УДК 519.6

М.В. АРТЮХ, аспірант, УІПА, Харків;
О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

ТЕОРЕМИ ПРО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ ДЕЯКОГО КЛАСУ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРІВ НЕЛІНІЙНОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ТА ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ

Сформульовано та доведено теореми про умови, яким повинні задовольняти допоміжні функції у формулах нелінійної інтерлінації функції двох змінних на системі взаємно перпендикулярних ліній. Ці формули інтерлінації точно представляють виробничі функції деяких класів, а їх узагальнення для випадку функцій трьох змінних використані в задачі нелінійної інтерфлетації на системі взаємно перпендикулярних площин.

Ключові слова: моделі економіки, виробничі функції, формули інтерлінації, нелінійна інтерфлетація.

Вступ. Серед математичних моделей, які використовуються в економіці, важливу роль відіграють лінійні моделі. Але на практиці існує ряд задач, в яких не можуть бути з достатньою точністю описані процеси в економіці за допомогою лінійних виробничих функцій. Серед них *нелінійні виробничі функції Солоу* ($Y(t) = A(t)K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t)$) [1], *Коба – Дугласа* ($Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$) [2], та ін. без сумніву відіграють важливу роль в математичному моделюванні, але не вичерпують всіх можливих методів адекватного опису таких процесів. У зв'язку з цим, важливою є розробка та дослідження загальних методів побудови математичних моделей з використанням нових інформаційних операторів. Зокрема, до них відносяться методи побудови виробничих функцій двох змінних з використанням слідів цих функцій на системі взаємно перпендикулярних прямих та нелінійної інтерлінації функцій [3], а також методи побудови виробничих функцій від трьох змінних з використанням їх слідів на системі взаємно перпендикулярних площин.

Постановка задачі. В даній роботі ставиться і розв'язується наступна задача: сформулювати і довести теореми про загальний вигляд класів виробничих функцій, які точно відновлюються за допомогою методів нелінійної інтерлінації функцій та нелінійної інтерфлетації функцій.

Основні твердження. Спочатку розглянемо випадок виробничої функції двох змінних.

Теорема 1. *Якщо* $f(x, y) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2}$ *– функція Коба-Дугласа, то оператор*

$$O\left[f(x,y)\right]=\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(f(x_k,y)\right)^{h_k(x)}\cdot\prod_{l=1}^{M}\left(f(x,y_l)\right)^{h_l(y)}}{\prod_{k=1}^{M}\prod_{l=1}^{M}\left(f(x_k,y_l)\right)^{h_k(x)\cdot h_l(y)}}, \qquad (1)$$

точно її відновлює, тобто

$$O[f(x,y)]=f(x,y),$$

за умов

$$h_1(x)+h_2(x)+\ldots+h_M(x)\equiv 1,$$

де допоміжні функції $h_k(x), h_l(y)$ *є поліномами з властивостями*

$$h_k(x_p)=\delta_{k,p},\quad h_l(y_q)=\delta_{l,q},\quad k,p,l,q=\overline{1,M}.$$

Доведення. Прологарифмуємо обидві частини формули (1). В результаті отримаємо:

$$\ln O\left[f(x_k,y_l)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}h_k(x)\ln f(x_k,y)+\sum_{l=1}^{M}h_l(y)\ln f(x,y_l)-\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}h_k(x)h_l(y)\ln f(x_k,y_l)=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\ln f(x_k,y)^{h_k(x)}+\sum_{l=1}^{M}\ln f(x,y_l)^{h_l(y)}-\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\ln f(x_k,y_l)^{h_k(x)h_l(y)}=$$

$$=\ln\left[\prod_{k=1}^{M}f(x_k,y)^{h_k(x)}\prod_{l=1}^{M}f(x,y_l)^{h_l(y)}\div\prod_{k=1}^{M}\prod_{l=1}^{M}f(x_k,y_l)^{h_k(x)h_l(y)}\right].$$

Враховуючи властивості $h_k(x_p)=\delta_{k,p}$, $h_l(y_q)=\delta_{l,q}$, можна довести, що оператор $\ln O[f(x_k,y_l)]$ є оператором інтерлінації функції $\ln f(x,y)$ на вказаній системі взаємно перпендикулярних прямих, тобто

$$\ln O\left[f(x_k,y)\right]=\ln f(x_k,y),\ k=\overline{1,M};\ \ln O\left[f(x,y_l)\right]=\ln f(x,y_l),\ l=\overline{1,M}.$$

Для таких операторів інтерлінації в роботі [3] (теорема 3.2.1) доведено, що вони є точними на всіх функціях, які задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^{p_1+p_2}\ln O\left[f(x,y)\right]}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}=0,\ 1\le p_1,p_2\le M.$$

Тому, враховуючи, що для функції $f(x,y)=\alpha\cdot x^{b_1}\cdot y^{b_2}$ виконується рівність

$$\ln f(x,y)=\ln\alpha\cdot x^{b_1}\cdot y^{b_2}=\ln\alpha+b_1\ln x+b_2\ln y,$$

можемо написати, що

$$\partial^2 \ln O[f(x,y)] \big/ \partial x\ \partial y = 0 .$$

Тобто оператори $\ln O[f(x,y)]$ є точними на функціях $f(x,y) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2}$. А це означає, що і оператори $O[f(x,y)]$ теж є точними на таких функціях, що і треба було довести.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо нижче випадок виробничих функцій трьох змінних.

Теорема 2. *Якщо* $f(x,y,z) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2} \cdot z^{b_3}$ *, то оператор*

$$O\left[f\left(x,y,z\right)\right] = \frac{\prod\limits_{p=1}^{M} f\left(x_p, y, z\right)^{h_p(x)} \cdot \prod\limits_{q=1}^{M} f\left(x, y_q, z\right)^{h_q(y)} \cdot \prod\limits_{r=1}^{M} f\left(x, y, z_r\right)^{h_r(z)}}{\prod\limits_{p=1}^{M}\prod\limits_{q=1}^{M} f\left(x_p, y_q, z\right)^{h_p(x)\,h_q(y)} \cdot \prod\limits_{p=1}^{M}\prod\limits_{r=1}^{M} f\left(x_p, y, z_r\right)^{h_p(x)\,h_r(z)}} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{p=1}^{M}\prod\limits_{q=1}^{M}\prod\limits_{r=1}^{M} f\left(x_p, y_q, z_r\right)^{h_p(x)\,h_q(y)\,h_r(z)}}{\prod\limits_{q=1}^{M}\prod\limits_{r=1}^{M} f\left(x, y_q, z_r\right)^{h_q(y) h_r(z)}} , \qquad (2)$$

є оператором нелінійної інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ *з властивостями*

$$O[f(x_p,y,z)] = f(x_p,y,z),\ O[f(x,y_q,z)] = f(x,y_q,z),$$

$$O[f(x,y,z_r)] = f(x,y,z_r),\ 1 \le p,q,r \le M ,$$

та точно відновлює функцію $f(x,y,z)$ *за умови, що*

$$h_1(t) + h_2(t) + \ldots + h_M(t) = 1,\ t \in \{x,y,z\} ,$$

де допоміжні функції $h_p(x), h_q(y), h_r(z)$ *є поліномами мінімального степеня з властивостями*

$$h_p(x_k) = \delta_{pk},\ ;\ h_q(y_l) = \delta_{ql},;\ h_r(z_m) = \delta_{rm},\quad p,q,k,l,r,m = \overline{1,M} .$$

Тобто

$$O\left[f\left(x,y,z\right)\right] \equiv f\left(x,y,z\right) \forall f\left(x,y,z\right) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2} \cdot z^{b_3},\ \alpha, b_1, b_2, b_3 \in R .$$

Доведення. Логарифмуючи обидві частини рівності (2) з властивості логарифма $\ln a^b = b \ln a$ отримуємо:

$$\ln O\left[f(x,y,z)\right]=\sum_{p=1}^{M}\ln f\left(x_p,y,z\right)h_p(x)+\sum_{q=1}^{M}\ln f\left(x,y_q,z\right)h_q(y)+$$

$$+\sum_{r=1}^{M}\ln f(x,y,z_r)h_r(z)-\sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{M}\ln f\left(x_p,y_q,z\right)h_p(x)h_q(y)-$$

$$-\sum_{p=1}^{M}\sum_{r=1}^{M}\ln f\left(x_p,y,z_r\right)h_p(x)h_r(z)-\sum_{q=1}^{M}\sum_{r=1}^{M}\ln f\left(x,y_q,z_r\right)h_q(y)h_r(z)+$$

$$+\sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{M}\sum_{r=1}^{M}\ln f\left(x_p,y_q,z_r\right)h_p(x)h_q(y)h_r(z).$$

Враховуючи вказані вище властивості допоміжних функцій можемо зробити висновок, що оператори $\ln O[f(x,y,z)]$ є операторами інтерфлетації функцій $\ln f(x,y,z)$ 3-х змінних [3] на системі взаємно перпендикулярних площин в R^3 з такими інтерфлетаційними властивостями:

$$\ln O[f(x_p,y,z)]=\ln f(x_p,y,z)\,,\ \ln O[f(x,y_q,z)]=\ln f(x,y_q,z)$$

$$\ln O[f(x,y,z_r)]=\ln f(x,y,z_r)\,,\ 1\le p,q,r\le M\ .$$

Тобто оператор $\ln O[f(x,y,z)]$ є оператором лінійної інтерфлетації функції $\ln f(x,y,z)$ на системі взаємно перпендикулярних площин

$$x=x_p,\ y=y_q,\ z=z_r\ .$$

Згідно з властивостями операторів лінійної інтерфлетації на системі взаємно перпендикулярних площин, ці оператори є точними на функціях трьох змінних, які задовольняють умову

$$\partial^3\ln f(x,y,z)\big/\partial x\,\partial y\,\partial z=0$$

в роботі [3] (теорема 7.2.2.).

Якщо $f(x,y,z)=\alpha x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$, то

$$\ln f(x,y,z)=\ln\alpha+b_1\ln x+b_2\ln y+b_3\ln z\ ,$$

тому $\partial^3\ln f(x,y,z)\big/\partial x\,\partial y\,\partial z\equiv 0$, якщо $f(x,y,z)=\alpha x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$.

Таким чином, $\ln O[f(x,y,z)]\equiv\ln f(x,y,z)$, тобто

$$O[f(x,y,z)]\equiv f(x,y,z)\,,$$

якщо $f\left(x,y,z\right)=\alpha x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$.

Що і треба було довести. Теорему 2 доведено.

Перспективи подальших досліджень. Планується дослідити можливості побудови вказаних слідів за допомогою їх значень в окремих точках вказаних ліній або площин.

Висновки. Таким чином, в даній роботі досліджено наближуючи можливості операторів нелінійної інтерлінації функцій двох змінних, які побудовані за допомогою слідів $f(x_k, y)$ та $f(x, y_l)$ функції $f(x, y)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = x_k$, $y = y_l$. А також оператори інтерфлетації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$, побудовані за допомогою їх слідів $f(x_p, y, z)$, $f(x, y_q, z)$, $f(x, y, z_r)$ на системі взаємно перпендикулярних площин $x = x_p$, $y = y_q$, $z = z_r$. При цьому вважається, що вказані сліди відомі нам з експерименту. Тобто оператори дослідження, розглянуті в даній роботі, використовують нові інформаційні оператори – сліди функцій на лініях або на площинах.

Список літератури: **1.** *Акаев А.А.* К вопросу о фундаментальных пределах экономического роста и потребления // Доклады Академии Наук, 2010. – Т.434 – № 6 – С. 749-755 **2.** *Cobb C.W., Douglas P.H.* A Theory of Production //American Economic Review. – 1928. – December. – P. 139-165. **3.** *Литвин О.М.*. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. **4.** *О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок* Дослідження операцій: навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007 – 256 с. **5.** *Шапкин А.С.* Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 5-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2009. – 400 с.

Надійшла до редколегії 12.10.2012

УДК 519.6

Теореми про представлення виробничих функцій деякого класу за допомогою операторів нелінійної інтерлінації та інтерфлетації / М. В. Артюх, О. М. Литвин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012.–№54 (960). – С.14–18.– Бібліогр.: 5 назв.

Сформулированы и доказаны теоремы про условия, которым должны удовлетворять вспомогательные функции в формуле нелинейной интерлинации функций двух переменных на системе взаимно перпендикулярных линий. Эти формулы интерлинации точно представляют производственные функции некоторых классов, а их обобщения для случая функций трех переменных использованы в задаче нелинейной интерфлетации на системе взаимно перпендикулярных плоскостей.

Ключевые слова: экономические модели, производственные функции, формулы интерлинации, нелинейная интерфлетация.

The paper formulated and proved theorems about conditions to be met by auxiliary functions in formulas interlination nonlinear function of two variables on a system of mutually perpendicular lines. These formulas interlination accurately represent the production functions of certain classes, and their generalization for the case of functions of three variables used in the problem of nonlinear interflatation on mutually perpendicular planes.

Key words: economic models, production functions, formulas interlination, nonlinear interflatation.