

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА, Харків;
В.О. ПАСІЧНИК, канд. техн. наук, доц., ХДАДМ, Харків

ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ЛІНІЙНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ РОЗРИВИ НА ЛІНІЯХ ТРИАНГУЛЯЦІЇ

Робота виконана при підтримці ДФФД України (грант).

Пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду, область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на триангульованій сітці вузлів.

Ключові слова: розривна інтерполяція, розривна функція, томографія.

Вступ. Задача наближення розривних функцій є однією з найскладніших задач обчислювальної математики. Спеціалістам з обчислювальної математики добре відомі оператори наближення неперервних та диференційованих функцій за допомогою поліномів та сплайнів [1] – [3]. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [4]–[5], в яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення розривних функцій, то авторам невідомі загальні методи сплайн-апроксимації розривних функцій за допомогою розривних сплайнів. Але розв'язання такої задачі є актуальною, оскільки серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується розривними функціями.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [6] була розглянута апроксимація розривних розв'язків (функцій однієї змінної) диференціальних рівнянь за допомогою *розривного метода Гальоркіна*. А в роботі [7] розглядався розривний метод Гальоркіна для еліптичної крайової задачі з використанням двовимірних неузгоджених сіток. Цей метод дозволяє враховувати неконформність елементів. Причому він забезпечує неперервність розв'язку, хоча від базисних функцій узгодженості не вимагає.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів.

В роботі [8] авторами був розроблений метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, використовуючи *метод мінімакса*. В роботі [9] був запропонований метод наближення розривних функцій двох

змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [10] – інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення.

В даній статті пропонується метод побудови розривних сплайн-інтерполантів для наближення розривних функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області D . Будемо вважати, що область D розбивається прямими

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, \quad y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$$

на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагонально на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудова та дослідження таких операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Метод побудови наближуючого розривного сплайн-інтерполанта.

Якщо (x_i, y_j) – вузол, в якому знаходиться прямиий кут прямокутного трикутника, то може зустрітися чотири типи трикутників (рис. 1):

$$T_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} \right\};$$

$$T_{ij}^{(2)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}} \right\};$$

$$T_{ij}^{(3)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < y < y_j \right\};$$

$$T_{ij}^{(4)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i} < y < y_j \right\}.$$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в вершинах трикутника функція набуває таких значень:

$$C_1^{(1)} = C_{i,j}^{++} = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$C_1^{(2)} = C_{i,j}^{(2)-+} = f(x_i - 0, y_j + 0),$$

$$C_2^{(1)} = C_{i,j+1}^{(1)+-} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0),$$

$$C_2^{(2)} = C_{i,j+1}^{(2)--} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0),$$

$$C_3^{(1)} = C_{i+1,j}^{(1)-+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$C_3^{(2)} = C_{i-1,j}^{(2)-+} = f(x_{i-1} - 0, y_j + 0),$$

$$C_1^{(3)} = C_{i,j}^{(3)-} = f(x_i - 0, y_j - 0),$$

$$C_1^{(4)} = C_{i,j}^{(4)+} = f(x_i + 0, y_j - 0),$$

$$C_2^{(3)} = C_{i-1,j}^{(3)-} = f(x_{i-1} - 0, y_j - 0),$$

$$C_2^{(4)} = C_{i+1,j}^{(4)-} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0),$$

$$C_3^{(3)} = C_{i,j-1}^{(3)-} = f(x_i - 0, y_{j-1} - 0),$$

$$C_3^{(4)} = C_{i,j-1}^{(4)+} = f(x_i + 0, y_{j-1} - 0).$$

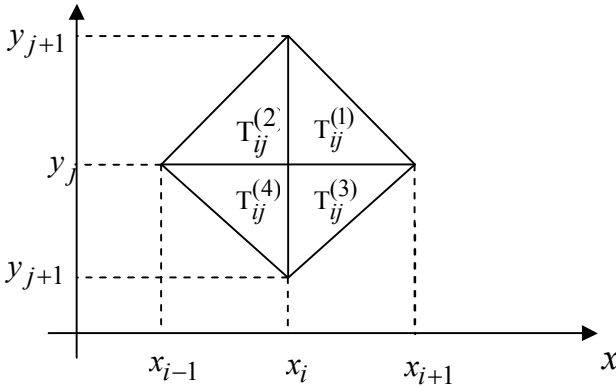


Рис. 1 – Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Визначення. Будемо називати *розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області* $T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = \{1, 2, 3, 4\}$) наступну функцію:

$$S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(k)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} + C_3^{(k)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})}, (x, y) \in T_{ij}^{(k)}, \quad (1)$$

$$\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) = x - x_i, \quad \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) = y - y_j,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y) = \begin{cases} -y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}, & k = 1, \\ -y + y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}}, & k = 2, \\ -y + y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}}, & k = 3, \\ -y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i}, & k = 4, \end{cases}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, y_{j-1} - 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, y_{j-1} - 0), & k = 4, \end{cases} A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4. \end{cases}$$

Теорема 1. Функція $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$) задовольняє наступним властивостям:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_j + 0) &= C_1^{(1)}, & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_j + 0) &= C_1^{(2)}, \\ s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(1)}, & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(2)}, \\ s_{ij}^{(1)}(x_{i+1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(1)}, & s_{ij}^{(2)}(x_{i-1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(2)}, \\ s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_j - 0) &= C_1^{(3)}, & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_j - 0) &= C_1^{(4)}, \\ s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(3)}, & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(4)}, \\ s_{ij}^{(3)}(x_{i-1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(3)}, & s_{ij}^{(4)}(x_{i+1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(4)}. \end{aligned}$$

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений розривний сплайн (1).

Теорема 2. Нехай функція $f(x, y)$ наближується оператором

$$S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y), \quad (x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D (k = 1, 2, 3, 4)$$

та $|f'_x(x, y)| \leq M$, $|f'_y(x, y)| \leq N$, тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}, \quad \Delta_x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta_y = y_{j+1} - y_j.$$

Доведення. Проведемо доведення для трикутного елемента типу $T_{ij}^{(1)}$.

Очевидно, що

$$\frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in T_{ij}^{(1)},$$

тому, ми можемо наблизити функцію $f(x, y)$ функцією

$$S(x, y) = \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} f(A_1^{(1)}) + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} f(A_2^{(1)}) + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} f(A_3^{(1)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \left[f(A_1^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_{A_1^{(1)}}) \right) (y - y_{A_1^{(1)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} \left[f(A_2^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (x - x_{A_2^{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (y - y_{A_2^{(1)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \left[f(A_3^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (x - x_{A_3^{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (y - y_{A_3^{(1)}}) \right] = \\
&\quad = S(x, y) + RS(x, y), \quad 0 < \theta < 1,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
RS(x, y) &= \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(k)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_{A_1^{(k)}}) \right) (y - y_{A_1^{(k)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (x - x_{A_2^{(k)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (y - y_{A_2^{(k)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (x - x_{A_3^{(k)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (y - y_{A_3^{(k)}}) \right].
\end{aligned}$$

Тепер оцінимо похибку наближення $|RS(x, y)| = |f(x, y) - S(x, y)|$:

$$|RS(x, y)| \leq \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \left[M(x - x_{A_1^{(1)}}) + N(y - y_{A_1^{(1)}}) \right] + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} \left[M(x - x_{A_2^{(1)}}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + N(y_{A_2^{(1)}} - y) \Big] + \frac{\omega_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \left[M(x_{A_3^{(1)}} - x) + N(y - y_{A_3^{(1)}}) \right] = \\
& = M \left(\frac{-y + y_j + (x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)/(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \right. \\
& + \left. \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i-1} - x) \right) + N \left(\frac{-y + y_j + (x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)/(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y - y_j) + \right. \\
& \left. + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y_{j+1} - y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (y - y_j) \right) = M \cdot u(x, y) + N \cdot v(x, y).
\end{aligned}$$

Далі, після знаходження максимальних значень функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$, отримаємо, що максимальне значення функції $u(x, y)$ досягається в точці $0.5(x_i + x_{i+1})$ та дорівнює

$$0.5(x_{i+1} - x_i) = 0.5 \cdot \Delta_x,$$

а максимальне значення $v(x, y)$ досягається в точці $0.5(y_j + y_{j+1})$ та дорівнює

$$0.5(y_{j+1} - y_j) = 0.5 \cdot \Delta_y.$$

Тобто отримаємо наступну оцінку похибки: $|RS(x, y)| \leq (M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y) / 2$.

Теорема 3. Якщо $C_\mu^{(k)} = f(A_\mu^{(k)})$, $k = \overline{1, 4}$, $\mu = \overline{1, 3}$, то в кожному трикутнику $T_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ оператор (1) точно відновлює всі лінійні функції.

Доведення теореми витікає з того, що через три точки можна провести тільки одну площину.

Зауваження. Якщо значення функції у вузлах трикутної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_p^{(k)}$, $p = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4$ в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J^{(k)}(C) = \sum_{T_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{T_{ij}^{(k)}} \left[f(x, y) - s_{ij}^{(k)}(x, y, C) \right]^2 dx dy \rightarrow \min_C.$$

І тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

Чисельний експеримент. Приклад 1. Нехай задані вузли трикутної сітки

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1, \quad y_1 = 0, y_2 = 0.5, y_3 = 1$$

та функція $f(x, y)$ визначена в області $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, представлений на рис.2.

$$\begin{aligned} T_1 &= \{x - 0.5 > 0, y - 0.5 > 0, 1.5 - x - y > 0\}, \\ T_2 &= \{-(x - 0.5) > 0, y - 0.5 > 0, 0.5 + x - y > 0\}, \\ T_3 &= \{-(x - 0.5) > 0, -(y - 0.5) > 0, -0.5 + x + y > 0\}, \\ T_4 &= \{x - 0.5 > 0, -(y - 0.5) > 0, 0.5 - x + y > 0\}. \end{aligned}$$

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої трикутної сітки (рис.3),

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in T_1, \\ x - y, & (x, y) \in T_2, \\ y - x, & (x, y) \in T_3, \\ -x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Функція має у вузлах сітки такі значення:

$$\begin{aligned} f^{++}(0.5, 0.5) &= 1, & f^{--}(0.5, 0.5) &= 0, \\ f^{--}(0.5, 0.5) &= 0, & f^{++}(0.5, 0.5) &= -1, \\ f^{--}(1, 0.5) &= 1.5, & f^{--}(1, 0.5) &= -1.5, \\ f^{--}(0.5, 1) &= 1.5, & f^{--}(0.5, 1) &= -0.5, \\ f^{++}(0, 0.5) &= -0.5, & f^{++}(0, 0.5) &= 0.5, \\ f^{++}(0.5, 0) &= -0.5, & f^{++}(0.5, 0) &= -0.5. \end{aligned}$$

Розривний сплайн-інтерполянт будемо у вигляді:

$$S(x, y) = \begin{cases} S_1 f(x, y, C), & (x, y) \in T_1, \\ S_2 f(x, y, C), & (x, y) \in T_2, \\ S_3 f(x, y, C), & (x, y) \in T_3, \\ S_4 f(x, y, C), & (x, y) \in T_4, \end{cases} \quad (2)$$

$$S_1(x, y, C) = 2C_1^{(1)}(1.5 - x - y) + 2C_2^{(1)}(y - 0.5) + 2C_3^{(1)}(x - 0.5),$$

$$S_2 f(x, y) = 2C_1^{(2)}(0.5 + x - y) + 2C_2^{(2)}(y - 0.5) + 2C_3^{(2)}(x - 0.5),$$

$$S_3 f(x, y) = 2C_1^{(3)}(x + y - 0.5) + 2C_2^{(3)}(y - 0.5) + 2C_3^{(3)}(x - 0.5),$$

$$S_4 f(x, y, C) = 2C_1^{(4)}(0.5 - x + y) + 2C_2^{(4)}(y - 0.5) + 2C_3^{(4)}(x - 0.5),$$

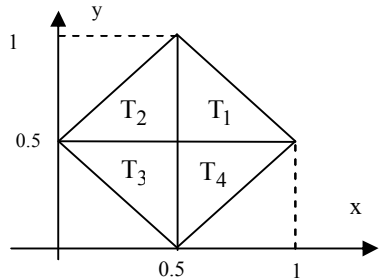


Рис. 2 – Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$.

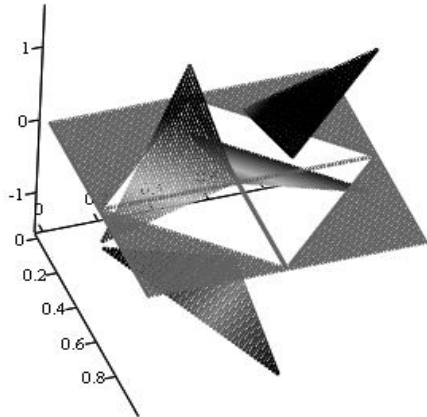


Рис.3 – Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$.

де C – матриця невідомих коефіцієнтів,

$$C = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Далі за методом найменших квадратів розглянемо вираз

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy = \iint_{T_1} (f(x, y) - S1(x, y, C))^2 dx dy + \\ + \iint_{T_2} (f(x, y) - S2(x, y, C))^2 dx dy + \iint_{T_3} (f(x, y) - S3(x, y, C))^2 dx dy + \\ + \iint_{T_4} (f(x, y) - S4(x, y, C))^2 dx dy.$$

Треба знайти такі елементи матриці C , щоб вираз $F(C)$ набував мінімального значення, тобто треба розв'язати мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy \rightarrow \min$$

Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad, та була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки значень невідомих коефіцієнтів у вираз (2), ми отримаємо наближувану функцію $f(x, y)$. Тобто побудований розривний інтерполяційний сплайн співпадає з апроксимаційним та точно відновлює задану розривну функцію, що і підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 2. Нехай на області, визначеній в прикладі 1, задана функція $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої сітки,

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^2 - x + 1.5, & (x, y) \in T_1, \\ (y-1)^2 + (x-1)^2 + 0.5, & (x, y) \in T_2, \\ 0.5, & (x, y) \in T_3, \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x, y, C)$ у вигляді формули (2); в якості коефіцієнтів матриці C

беремо значення функції (лівосторонні та правосторонні) у вузлах сітки. Отримаємо наступний інтерполяційний сплайн:

$$S(x, y) = \begin{cases} -x - 1.4y + 1.975, & (x, y) \in T_1, \\ -1.4x - 0.6y + 1.95, & (x, y) \in T_2, \\ 0.5, & (x, y) \in T_3, \\ 2x - 2y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

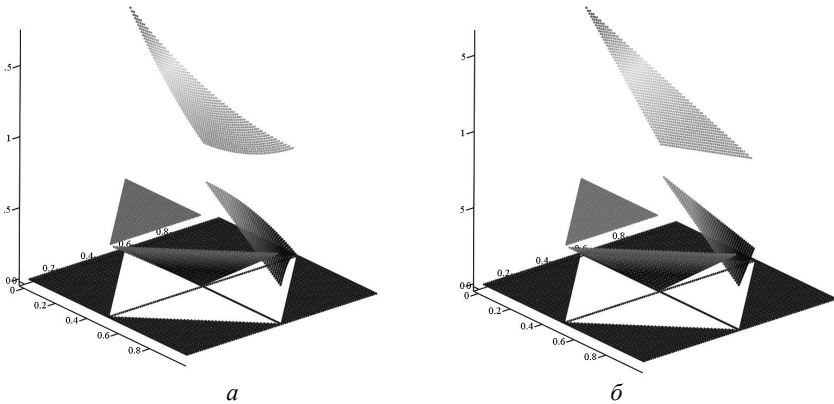


Рис. 4 – Графічний вигляд: *a*– наближуваної функції $f(x, y)$; *б* – наближуючого апроксимаційного сплайна $S(x, y)$.

Знайдемо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерполяційного сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.12.$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Коефіцієнти матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів, тобто розв'язуємо мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy \rightarrow \min$$

Були отримані наступні результати (див. рис. 4).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого апроксимаційного сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.07.$$

Розроблену теорію планується використовувати для розв'язання 2D задачі комп'ютерної томографії. І перш за все, ми будемо її використовувати для відновлення відомого *фантома Шенна – Логана* (рис.5), який складається

ся з декількох еліпсів. Тобто задача полягає в тому, щоб відновити щільність внутрішньої структури даного тіла.

І спочатку розглянемо задачу відновлення щільності тіла, що складається з одного еліпсу.

Приклад 3. Нехай функція $f(x, y)$ задана в одиничному квадраті $[0, 1]^2$ таким чином (рис. 6):

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & \frac{(x-0.5)^2}{0.16} + \frac{(y-0.5)^2}{0.04} \leq 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тобто на лінії еліпса функція має розриви першого роду. Нехай задані вузли

$$x_1 = 0, x_2 = 0.1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.9, x_5 = 1,$$

$$y_1 = 0, y_2 = 0.3, y_3 = 0.5, y_4 = 0.7, y_5 = 1.$$

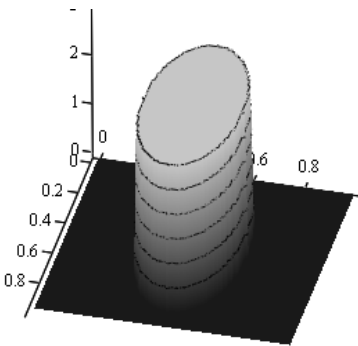


Рис. 6 – Графічний вигляд наближуваної функції

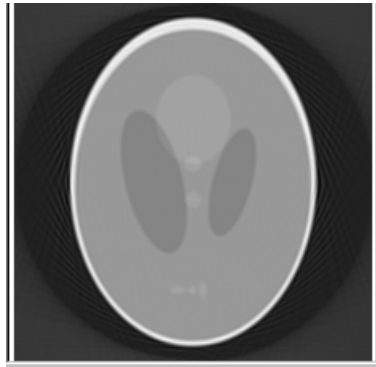


Рис. 5 – Фантом Шеппа – Логана.

Вони розбивають одиничний квадрат на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагонально на два прямокутні трикутники.

Трикутники не вкладаються один в один, а сторони не перетинаються. Наближуючий сплайн на такій трикутній сітці будемо будувати за формулою (2), його графічний вигляд зображений на рис. 7 а.

Тепер розіб'ємо одиничний квадрат на прямокутники та прямокутні трикутники. На трикутниках розривний наближуючий сплайн будемо будувати за формулою (2), а для побудови розривного сплайну на прямокутниках скористаємося результатами роботи [10].

Графічний вигляд такого узгальненого сплайну представлений на рис 7 б.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

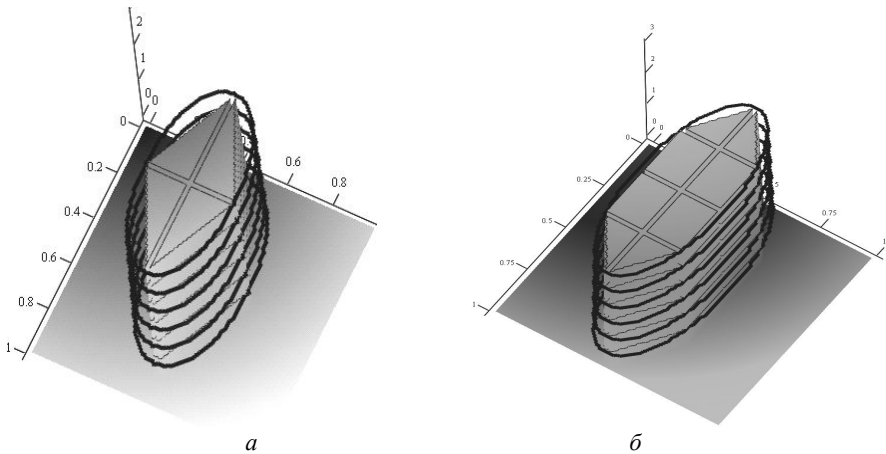


Рис. 7 – Зображення наближуваної функції $f(x, y)$ (контури чорного кольору) та наближуючого сплайну (сірий колір) з використанням:
 а– тільки трикутних елементів; б – трикутних та прямокутних елементів.

В методах, розроблених авторами, вважається, що місця розривів функцій відомі. В подальшому авторами планується розробити теорію наближення розривних функцій розривними функціями у випадку, коли невідомі вузли, в яких знаходиться розрив, та застосувати цю теорію до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

Висновки. В роботі пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду, та область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на триангульованій сітці вузлів. Розглянуто кілька прикладів, що підтверджують гіпотезу авторів: *розривні функції слід наближувати також розривними функціями.*

Список літератури: 1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с. 2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. 3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука. 1976. 4. De Vore R.A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – Vol.41. – P.29-45. 5. Литвин О.М. Интерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с. 6. Н.Б. Петровская. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка [Текст / Н.Б. Петровская // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – Т. 17, №1. – С.79–92. 7. Arnold D.N. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems [Text] / Arnold D.N. // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol.39. – №5. – P. 1749-1779. 8. Литвин О.М., Перишина Ю.І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець –Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131. 9. Литвин О.М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангу-

ляції двовимірної області [Текст] / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Таврічний вісник інформатики та математики. – Сімферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72. **10. Литвин О.Н.** Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) [Текст] / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Компьютерная математика. – Киев.– 2011. – №1. –С.96 – 105.

Надійшла до редколегії 12.10.12

УДК 519.6

Побудова розривних лінійних інтерполяційних сплайнів для наближення функцій, що мають розриви на лініях триангуляції / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, В. О. Пасічник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. –№ 54(960) – С.129-140. – Бібліогр.: 10 назв.

Предлагается метод построения разрывного интерполяционного линейного сплайна для приближения функции с возможными разрывами первого рода, область определения которых разбита на прямоугольные треугольники. Причем, построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени на триангулированной сетке узлов.

Ключевые слова: разрывная интерполяция, разрывная функция, томография.

The method of construction explosive interpolational linear spline for approach of function with possible ruptures of the first sort which range of definition is broken into rectangular triangles is offered. And, the constructed explosive splines include, as a special case, classical continuous splines of the first degree on triangulation to a grid of knots

Key words: discontinuous interpolation, discontinuous function, tomography.

УДК 519.87

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми;
М.В. КАРПУША, аспірант, СумДУ, Суми

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ СЛАБОФОРМАЛІЗОВАНИХ СИСТЕМ

Запропоновано метод ідентифікації слабоформалізованих систем з метою подальшої оптимізації. Розглянуто задачу статичної оптимізації, в якій для специфікації цільової функції використана транслогарифмічна функція, а для побудови системи обмежень - лінійні функціональні форми. Апробація побудованих алгоритмів проведена на даних часових рядів реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: моделі економіки, слабоформалізована система, ідентифікація параметрів, оптимізація макроекономіки.

Вступ. Побудова математичних моделей слабоформалізованих систем

© О.М. Назаренко, М.В. Карпуша, 2012