УДК 17.27

В.С. ЗАХАРЯН, д-р физ.-мат. наук, акад. НАН Армении, Ереван;
Р.В. ДАЛЛАКЯН, канд. физ.-мат. наук, ГИУА, Ереван

О РОСТЕ α – ХАРАКТЕРИСТИК И ПРОИЗВОДНОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

Для случая $-1<\alpha\leq 0$ доказывается существование функций, имеющих еще больший рост α – характеристики, чем у ядер М. М. Джрбашяна. Доказывается, что рост производной произведений М. М. Джрбашяна на некоторой последовательности может быть бесконечным, и показан порядок роста. В частном случае $\alpha=0$ α -характеристика совпадает с неванлинновской, а произведения М. М. Джрбашяна переходят в обычные произведения Бляшке. Для этого случая вышеуказанные задачи были решены А. Г. Нафталевичем.

Ключевые слова: дробное интегродифференцирование, оператор Римана – Лиувилля, ядра и произведения М.М. Джрбашяна, мероморфная функция, α - характеристика.

Введение. В [1] *М.М. Джрбашян* с применением *оператора дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля* построил теорию факторизации классов N_α, $-1<\alpha<+\infty$, *неванлинновского типа*.

Класс N_0 совпадает с классом N *Р. Неванлинны* [2].

При $-1<\alpha<0$ классы N_α вложены в неванлинновский класс N, а при $\alpha>0$ содержат неванлинновский класс.

Функции классов N_α обладают тонкими граничными свойствами. Этой теории посвящена монография М. М. Джрбашяна и *В. С. Захаряна* [3].

По аналогии с классом N мероморфных в круге $|z|<1$ функций с ограниченной неванлинновской характеристикой $T(\rho;\, F)$, классы N_α обладают ограниченностью α – характеристик $T_\alpha(\rho;\, F)$ М. М. Джрбашяна, исследованием которой занимали многие специалисты. В работе [4] *А. М. Джрбашяном* для случая $\alpha>0$ найдена естественная связь между характеристиками $T(\rho;\, F)$ и $T_\alpha(\rho;\, F)$, что связана с затруднениями для случая $-1<\alpha<0$.

В [1] также были введены произведения $B_\alpha(z;\, \{z_n\})$, которые в случае $\alpha=0$ превращаются в обычные *произведения Бляшке*.

В работе [5] обнаружена связь между произведениями Бляшке и произведениями $B_\alpha(z;\, \{z_n\})$, когда $-1<\alpha<0$.

Данная работа устанавливает две теоремы о росте α - характеристики и о росте производной произведения $B_\alpha(z;\, \{z_n\})$ на некоторой последовательности.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$, $f(z)$ *– аналитическая в единичном круге функция, нули* $\{a_\mu\}$ *которой удовлетворяют условию*

$$\sum_\mu \left(1-|a_\mu|\right)^{1+\alpha}<+\infty,$$

и пусть $\{\alpha_i\}$ *– последовательность неубывающих положительных чисел, таких, что* $\alpha_i\to 1$ *при* $i\to+\infty$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha}<+\infty.$$

Тогда существует комплексная последовательность $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i|=\alpha_i$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{T_\alpha(r;f)}{(1+\alpha)\ln\dfrac{1}{1-r}}\ge \nu-1+\beta,$$

если

(i) $$\underline{\lim_{i\to\infty}}\left(1-\alpha_i\right)^{\nu(1+\alpha)}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f(\lambda_i)\right|\right\}=H>0$$

(ii) $$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln n(r;\alpha)}{(1+\alpha)\ln\dfrac{1}{1-r}}=\beta;\quad \beta\le 1,$$

где $n(r;\alpha)$ *– количество точек* α_i *в круге* $|z|<r$.

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha\le 0$ *и пусть* $\{\alpha_i\}$*–последовательность неубывающих положительных чисел, таких, что* $\alpha_i\to 1$ *при* $i\to+\infty$ *и*

$$\sum\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha}<+\infty.$$

Тогда существует комплексная последовательность $\lambda=\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i|=\alpha_i$, *такая, что*

$$\left|B_{(\alpha)}^{(k)}(\lambda_k;\lambda)\right|=|\lambda_k|\left|B'_\alpha(\lambda_k;\lambda)\right|\cdot e^{\operatorname{Re}W_\alpha(\lambda_k;\lambda_k)}>C>0,$$

где C *– некоторая постоянная;* $B_\alpha^{(k)}(z;\lambda)$ *– произведение М. М. Джрбашяна без* k *– ого множителя.*

Замечание. При значении $\alpha=0$ утверждения обоих теорем было доказано *А. Г. Нафталевичем* [6].

Обозначения, определения и доказательства. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $L(0,l)$, $0<l<+\infty$. *Интегралом от* $f(x)$ *порядка* α $(0<\alpha<+\infty)$ *с началом в точке* $x=0$ принято называть функцию

$$D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad x \in (0,\, l).$$

Определим

$$D^0 f(x) = f(x).$$

Теперь пусть α $(0<\alpha<+\infty)$ задано, и целое число $p \geq 1$ определяется из условия $p-1<\alpha \leq p$. Пусть, далее, $f(x) \in L(0;\, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left\{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \right\}$$

почти всюду на $(0;l)$ имеет производную.

Тогда функция

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{d^p}{dx^p} \left\{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \right\}$$

называется *производной порядка* α *от функции* $f(x)$ *с началом в точке* $x=0$.

Отметим, что при целом α функция $D^{\alpha} f(x)$ совпадает с обычной производной $f^{(n)}(x)$.

Для любого значения параметра α $(-1<\alpha<+\infty)$ введем в рассмотрение следующие функции:

$$C_{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}, \qquad (|z|<1),$$

$$S_{\alpha}(z) = 2C_{\alpha}(z) - C_{\alpha}(0) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (|z|<1),$$

$$p_{\alpha}(\varphi;\, r) = \operatorname{Re} S_{\alpha}\left(re^{i\varphi}\right) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{\left(1-re^{i\varphi}\right)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (0<r<1).$$

Эти ядра будем называть *ядрами М.М. Джрбашяна*. При $\alpha=0$ ядра М.М. Джрбашяна переходят, соответственно, в *ядра Коши*, *Шварца* и *Пуассона*.

Пусть функция $F(z)$ мероморфная в единичном круге $|z|<1$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ – это, соответственно, последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке не убывания их модулей, причем каждый нуль или полюс записан столько раз, какова его кратность. Пусть, далее, в окрестности точки $z=0$ функция $F(z)$ имеет разложение в *ряд Лорана* вида

$$F(z)=C_\lambda z^\lambda + C_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\ldots \qquad (C_\lambda\neq 0),$$

и, таким образом, при $\lambda\neq 0$ число $|\lambda|$ равно кратности нуля (при $\lambda\geq 1$) или полюса (при $\lambda\leq -1$) в точке $z=0$.

Для любого α $\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ и ξ $\left(0<|\xi|<1\right)$ введем в рассмотрение следующую функцию:

$$A_\alpha(z;\,\xi)=\left(1-\frac{z}{\xi}\right)\exp\left\{-W_\alpha(z;\xi)\right\},\qquad |z|<1,$$

где

$$W_\alpha(z;\xi)=\int\limits_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\times$$
$$\left\{\xi^{-k}\int\limits_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\xi^{-k}\int\limits_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k.$$

Если

$$\sum\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то произведение

$$B_\alpha(z;\,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_\alpha(z;z_k)$$

является аналитической функцией в единичном круге $|z|<1$, обращающейся в нуль только на последовательности $\{z_k\}$.

Введем еще несколько важных обозначений.

Для любого t $\left(0<t<1\right)$ выражениями $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ обозначим, соответственно, число нулей a_μ и полюсов b_ν, лежащих в круге $|z|\leq t$, а $n(0;0)$ и $n(0;\infty)$ – кратности нуля и полюса функции $F(z)$ в точке $z=0$.

Далее, пусть $-1<\alpha<+\infty$,

$$k_\alpha = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\ D_{(+)}^{-\alpha}\varphi(r)=\begin{cases} D^{-\alpha}\varphi(r), & \text{при } D^{-\alpha}\varphi(r)\ge 0,\\ 0, & \text{при } D^{-\alpha}\varphi(r)\le 0,\end{cases}$$

$$N_\alpha(\rho;F)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{0<b_\nu\le\rho}W_\alpha\left(0;\frac{b_\nu}{\rho}\right)+\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\ln\rho-k_\alpha\right]=$$

$$=\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\rho\frac{(\rho-t)^\alpha}{t}\left[n(t;\infty)-n(0;\infty)\right]dt+\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\ln\rho-k_\alpha\right],$$

$$m_\alpha(\rho;F)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|F\left(\rho e^{i\Theta}\right)\right|\right\}d\Theta.$$

После чего естественно ввести в рассмотрение также функцию

$$T_\alpha(\rho;F)=m_\alpha(\rho;F)+N_\alpha(\rho;F).$$

Эта функция называется α – *характеристической функцией* функции $F(z)$ или просто α – *характеристикой*. Легко видеть что, при

$$T_\alpha(\rho;F)\big|_{\alpha=0}=T(\rho;F),\ \text{то есть при } \alpha=0,$$

введенная α – характеристика функции F совпадает с обычной неванлиновской характеристикой.

Доказательство теоремы 1. Из условия (ii) следует, что существует последовательность $\{r_n\}\uparrow 1$, для которой

$$n\left(r_n;\{\alpha_i\}\right)\cdot(1-r_n)^{\beta(1+\alpha)}\to 1\quad\text{когда } n\to\infty.$$

Пусть $N=n\left(r_n;\{\alpha_i\}\right)$, тогда

$$N(1-\alpha_N)^{\beta(1+\alpha)}\ge n\left(r_n;\{\alpha_i\}\right)\cdot(1-r_n)^{\beta(1+\alpha)}.$$

Это означает, что для любого числа ε, $\varepsilon>0$

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, i(1-\alpha_i)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon}=+\infty.$$

Следовательно, можно указать такие числа $i_1,i_2,\ldots,i_n,\ldots$, что для $j<i_n$ будет выполнено неравенство

$$j\left(1-\alpha_j\right)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon}\le i_n\left(1-\alpha_{i_n}\right)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon}.$$

В силу последнего неравенства для $r<\alpha_{i_n}$ имеем

$$n\left(r;\{\alpha_i\}\right)\cdot(1-r)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon}\le i_n\left(1-\alpha_{i_n}\right)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon}=t_n\to+\infty\ \text{при}\quad n\to\infty. \quad (1)$$

Пусть

$$\left(1-r\right)^{1+\alpha}=2\left(1-\alpha_{i_n}\right)^{1+\alpha}=4\left(1-R_n\right)^{1+\alpha}, \tag{2}$$

тогда из (1) получаем:

$$i_n=t_n\left(1-\alpha_{i_n}\right)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}=2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\cdot t_n\left(1-R_n\right)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}$$

$$n\left(r;\{\alpha_i\}\right)\le 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\cdot t_n\left(1-R_n\right)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}$$

Пусть L_n – количество точек α_i, лежащих в промежутке $[r,\alpha_{i_n}]$, тогда

$$L_n=i_n-n\left(r;\{\alpha_i\}\right)\ge\left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}-4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\right)\cdot t_n\left(1-R_n\right)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}. \tag{3}$$

Пусть $\{\lambda_i\}$ – последовательность комплексных чисел, построенная в работе [7], т. е $\{\lambda_i\}$ такая, что $|\lambda_i|=\alpha_i$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\alpha_i\right)^{\alpha+1}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}=+\infty .$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i_n}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}&\ge\sum_{r\le\alpha_i\le\alpha_{i_n}}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}=\\&=\sum_{r\le\alpha_i\le\alpha_{i_n}}\left(1-\alpha_i\right)^{\nu(1+\alpha)}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}\cdot\left(1-\alpha_i\right)^{(1-\nu)(1+\alpha)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда в случае, когда $\nu\ge1$, пользуясь условием (i) теоремы, а также соотношениями (2) и (3) для любого δ; $0<\delta<H$, получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i_n}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}&\ge\left(1-r\right)^{(1-\nu)(1+\alpha)}\left(H-\delta\right)\left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}-4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\right)\times\\ t_n\left(1-R_n\right)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}&=4^{1-\nu}\cdot\left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}-4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\right)\cdot\left(H-\delta\right)\times\\ t_n\cdot\left(1-R_n\right)^{(1-\nu)(1+\alpha)-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}&=C_n\cdot\left(1-R_n\right)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon},\end{aligned}$$

где $C_n\to\infty$.

Таким образом, при $\nu\ge1$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha}D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\}\ge C_n\cdot\left(1-R_n\right)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon}, \tag{5}$$

где $C_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Теперь пусть $0<\nu<1$. Тогда из (4), пользуясь (2) и (3), получаем:

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \geq \left(1-\alpha_{i_n}\right)^{(1-\nu)(1+\alpha)}\left(H-\delta\right)\left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}-4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\right)\times$$

$$t_n\cdot\left(1-R_n\right)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}=2^{1-\nu}\cdot\left(H-\delta\right)\cdot\left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}-4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}}\right)\times$$

$$\left(1-R_n\right)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon}=C_n\cdot\left(1-R_n\right)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon},$$

где $C_n\to\infty$. Из (5) и последнего неравенства следует, что для любого ν; $\nu>0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \geq C_n\cdot\left(1-R_n\right)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon},$$

где $C_n\to\infty$. Но это неравенство верно для любого положительного числа ε, значит

$$\sum_{i=1}^{i_n}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \geq C_n\cdot\left(1-R_n\right)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)}. \tag{6}$$

В работе [7] доказано, что при таком выборе последовательности $\left\{\lambda_i\right\}$ справедливо такое неравенство:

$$T_\alpha\left(R_n;\,f\right)\geq const\cdot\sum_{1-\alpha_i\geq 2\left(1-R_i\right)}\left(1-\alpha_i\right)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \tag{7}$$

Из (6) и (7) и следует справедливость утверждения теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\lambda=\left\{\lambda_n\right\}$ – построенная А.Г. Нафталевичем последовательность (см. [6], стр. 17), то есть $\lambda=\left\{\lambda_n\right\}$ – это такая последовательность, что $\left|\lambda_i\right|=\alpha_i$, $i=1,2,...$ и

$$\left|B'\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|\cdot\left(1-\left|\lambda_k\right|\right)\geq C_1>0.$$

Пусть далее

$$B_\alpha\left(z;\lambda\right)=\prod_{n=1}^{\infty}A_\alpha\left(z;\lambda_n\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\cdot e^{-W_\alpha\left(z;\lambda_n\right)},$$

тогда, что очевидно,

$$B'_\alpha\left(z;\lambda\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A'_\alpha\left(z;\lambda_n\right)\cdot\prod_{\substack{m\neq n\\ m=1}}^{\infty}A_\alpha\left(z;\lambda_m\right).$$

Следовательно, для любого натурального числа k имеем:

$$B'_\alpha\left(\lambda_k;\lambda\right)=A'_\alpha\left(\lambda_k;\lambda_k\right)\cdot\prod_{\substack{m\neq k\\ m=1}}^{\infty}A_\alpha\left(z;\lambda_m\right). \tag{8}$$

Теперь пусть

$$B_\alpha^{(k)}\left(z;\lambda\right)=\prod_{\substack{m\neq n\\ m=1}}^{\infty}A_\alpha\left(z;\lambda_m\right). \tag{9}$$

Ясно, что

$$A'_\alpha\left(z;\lambda_k\right)=-\frac{1}{\lambda_k}e^{-W_\alpha\left(z;\lambda_k\right)}-\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)e^{-W_\alpha\left(z;\lambda_k\right)}\cdot W'_\alpha\left(z\right).$$

Значит

$$A'_\alpha\left(\lambda_k;\lambda_k\right)=-\frac{1}{\lambda_k}e^{-W_\alpha\left(\lambda_k;\lambda_k\right)} \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) несложно увидеть, что

$$B_\alpha^{(k)}\left(\lambda_k;\lambda\right)=\lambda_k B'_\alpha\left(\lambda_k;\lambda\right)e^{W_\alpha\left(\lambda_k;\lambda_k\right)},$$

откуда

$$\left|B_\alpha^{(k)}\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|=\left|\lambda_k\right|\cdot\left|B'_\alpha\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|\cdot e^{\operatorname{Re}W_\alpha\left(\lambda_k;\lambda_k\right)} \tag{11}$$

Известно, что когда $-1<\alpha<0$, то (см. [5])

$$B_\alpha\left(z;\lambda\right)=B\left(z;\lambda\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\Theta}z\right)d\omega\left(\Theta\right)\right\},$$

где $B\left(z;\lambda\right)$ – *произведение Бляшке* с нулями на последовательности λ, $\omega\left(\Theta\right)$ – некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0;2\pi]$. Следовательно

$$B'_\alpha\left(z;\lambda\right)=B\left(z;\lambda\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\Theta}z\right)d\omega\left(\Theta\right)\right\}+$$
$$+e^{-i\Theta}B\left(z;\lambda\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\Theta}z\right)d\omega\left(\Theta\right)\right\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\Theta}z\right)d\omega.$$

Значит

$$B'_\alpha\left(\lambda_k;\lambda\right)=B'\left(\lambda_k;\lambda\right)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\Theta}\lambda_k\right)d\omega\left(\Theta\right)\right\}.$$

Пользуясь этим равенством из (11) получаем:

$$\left|B_{\alpha}^{(k)}\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|=\left|\lambda_k\right|\left|B'\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_{\alpha}\left(e^{-i\Theta}\lambda_k\right)d\omega(\Theta)+\operatorname{Re}W_{\alpha}\left(\lambda_k;\lambda_k\right)\right\}=$$

$$=\frac{\left|\lambda_k\right|}{1-\left|\lambda_k\right|}\cdot\left|B'\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|\cdot\left(1-\left|\lambda_k\right|\right)\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_{\alpha}\left(e^{-i\Theta}\lambda_k\right)d\omega(\Theta)+\operatorname{Re}W_{\alpha}\left(\lambda_k;\lambda_k\right)\right\}.$$

Но последовательность λ такова, что

$$\left|B'\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|\cdot\left(1-\left|\lambda_k\right|\right)\geq C_1>0,$$

где C_1 – некоторая постоянная (см.[6], стр. 17), следовательно

$$\left|B_{\alpha}^{(k)}\left(\lambda_k;\lambda\right)\right|\geq\frac{C_2}{1-\left|\lambda_k\right|}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_{\alpha}\left(e^{-i\Theta}\lambda_k\right)d\omega(\Theta)+\operatorname{Re}W_{\alpha}\left(\lambda_k;\lambda_k\right)\right\}. \quad (12)$$

Не трудно увидеть, что

$$\operatorname{Re}S_{\alpha}\left(e^{-i\Theta}\lambda_k\right)=\operatorname{Re}S_{\alpha}\left(\alpha_k e^{i(\varphi_k-\Theta)}\right)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\operatorname{Re}\frac{2}{[1-\alpha_k e^{i(\varphi_k-\Theta)}]^{1+\alpha}}-1\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\frac{2\cos\gamma_k}{\left[1-2\alpha_k\cos\left(\varphi_k-\Theta\right)+\alpha_k^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}}-1\right\},$$

где

$$\gamma_k=\gamma\left(\varphi_k;\Theta\right)=\arg\left[1-2\alpha_k\cos\left(\varphi_k-\Theta\right)+\alpha_k^2\right]^{1+\alpha}.$$

Поскольку $\omega(\Theta)$ – невозрастающая функция, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_{\alpha}\left(e^{-i\Theta}\lambda_k\right)d\omega(\Theta)\geq\frac{1}{2\pi\cdot\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\left\{2\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\omega(\Theta)}{\left[\left(1-\alpha_k\right)^2+4\alpha_k\cdot\sin^2\left[(\Theta-\varphi_k)/2\right]\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}}-\int_0^{2\pi}d\omega(\Theta)\right\}. \quad (13)$$

Обозначим $\Theta-\varphi_k=\gamma$. Если $\left|\gamma\right|>\gamma_0>0$, где γ_0 – некоторое наперед заданное число, то очевидно

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega(\Theta)}{\left[\left(1-\alpha_k\right)^2+4\alpha_k\cdot\sin^2\left[(\Theta-\varphi_k)/2\right]\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}}\geq C_3. \quad (14)$$

Если величина γ достаточно маленькая и $\gamma\geq 0$, то

$$\int_{\varphi_k}^{\gamma_0} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[(1-\alpha_k)^2+4\alpha_k\cdot\sin^2\frac{\Theta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq \int_0^{\gamma_0-\varphi_k} \frac{d\omega(\gamma+\varphi_k)}{(1-\alpha_k+\gamma)^{1+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\gamma_0-\varphi_k} \omega'(\gamma+\varphi_k)\,d(1-\alpha_k+\gamma)^{-\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}(1-\alpha_k+\gamma)^{-\alpha}\cdot\omega'(\gamma+\varphi_k)\Big|_0^{\gamma_0-\varphi_k} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{\gamma_0-\varphi_k}(1-\alpha_k+\gamma)^{-\alpha}\,d\omega'(\gamma+\varphi_k).$$

Но ω – убывающая функция; значит, *почти всюду* существует конечная производная ω', откуда следует, что

$$\int_{\varphi_k}^{\gamma_0} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[(1-\alpha_k)^2+4\alpha_k\cdot\sin^2\frac{\Theta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_4\,. \qquad (15)$$

Аналогичным образом, обозначив $\varphi_k-\Theta=\gamma$, легко увидеть, что

$$\int_{-\gamma_0}^{\varphi_k} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[(1-\alpha_k)^2+4\alpha_k\cdot\sin^2\frac{\Theta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_5\,. \qquad (16)$$

Из (13) пользуясь (14), (15) и (16) получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[(1-\alpha_k)^2+4\alpha_k\cdot\sin^2[(\Theta-\varphi_k)/2]\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_6\,. \qquad (17)$$

Теперь выполним оценку снизу:

$$W_\alpha(\lambda_k;\lambda_k) = \int_{\alpha_k}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}dx - \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}\times$$

$$\left\{\int_0^{\alpha_k}(1-x)^\alpha x^{n-1}dx - \alpha_k^{2n}\int_{\alpha_k}^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1}dx\right\}.$$

Следовательно, поскольку $W_\alpha(\lambda_k;\lambda_k)=W_\alpha(\alpha_k;\alpha_k)$, то по лемме 1 из работы [8] имеем:

$$W_\alpha(\lambda_k;\lambda_k) = \ln(1-\alpha_k) + \int_0^{\alpha_k}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}dx + \int_{\alpha_k}^1 \frac{1-x}{x(1-r^2/x)^{1+\alpha}}dx\,.$$

Не трудно убедится, что в последнем равенстве оба подынтегральные выражения положительные, значит

$$W_{\alpha}\left(\lambda_k;\lambda_k\right) \geq \ln\left(1-\alpha_k\right). \tag{14}$$

Из (12) пользуясь (13) и (14) получаем неравенство

$$\left|B_{\alpha}^{(k)}\left(\lambda_k;\lambda\right)\right| \geq C_4,$$

причем, что очевидно $C_4 > 0$.

Список литературы: **1.** *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области – М.: Наука, 1966. **2.** *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – Гостехиздат.– М.-Л., 1941. **3.** *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. – М.: «Физико-математическая литература». – ВО «Наука», 1993. **4.** *Джрбашян А. М.* О расширении теории факторизации М.М. Джрбашяна и прилежащих задачах анализа // Известия НАН Армении, Математика – 2009. – Т. 44. – № 6 – С. 5 – 62. **5.** *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* О факторизации функций B_{α} // Математические заметки, Т. 4, – № 1 (1968). – С. 3 – 10. **6.** *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций ограниченного вида // Учёные записки Вильнюсского университета. – 1956. –№ 5. – С.5 – 27. **7.** *Апресян С. А., Даллакян Р. В.* Одно замечание о α – характеристике регулярных в единичном круге функций // Математика в высшей школе. – 2010, Ереван. – Т. IV. – № 3. – С. 13 – 20. **8.** *Захарян В.С., Оганисян И. В.* О коэффициентах Тейлора произведений М. М. Джрбашяна $B_{\alpha}\left(z;z_k\right)$ // Известия Академии Наук Арм. ССР. – Математика, 1998. – XXIII. – № 6. – С. 588 – 593.

Поступила в редколлегию 10.10.2012

УДК 17.27

О росте α – характеристик и производной произведений М. М. Джрбашяна / В. С. Захарян, Р. В. Даллакян // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.63-73. – Бібліогр.: 8 назв.

Для випадку $-1<\alpha\leq 0$ доводиться існування функцій, які мають ще більше зростання α – характеристики, ніж ядра М. М. Джрбашяна. Доводиться, що зростання похідної добутків М. М. Джрбашяна на деякій послідовності може бути нескінченним, і вказаний порядок зростання. В частинному випадку $\alpha=0$ α - характеристика співпадає із неванлиновською, а добутки М. М. Джрбашяна переходять у звичайні добутки Бляшке. Для цього випадку вищевказані задачі були розв'язані А. Г. Нафталевичем.

Ключові слова: дробове інтегродиференціювання, оператор Рімана – Ліувіля, ядра й добутки М. М. Джрбашяна, мероморфна функція, α - характеристика.

The existence of functions that have more growth α - characteristics than nuclear Dzhrbashyan for the case $-1<\alpha\leq 0$ is proved. Proved, that the growth of the derivative of Dzhrbashyan's products on a sequence can be endless, and shows how growth. In the particular case $\alpha=0$ the characteristic coincides with Nevanlinna's characteristic, and Dzhrbashyan's products skip on Blaschke's products. For this case, the above-mentioned problems were solved by A. Naftalevich.

Key words: fractional integraldifference, operation Riemann – Liouville, kernel and multiplation Dzhrbashyan, meromorphic function, α - characteristics.