з яким компоненти розв'язку $y_k(x), k = \overline{1, n}$ подаються у вигляді лінійної комбінації елементів деякої системи лінійно – незалежних функцій $\psi_k(x), k = 0, 1, \dots, N$, які задовольняють початковій умові задачі Коші. Коефіцієнти розкладу знаходяться з умови найкращого наближення (в нормі

$L_2[0,1]$ або $W_2^1[0,1]$) правих частин $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ розглядуваної системи.

Приклади демонструють високу точність методу.

Список літератури: 1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, – 1966. – 724с. 2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, – 1971. – 552с. 3. Литвин О.М. Оптимальные схемы метода скінченних елементів, точні на класі задач // Доповіді академії наук України. – Київ: Наукова думка, 1992. – С. 31-36. 4. Литвин О.Н., Оптимальные схемы МКЭ. Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 160–165. 5. Литвин О.Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ. 2-я Респ. конф. "Вычислительная математика в современном научном-техническом прогрессе": Тез. докл. – Киев : КГУ, 1978. – С. 21-22. 6. Литвин О.Н. О построении оптимальных схем МКЭ. Динамика и устойчивость сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 116–128. 7. Литвин О.М. Побудова оптимальних схем методу скінченних елементів. Доп. АН УРСР. Сер. А. –1982. –№6. – С. 14-18. 8. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов. Дифференц. уравнения. –1984. –20, №4. –С. 677-683. 9. Литвин О.М. Новый метод розв'язання двоточкових крайових задач для звичайних лінійних дифференціальних рівнянь // Вісник НТУ ХПІ. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. –Харків: НТУ "ХПІ". –2012, №27. –С. 114-117. 10. Гаєрлік І.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – К: Ин-т матем. НАНУ, 2004. – 499 с. 11. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука: Гл. ред. Физ. мат. лит., – 1986. – 744с. 12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.1 Минск. – Вышэйшая школа, 1972. – 584 с. 13. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. – К.: Наук. думка, 2005. – 333 с. 14. Литвин О.М. Інтерплінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с. 15. Diaz A.R., Kikuchi N., Taylor J.E. A method of grid optimization for finite element method// Comp. methods in applied mechanics and engineering. – V.41, – 1983. –P. 29-45.

Надійшла до редакції 20.10.2012

УДК 519.6

Розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом мінімізації похибки правих частин в нормі $L_2[0,1]$ / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.А. Мірошніченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54(960). – С.119-128. – Бібліогр.: 15 назв.

Предложен новый метод нахождения приближенного решения задачи Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение представляется в виде линейной комбинации элементов некоторой системы линейно-независимых функций. Неизвестные постоянные разложения находятся из условия наилучшего приближения правых частей дифференциальных уравнений системы и (возможно) их производных с помощью указанной системы линейно – независимых функций. Приведены примеры.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, задача Коши, приближенное решение, минимизация погрешности.

A new method for finding approximate solutions of the Cauchy problem for systems of linear ordinary differential equations is offered. The approximate solution is represented as a linear combination of the elements of a linearly independent functions system. Unknown constants expansions are found from condition of the best approximation of the right sides of the differential equations system and (possible) their derivatives with these systems of linear - independent functions. Examples are given.

Key words: differential equation, Cauchy problem, an approximate solution, minimizing errors.