
УДК 621.9

Застосування кінематичного контактного алгоритму з явною схемою інтегрування за часом у скінченноелементних задачах динаміки тіл з тріщиною / В.М. Бурласенко, О.К. Морачковський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання у техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.19–25. – Бібліогр.: 9 назв.

Рассмотрен кинематический контактный метод, используемый в рамках явной схемы интегрирования по времени в конечноэлементном моделировании. Этот алгоритм применяется здесь для решения задач нелинейной динамики тела с трещиной, границы которой могут находиться в контакте. Эффективность и устойчивость алгоритма показана на примере решения задачи о динамическом поведении балки из композиционного трехслойного материала, который частично слоён в соединении между верхним и средним слоями.

Ключевые слова: динамика тел с трещиной; контактный анализ; метод конечных элементов.

A kinematical numerical contact method used with an explicit time integration scheme in finite element modelling is considered. The algorithm is applied to dynamical problems of a body with a crack whose edges are able to come into contact. Its effectiveness and robustness is demonstrated on predictions of dynamic response of a sandwich beam containing a detached region between the top and middle plies.

Key words: dynamics of body with crack; contact analysis; finite element method.

УДК 539.1

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;

А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНФАЗНЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ВОЛНОВОДАХ И СОНОТРОДАХ ВИНТОВОЙ ФОРМЫ

Разработаны математические модели волнового синфазного поля продольных и связанных колебаний винтового стержня. Установлен изоморфизм между двумя полями связанных колебаний – волновым и обычным, что позволило распространить на волновое поле методы расчёта стержня на прочность и теорию солитонов Рассела. Описаны примеры использования волновых полей для передачи энергии ультразвуковых колебаний.

Ключевые слова: винтовой стержень, упругие колебания, волновое поле, солитоны Рассела, ультразвуковой волновод, сонотрод.

Введение и постановка задачи. Синфазные колебания упругих континуумов (так называемые *стоячие волны*, амплитуда которых образует *волновое поле*) обычно возникают при изменении граничных условий по гармоническому закону с определённой (*синфазной*) частотой. Особенностью исследуемых в данной работе колебаний является то, что они возбуждаются в нелинейной системе, имеют одинаковую для всех её точек амплитуду изменения

© В. А. Ванин, А. А. Григорьев, 2012

плотности и сопровождаются моногармоническими пульсациями коэффициентов соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Для простейших моделей, описывающих периодические колебания механических систем, аналогичная особенность приводит к *дифференциально-уравнению Матье* [1]. Но винтовой стержень описывается более сложной моделью – системой уравнений в частных производных [2], и при вибрации опор в нём возбуждаются две группы колебаний – продольные и поперечные, которые, как правило, внутри стержня слабо связаны между собой. Пульсация коэффициентов нарушает это правило и индуцирует в стержне волновое поле нового типа, которое ранее было описано в [3], где изучались аналогичные связанные колебания в трёхмерном упругом континууме.

Синфазные связанные колебания сплошной нелинейной среды, как указывалось в [4], способны создавать в этой среде фундаментальные силовые поля, подобные электромагнитному и гравитационному полю, и их теория ещё найдёт приложения в технике. Аналогичные колебания винтового стержня, как показано в [5], могут использоваться для передачи механической энергии ультразвуковых колебаний.

Современные технические приложения ультразвуковых колебаний в основном касаются двух направлений: дефектоскопия и обработка материалов. В обоих случаях, как правило, используются короткие волны, длина L которых связана с круговой частотой ω простой зависимостью

$$L = 2\pi a / \omega, \quad (1)$$

где a – скорость распространения соответствующих колебаний; она зависит от вида деформации и для стальных стержней составляет 3.4–5.9 м/мс.

В дефектоскопии стремятся получить как можно меньшую величину L , поскольку она определяет разрешающую способность прибора. В результате рабочая частота дефектоскопов лежит в диапазоне 0.5–10 МГц, и использовать здесь для передачи сигнала синфазное поле винтового стержня, впервые описанное в наших работах [5,6], сложно. К тому же, при дефектоскопии рабочая частота прибора изменяется в широких пределах, что вступает в противоречие с принципами образования синфазного поля, указанными далее.

Другими являются условия применения ультразвука для обработки материалов. Устройства, как правило, работают в узком диапазоне частот, и их можно отнести к резонансной технике. Рабочая частота выбирается из диапазона 20–130 кГц и лежит в области низких ультразвуковых колебаний. Многие устройства работают на частоте 22 кГц, но наблюдается тенденция к её увеличению; чем выше рабочая частота, тем больше мощность передачи и выше производительность устройства. Однако простое увеличение частоты здесь выполнить невозможно, поскольку оно потребует изменения размеров волноводной системы и характеристик генератора колебаний.

Для возбуждения колебаний используют генераторы трёх типов: элек-

ромагнитные, магнитоотрицательные и пьезокварцевые; сравнивать их характеристики в работе, где обсуждаются общие принципы, мы не будем.

Типичные схемы устройств показаны на рис. 1. В волноводе возникает стоячая волна, длина которой вычисляется по формуле (1). Для передачи упругой энергии используют стержни и другие элементы, длина которых кратна длине полуволны возбуждаемых колебаний.

При частоте 22 кГц длина полуволны для прямых стальных стержней составляет 112 мм, титановых – в 1.2 раза больше.

По данным [7] логарифмический декремент затухания ультразвуковых колебаний в стальном волноводе зависит от частоты и среднего размера зерна в материале. Для диапазона

20–130 кГц он приблизительно составляет 0.059, то есть на длине полуволны амплитуда уменьшается на 3%.

Механическая энергия превращается в тепло, что приводит к нагреву волновода. Потерями на излучение, а также зависимостью декремента затухания от зернистости материала для этих частот допустимо пренебрегать.

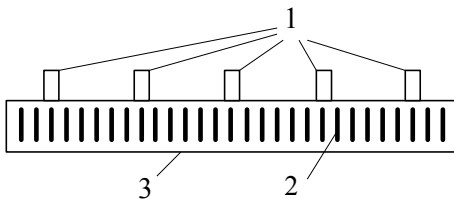


Рис. 2 – Пластинчатый сонотрод для ультразвуковой сварки пластмасс; 1 – стержни для подключения генераторов; 2 – прорези; 3 – рабочая поверхность.



Рис. 1 – Принципиальные схемы устройств для ультразвуковой обработки: а – используются поперечные; б – продольные колебания; 1 – электромагнитный генератор; 2 – волновод; 3 – индентор; 4 – обрабатываемая поверхность; 5 – пьезокварцевый или магнитоотрицательный элемент.

Для сваривания мягких пластмасс (рис. 2) применяют излучатель тепловой энергии (*сонотрод*), длина которого превышает длину полуволны в 16 раз. Чтобы выровнять амплитуду колебаний к нему подключают 5 генераторов, работающих синхронно [8].

Известные недостатки устройств для ультразвуковой обработки материалов (быстрое затухание колебаний, высокую жесткость передающих звеньев, неоднородность амплитуды) можно преодолеть,

если перейти от коротких волн к длинным. Для осуществления такого перехода волновод должен иметь соответствующую кривизну, а его ось – форму винтовой спирали. Задачей данной публикации является более подробное, чем было дано в [5,6], описание методов математического моделирования винтовых волноводов и основных принципов передачи энергии ультразвуковых колебаний посредством упругих элементов винтовой формы.

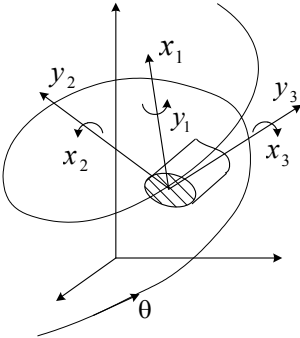


Рис. 3 – Координаты групп колебаний.

Модель связанных колебаний винтового стержня. В [9] было показано, что в длинной цилиндрической пружине растяжения можно возбудить бегущую волну продольной деформации, имеющую форму классического или модифицированного солитона Рассела. При этом использовалась нелинейная модель связанных колебаний пружины, полученная ранее в [3]; матричная форма уравнений модели имела следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где Vx, Vy – векторы, составленные из скоростей изменения координат x_j или y_j (рис. 2); Qx, Qy – отвечающие им упругие силы и моменты сил q_j или f_j ; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения,

$$\begin{aligned} mx_1, my_2, my_3 &= \Delta, \quad mx_2 = \Delta^3 / (4z^2), \quad my_1 = \Delta / (4z^2), \quad mx_3 = \Delta(1 + \Delta^2) / (4z^2), \\ cx_1, cy_2 &= (1 + \mu) / (2z^2 \Delta), \quad cy_3 = (4z^2 \Delta)^{-1}, \quad cx_2, cy_1 = 1 / \Delta, \\ cx_3 &= 0.5(1 + \mu)(1 + \Delta^2) / \Delta^3, \end{aligned}$$

μ – коэффициент Пуассона; Δ – коэффициент овализации сечения (рис. 3); I, Θ – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка; B, Ω – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -(tg \delta_0 - cx_3 \cdot q_3) & 0 \\ tg \delta_0 - cx_3 \cdot q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

δ_0 – начальное изменение угла подъёма винтовой оси вследствие предварительной деформации; $z = D/d$ – индекс пружины; D – диаметр навивки.

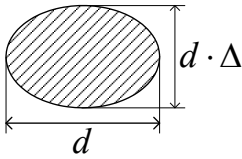


Рис. 4 – Форма сечения.

трёхмерного упругого континуума, было показано, что наличие синфазных колебаний объёмной плотности (которые происходили там за счёт соответствующего деформирования частиц примеси, имеющих меньший модуль сжимаемости) приводит к возникновению волнового поля поперечных синфазных колебаний сплошной среды. Далее мы покажем, что такой же механизм образования волнового поля работает и в случае одномерного упругого континуума (цилиндрической пружины). После чего будут указаны предпосылки для получения солитонов нового волнового поля.

Модель (2), (3) оперирует с безразмерными величинами; порядок нормировки дан в [2].

В статье [10] указывалось на существование у пружины так называемых *частот синфазных колебаний* (на рис. 5 это выделенные точки пересечения графиков с осью), причём на одной из этих частот происходит пульсирующее продольное сжатие винтовой оси, что изменяет её погонную плотность. В статье [4], где анализировались связанные колебания

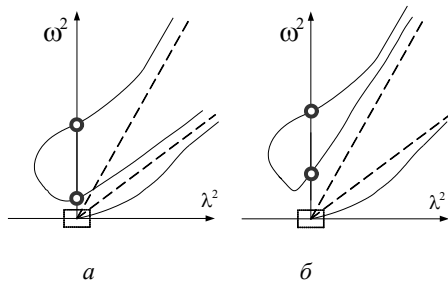


Рис. 5 – Зависимости волнового числа λ от частоты ω для продольных (а) и поперечных (б) колебаний стержня.

Волновое поле синфазных продольных колебаний пружины. Пусть длинная пружина растяжения – сжатия имеет индекс $z \gg 3$ и угол $\delta_0 \approx 0$. Возбудим в пружине синфазные колебания, имеющие форму

$$(v_y, q_y) = Ay \cdot ((0 \ 1 \ 0)^T \cos(\omega y \cdot t); (0 \ 0 \ -2z)^T \sin(\omega y \cdot t)),$$

что по принятой в работе [2] терминологии отвечает *нижней поперечной синфазной частоте* $\omega y = 2z$; Ay – это амплитуда колебаний.

В результате гармонического колебания осевой силы

$$q_y = -2 \cdot z \cdot Ay \cdot \sin(\omega y \cdot t)$$

произойдёт изменение характеристик поперечного сечения – инерционных коэффициентов $m x_1, m x_2, m x_3$ и коэффициентов податливости $c x_1, c x_2, c x_3$.

Будем считать, что изменение диагональных матриц Mx, Cx^{-1} также происходит по гармоническому закону, то есть

$$Mx = Mx_0 + \delta M \cdot \sin(\omega y \cdot t), \quad Cx^{-1} = Cx_0^{-1} + \delta C^{-1} \cdot \sin(\omega y \cdot t).$$

Тогда уравнения системы (2), описывающие при условии $\Omega = \Theta$ продольные колебания пружины, будут иметь следующий вид:

$$\partial(Mx(t) \cdot \partial \bar{x} / \partial t) / \partial t = \partial \bar{q} / \partial \theta + B \cdot \bar{q}; \quad \bar{q} = Cx^{-1}(t) \cdot (\partial \bar{x} / \partial \theta - B^T \cdot \bar{x}),$$

или

$$\partial(Mx(t) \cdot \partial \bar{x} / \partial t) / \partial t = -(B + I \times \partial / \partial \theta) \cdot Cx^{-1}(t) \cdot (B^T - I \times \partial / \partial \theta) \cdot \bar{x},$$

Далее естественно и решение этого операторного уравнения искать в виде

$$\bar{x} = \overline{\delta x} \cdot \sin(\omega y \cdot t),$$

где вектор $\overline{\delta x}$ по сравнению с синфазной частотой ωy медленно изменяется во времени либо является константой.

Используем ту же процедуру усреднения, что в [3, 4], и придём к новому операторному уравнению

$$\delta M \cdot \partial^2 \bar{x} / \partial t^2 = -(B + I \times \partial / \partial \theta) \cdot \delta C^{-1} \cdot (B^T - I \times \partial / \partial \theta) \cdot \bar{x},$$

имеющему факторизацию

$$\delta M \cdot \partial^2 \bar{x} / \partial t^2 = \partial \overline{\delta q} / \partial \theta + B \cdot \overline{\delta q}; \quad \delta C \cdot \overline{\delta q} = \partial \overline{\delta x} / \partial \theta - B^T \cdot \overline{\delta x}.$$

Учтём, что амплитуды изменения инерционных коэффициентов и коэффициентов жёсткости сечения пропорциональны амплитуде изменения погонной плотности, то есть

$$\delta M = \delta \rho \cdot M, \quad \delta C^{-1} = \delta \rho \cdot C^{-1}.$$

откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cdot \partial^2 \overline{\delta x} / \partial t^2 = \partial \overline{\delta q} / \partial \theta + B \cdot \overline{\delta q}; \\ C \cdot \overline{\delta q} = \partial \overline{\delta x} / \partial \theta - B^T \cdot \overline{\delta x}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Мы получили искомые уравнения волнового поля синфазных колебаний.

Система (4) имеет то же самое дисперсионное уравнение, что и группа продольных колебаний пружины, описываемая уравнениями модели (2). Как показывают данные рис. 6,

$$\omega^2 \ll \omega y^2 = 4z^2.$$

Следовательно, этой моделью можно, например, пользоваться для частот нижней ветви дисперсионного уравнения, и такое волновое поле будет нетрудно создать, наблюдать в эксперименте и использовать для передачи колебательной энергии в ультразвуковом диапазоне частот.

Волновое поле синфазных связанных колебаний пружины. Необходимо отметить, что описанные в преды-

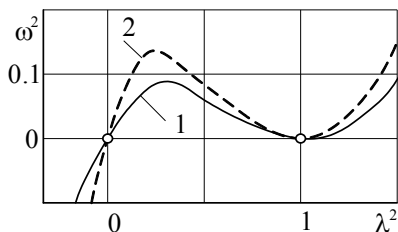


Рис. 6 – Нижние ветви дисперсионного уравнения; 1 – продольные, 2 – поперечные колебания.

дущем пункте колебания на самом деле также являлись связанными, но эта связь осуществлялась только через диагональные коэффициенты системы уравнений и была односторонней (от группы поперечных колебаний к группе продольных колебаний). Если изменением угла подъёма винтовой линии и относительной кривизной пружины $z^{-1} = d/D$ пренебречь нельзя, то нелинейная связь (3) будет влиять и на волновое поле синфазных колебаний, что необходимо учесть.

Перепишем систему (2) в операторной форме:

$$\begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \\ = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Cx^{-1} & \Theta \\ \Theta & Cy^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix},$$

а в матрице (2) учтём пульсацию момента кручения $q_3 = \delta q_3 \cdot \sin(\omega y \cdot t)$ и получим:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -tg\delta_0 + cx_3\delta q_3 \sin(\omega y \cdot t) & 0 \\ tg\delta_0 - cx_3\delta q_3 \sin(\omega y \cdot t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Процедура усреднения приводит к операторному уравнению

$$\begin{bmatrix} \delta Mx & \Theta \\ \Theta & \delta My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} \bar{\delta x} \\ \bar{\delta y} \end{bmatrix} = \\ \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \hat{\Omega} \\ \hat{\Omega} & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Cx^{-1} & \Theta \\ \Theta & \delta Cy^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\hat{\Omega} \\ -\hat{\Omega} & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\delta x} \\ \bar{\delta y} \end{bmatrix},$$

имеющему такую факторизацию:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta Mx & \Theta \\ \Theta & \delta My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \hat{\Omega} \\ \hat{\Omega} & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta Cx & \Theta \\ \Theta & \delta Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\hat{\Omega} \\ -\hat{\Omega} & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\},$$

где

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{tg^2\delta_0 + (3/4)(cx_3\delta q_3)^2} & 0 \\ \sqrt{tg^2\delta_0 + (3/4)(cx_3\delta q_3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Учтём равенства

$$\delta Mx = \delta p \cdot Mx, \delta My = \delta p \cdot My, \delta Cx^{-1} = \delta p \cdot Cx^{-1}, \delta Cy^{-1} = \delta p \cdot Cy^{-1},$$

и получим искомую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \hat{\Omega} \\ \hat{\Omega} & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\hat{\Omega} \\ -\hat{\Omega} & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где обозначено $\delta Vx = \partial \overline{\delta x} / \partial \tau$, $\delta Vy = \partial \overline{\delta y} / \partial \tau$.

Длинные бегущие волны, описываемы системой (5), (6), имеют слабое затухание и способны переносить в ультразвуковом диапазоне частот значительную энергию, что важно для решения многих практических задач.

Солитоны волнового поля. Дисперсионные уравнения моделей (5), (6) и (2), (3) отличаются только формой матрицы связи. Это означает, что для волнового поля можно повторить выкладки статьи [9] и получить *модифицированное КДФ – уравнение* и устойчивую нелинейную уединённую волну – *модифицированный волновой солитон Рассела*. У таких солитонов заштрихованная на рис.7 площадь и максимальная амплитуда колебаний квантованы, скорости движения незначительно превышают скорости распространения длинной низкочастотной волны, а максимальная абсолютная скорость перемещения витков близка к скорости звука в материале пружины.

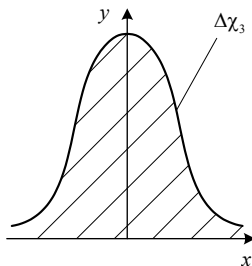


Рис. 7 – Изменение волновой функции кручения стержня внутри модифицированного солитона.

Порядок возбуждения синфазного поля. В принципе, для получения однородных колебаний винтового стержня можно использовать любую синфазную частоту из четырёх, отмеченных на рис. 5.

Например, если использовать нижнюю синфазную частоту продольных колебаний, то можно получить однородное поле кручения стержня, что вызовет колебательное вращение рабочего инструмента (индентора). В некоторых современных устройствах подобного типа, если судить по их рекламным проспектам, используется дополнительное вращение индентора, и такое их качество преподносится как эксклюзивное и полезное. Возбуждая в опорном витке винтового стержня колебания двух синфазных частот одновременно, можно получить тот же эффект.

Но для образования синфазного поля необходимо использовать ту частоту

ту, на которой изменяется погонная плотность. Она отмечена точкой на диаграмме 5 б. Для соответствующей круговой частоты будем использовать обозначение ω_* .

Что касается верхних синфазных частот, то сам факт их существования и величина ещё подлежат проверке и уточнению. Для чего вместо трёхмерной модели деформаций прямого стержня [11] планируется использовать математическую модель кольца тороидальной формы. Пока указанная проверка не выполнена, полагаться на эти частоты и анализировать получаемые результаты мы не будем.

Был разработан порядок возбуждения синфазного поля и изучены факторы, определяющие синфазную частоту $\nu_* = \omega_* / (2\pi)$ и влияющие на её изменения при работе стержня. Оказалось, что она определяется формулой

$$\nu_* = \sqrt{E / \rho} \sqrt{1 + 0.5 \chi_3^2 (1 + 0.5 / (1 + \mu))} / (2\pi R_{кр} [1 + 1 / (4z_{п}^2)]),$$

где $R_{кр}$ – радиус кривизны стержня, $R_{кр} = R_b / \cos^2 \delta$; R_b, δ – радиус навивки и угол подъёма спирали; $\chi_3 = tg \delta_0$ – изменение кручения при начальном сжатии.

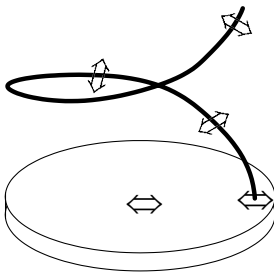


Рис. 8. – Схема возбуждения радиальных синфазных колебаний.

Фактически, эта частота определяется скоростью распространения волны продольной деформации по витку пружины, не зависит от формы сечения и является стабильной величиной. Для тонкого стального стержня (при индексе $z_{п} > 5$) и температуре $t_{п} < 120$ С имеем простую зависимость

$$R_{кр} = 0.77 / (\nu_* / 10^3).$$

В частности, при рабочей частоте $\nu_* = 22$ кГц получаем радиус кривизны $R_{кр} \approx 36$ мм, а диаметр стержня $d = 8 \dots 10$ мм.

Пружина из такой проволоки выдерживает сжимающую и сдвигающую нагрузку $F_d = 6 \dots 10$ кН.

В устройствах, где рабочая частота увеличена до значения 130 кГц, получаем радиус кривизны $R_{кр} \approx 6$ мм и диаметр проволоки $d = 1.5 \dots 2$ мм. При этом сила F_d уменьшается пропорционально d^2 до уровня $F_d = 200 \dots 300$ Н, который для осуществления обработки поверхности является достаточным.

Чтобы возбудить волновое поле нужно обеспечить поперечное радиальное колебание опоры в точке закрепления стержня (как показано на рис. 8). При синфазной частоте ν_* колебания координаты y_2 и силы f_3 одинаковы

для всех сечений стержня, а амплитуды продольных и других форм колебаний будут описываться выведенными выше уравнениями волнового поля.

Анализ дисперсионных диаграмм (рис. 9) показал, что если относительное отклонение частоты ν_* не превосходит величины

$$\Delta \nu_* = 0.2 / i_B,$$

где i_B – число витков пружины, то искажениями в работе волнового синфазного поля можно пренебречь. В частности, амплитуда указанного колебания будет образовывать однородное поле, а соответствующую жёсткость при расчёте устройства

допустимо считать бесконечной. В тоже время коэффициенты жёсткости пружины при продольном сжатии и сдвиге, а также аналогичные коэффициенты для волнового поля синфазных колебаний, будут на один – два порядка ниже, чем у других элементов волноводной системы.

Последнее замечание необходимо обсудить. Если на противоположном (по отношению к генератору) конце пружины или винтового стержня имеется жёсткое ограничение для продольного перемещения, то амплитуда соответствующего колебания будет малой (рис. 10), и энергия продольных колебаний передаваться не

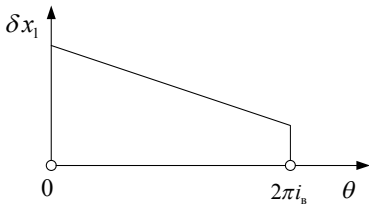


Рис. 10 – Изменение амплитуды продольных синфазных колебаний на стационарном режиме работы устройства.

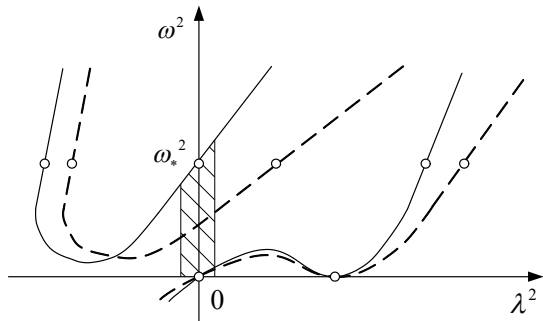


Рис. 9– Совмещённая дисперсионная диаграмма (сплошные линии отвечают поперечным колебаниям, пунктирные – продольным; штриховкой выделен интервал волновых чисел при синфазных колебаниях).

будет. Это же замечание относится и к амплитуде для тангенциального сдвига выходного конца стержня, а также к амплитудам его кручения и изгиба в двух плоскостях.

Но амплитуда радиального смещения на выходном конце будет такой же, как и на входном. То есть, в отношении этого фактора стержень на резонансной синфазной частоте ведёт себя как твёрдое тело. В частности, если по данной координате действует значительная сила сопротивления, то она будет непосред-

венно прикладываться к генератору колебаний, и он будет её преодолевать. При этом если стержень не имеет целого числа витков, то эта сила сохранит свою величину, но изменит направление действия. И поскольку эта сила является пульсирующей, то возникающий момент также будет пульсировать и не приведёт к заметным перемещениям волновода.

Прочность и жёсткость стержня при синфазных колебаниях. Изучены факторы, влияющие на прочность винтового волновода при его колебаниях на режимах волнового поля. Оказалось, что они аналогичны требованиям, которые предъявляют к интенсивности динамической деформации стержня на низких частотах, но вместо скорости смещения опоры здесь ограничивается скорость изменения амплитуды её колебаний. В частности, для обеспечения усталостной прочности материала достаточно, чтобы максимальная скорость изменения амплитуды не превосходила величины $\Delta v = 5 \text{ мкм/мкс}$; для устройств резонансной техники это условие выполняется с запасом.

Такой результат объясняется тем, что на прочность влияет не абсолютное перемещение сечения стержня, а относительное смещение соседних сечений. Что касается известного отрицательного влияния температуры на упругие свойства материала, то его необходимо учитывать, но по сравнению с имеющимися аналогами оно ослабляется в силу снижения потерь энергии в передаче.

Коэффициент жёсткости $\delta Z_{\text{пр}}$ изменения амплитуды δq_1 перерезывающей силы при синфазных колебаниях определяется по тем же формулам из справочника [12], что и коэффициент $Z_{\text{пр}}$ жёсткости этой пружины при её продольной деформации. Для тангенциальных (по отношению к точке закрепления пружины) синфазных колебаний коэффициент жёсткости $\delta Z_{\text{тан}}$ определяется равенством

$$\delta Z_{\text{тан}} = \delta Z_{\text{пр}} / [2(1 + \mu)],$$

и он совпадает с коэффициентом жёсткости $\delta Z_{\text{поп}}$, который возникает при поперечном смещении одной из опор, когда вторая опора неподвижна. Последний результат был, например, приведен в [13], где для анализа всех форм деформаций пружины использовалась модель эквивалентного стержня.

Если винтовой стержень имеет угол навивки $\delta < 10^0$ и число витков $i_b > 4$, то коэффициенты жёсткости $\delta Z_{\text{пр}}, \delta Z_{\text{поп}}$ оказываются меньшими аналогичных коэффициентов для прямого стержня на один-два порядка, что существенно понижает известные требования к точности позиционирования генератора колебаний относительно обрабатываемой поверхности.

Винтовой волновод для ультразвуковой финишной обработки,

сварки и резки. В современной технологии безабразивной ультразвуковой финишной обработки поверхности металла пружину предлагается использовать как элемент волноводной системы (рис. 11). Она устанавливается между магнитострикционным элементом, генерирующим поперечные колебания с частотой $\nu_* = 22$ кГц (или 50 кГц, 80 кГц) и амплитудой $\Delta h = 5...25$ мкм,

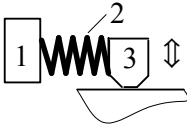


Рис.11 – Схема устройства:
1 – генератор;
2 – винтовой волновод;
3 – индентор.

и индентором, что существенно повышает функциональные качества системы. Жёсткость пружины достаточна, чтобы обеспечить необходимое усилие прижатия $F_1 = 100...300$ Н.

Аналогичную схему можно применять и при ультразвуковой сварке металлов, а также при резке и сваривании мягких пластмасс. Соответствующие методы ультразвуковой обработки пластмасс осуществляются на резонансной частоте 18...50 кГц при амплитуде продольной деформаций 30...70 мкм и усилии прижатия $F_1 = 50...150$ Н.

Винтовой сонотрод для сваривания жёстких пластмасс. При сваривании жёстких пластиков необходимо обеспечить поперечные колебания излучателя тепловой энергии – сонотрода, работающего с амплитудой 40 мкм и частотой 22 кГц, причём эта амплитуда должна быть выровненной на участке, длина которого превышает длину возбуждающей волны на порядок. Известное решение использует пластину специальной формы, к которой подключают 5 генераторов колебаний (рис. 2). Более эффективное решение даёт пружина с практически сомкнутыми витками и проволокой прямоугольного сечения (рис. 12), в которой возбуждаются синфазные поперечные радиальные колебания. Тогда можно использовать один генератор, а частоту колебаний повысить до уровня 130...150 кГц.

Заметим, что если воспользоваться эквивалентной моделью (см. [10]), то пружину для этого устройства, в принципе, можно заменить отрезком пустотелого цилиндрического стержня (рис. 13). Ясно, что такое решение обеспечит более равномерный подвод тепла в зону сваривания и может показаться идеальным. Но тогда генератор обязан возбуждать не поперечные, а радиальные колебания опоры, и это будет связано с известными техническими сложностями. Кроме того, жёсткость стержня будет значительно выше жёсткости пружины, и мы потеряем важное преимущество нового

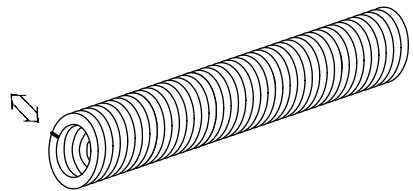


Рис. 12 – Винтовой сонотрод для сваривания жёстких пластмасс.

способа передачи энергии.

Винтовой упругий трансформатор. В волноводных системах резонансной ультразвуковой техники для увеличения амплитуды колебаний используют трансформаторы упругих колебаний; их часто изготавливают в виде прямого стержня переменного сечения, площадь которого изменяют по ступенчатому или непрерывному закону. Такое же усиление для амплитуды продольных колебаний обеспечит винтовой стержень переменного сечения, если при его навивке обеспечить постоянный радиус кривизны нейтрального волокна (как

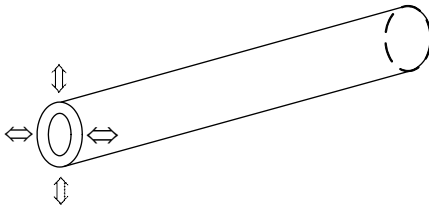


Рис. 13 – Синфазный цилиндрический соноотрод.

это сделано в конструкции штопора), или плавно изменять угол δ подъёма спирали.

Заметим, что сказанное не относится к поперечным радиальным синфазным колебаниям, которые и для винтового стержня переменного сечения будут иметь квазиоднородное поле амплитуд.

Винтовой соноотрод для гомогенизатора. В ультразвуковых гомогенизаторах различного назначения (например, используемых в биотехнологиях) обычно в качестве соноотрода используются титановые стержни. Известно, что титановые сплавы почти в 2 раза легче стали, но зависимость упругих свойств от температуры у титановых сплавов существенно выше. Однако в гомогенизаторе, как правило, происходит эффективное охлаждение соноотрода, и для этих условий работы титан имеет больше преимуществ, чем сталь.

Заметим, что радиус кривизны винтовой линии зависит не только от радиуса R направляющего цилиндра, но и от угла её подъёма $R_{кр} = R / \cos \delta$.

Винтовой стержень (рис. 14), навитый из титановой проволоки при угле подъёма спирали $\delta \approx 75...80^\circ$, рекомендуется использовать как соноотрод для ультразвуковых гомогенизаторов. При резонансной частоте 22 кГц и диаметре проволоки $d=6...8$ мм это обеспечит такой же поперечный размер соноотрода, как у его аналогов, но продольный размер можно увеличить на порядок (он ограничен

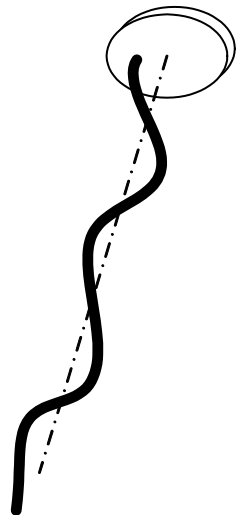


Рис. 14 – Винтовой титановый соноотрод для гомогенизатора.

только величиной отклонения частоты $\Delta\nu_*$), что позволит применять гомогенизатор в узких длинных каналах. Поперечные однородные колебания сонотрода можно совместить с его продольными синфазными колебаниями, что повысит кавитацию и улучшит перемешивание.

Выводы. Показано, что волновые поля синфазных продольных и связанных нелинейных колебаний пружины описываются уравнениями того же типа, что и низкочастотные колебания самой пружины. Пружину можно использовать в ультразвуковой технике как волновод.

Список литературы: 1. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 423 с. 2. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 4. Ванин В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 5. Ванин В.А., Григорьев А.А. Результаты математического моделирования винтовых волн трансляции в нелинейных упругих континуумах, вибрирующих синфазно // Вестник НТУ «ХПИ». – 2012. – № 27. – С.57-73. 6. Ванин В.А., Григорьев А.А. Волновое поле синфазных связанных колебаний цилиндрической пружины и его солитоны // Математические методы в технике и технологиях // Сб. трудов XXV междунар. науч. конф. – Саратов, 2012. – Т.3. – С.19-22. 7. Зори А.А., Соломичев Р.И., Тарасюк В.П. Исследование затухания ультразвука в воздухе и структуре металла валков горячей прокатки из стали 150 ХНМ // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков, 2010. – № 12. – С.51-56. 8. Сенченко И.К. Модальная классификация и проектирование сонотродов для ультразвуковой сварки пластмасс // Акустичний вісник. – 1998. – 1, №4. – С.55-64. 9. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С.20-30. 10. Ванин В.А., Григорьев А.А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С.23-37. 11. Ванин В.А., Григорьев А.А., Деряченко А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 12. Справочник машиностроителя. В трех томах. / Под ред. Е.А. Чудакова. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. – 1098 с. 13. Хвингия М.В. Вибрация пружин. – М.: Машиностроение, 1969.

Поступила в редколлегию 07.10.2012

УДК 539.1

Моделирование синфазных упругих колебаний в волноводах и сонотродах винтовой формы / В.А. Ванин, А.А. Григорьев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання у техніці та технологія». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.25–38. – Бібліогр.: 13 назв.

Розроблені математичні моделі хвильового синфазного поля поздовжніх та зв'язаних коливань гвинтового стрижня. Встановлено ізоморфізм між двома полями зв'язаних коливань – хвильовим та звичайним, що дозволило розповсюдити на хвильове поле теорію солітонів Рассела. Описано приклади використання хвильових полів в гвинтовому стрижні для передачі енергії ультразвукових коливань.

Ключові слова: гвинтовий стрижень, пружні коливання, хвильове поле, солітони Рассела, ультразвуковий хвилевід, сонотрод.

The mathematical model of wave-phase field of longitudinal vibrations and related helical rod. Set isomorphism between the two fields related fluctuations - and the ordinary wave, which allowed to extend to the wave field methods for calculating the strength of the rod and the theory of solitons Russell. Describes examples of wave fields to transfer energy ultrasonic vibrations.

Key words: screw rod, elastic vibrations, the wave field solitons Russell ultrasound waveguide sonotrode.