

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ СЛАБО ФОРМАЛІЗОВАНИХ ПРОЦЕСІВ З ЕФЕКТОМ ЗАПІЗНЕННЯ В n -ВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

Розглядається проблема моделювання та прогнозування стаціонарних часових рядів, що описують слабо формалізовані процеси. Пропонується алгоритм параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі в n -вимірному фазовому просторі.

Ключові слова: фазовий простір, керування, ідентифікація, ефект запізнення.

Вступ. Проблема моделювання динамічних систем – одна з найважливіших і актуальніших в економіці та техніці. Більшість об'єктів, що зустрічаються в практичних дослідженнях, відносять до класу слабо формалізованих систем, в яких виникають і діють неформалізовані та невизначені фактори. Тому встановити всілякі зв'язки між елементами слабо формалізованої системи практично неможливо. Як наслідок, не вирішеною залишається проблема вибору фазових координат \mathbf{x} , які б однозначно і повністю визначали поведінку чи еволюцію даної системи. Однак економічні, технічні, як і багато інших слабо формалізованих систем, є керованими. Керування будь-якою динамічною системою може відбуватися на різних рівнях системної ієрархії в залежності від кінцевої мети і ступеня агрегації параметрів керування [1, 2]. Вектор керувань \mathbf{u} подається на вхід динамічної системи і за його допомогою можна вирішувати проблему специфікації фазових координат та здійснювати керування їх рухом.

Особливістю багатьох фізико-технічних систем є визначеність рівнянь руху, які подаються системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) | \boldsymbol{\theta}_1), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*, \quad (1)$$

апріорна специфікація яких часто веде до ускладненої процедури ідентифікації невідомих параметрів $\boldsymbol{\theta}_1$. Класичні методи статистичної ідентифікації моделей у просторі станів описані в [3]. В огляді [4] розглядаються сучасні методи, покликані подолати труднощі чисельної реалізації нелінійних алгоритмів параметричної ідентифікації, характерних для класичних методів.

Часто у випадку слабо формалізованих динамічних систем задача побудови *дескриптивних моделей* може бути менш визначеною через відсутність сталого виду еволюції. Специфікацію моделей таких систем обирають в зручній для дослідження формі – лінійній, лінійно – квадратичній [5, 6], градієнтного типу [7, 8].

У даній роботі пропонується моделювати розв'язки задачі Коші (1), а

конструювання закону керування здійснювати за допомогою регулюючого пристрою і таким чином переводити досліджуваний об'єкт із деякого початкового стану \mathbf{x}_0 в момент часу t_0 в кінцевий бажаний стан \mathbf{x}_* в момент часу t_* . Регулятор повинен реалізувати найважливішу ідею теорії керування – *принцип оберненого зв'язку* [9], який вказує на те, щоб вектор керувань \mathbf{u} в кожний момент часу був функцією фазових координат та їх похідних, тобто

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) | \boldsymbol{\theta}_2). \quad (2)$$

Тут припускається, що між векторами невідомих параметрів $\boldsymbol{\theta}_1$ в (1) і $\boldsymbol{\theta}_2$ в (2) існує взаємно-однозначний зв'язок. При практичному моделюванні динамічних систем часто доцільно вважати, що реакція керувань на зміну фазових координат відбувається не відразу, а з деяким запізненням τ . Тоді закон керування (2) необхідно задавати у вигляді

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) | \boldsymbol{\theta}_2(\tau)). \quad (3)$$

У якості регулятора використовують допоміжну інформацію відносно величин, які не присутні в рівнянні руху, але є невід'ємною частиною даної динамічної системи [6]. Додатковими величинами системи повинні бути обрані такі її характеристики, що акумулюють якомога більше інформації про досліджувану систему в цілому і відносно яких є доступні статистичні дані. У цій роботі регулятор буде складатись з двох пристроїв, які у будь-який момент часу t формують сумарні значення фазових координат і керувань

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^n x_m(t), \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{m=1}^n u_m(t). \quad (4)$$

Тоді, якщо модельні траєкторії $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$ і $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))'$ налаштовані на високі імітаційні та прогнозні властивості, то, вочевидь, і сумарні траєкторії (4) повинні мати такі ж властивості.

Особливістю моделювання багатьох слабо формалізованих систем є те, що в рівнянні руху (1) невідомими є не лише коефіцієнти $\boldsymbol{\theta}_1$, а й розмірність n фазового простору. Крім того, не специфікованими залишаються компоненти фазового вектора \mathbf{x} і керування \mathbf{u} . В [10] моделювання фазових траєкторій і керувань приводилось у тривимірному просторі ($n = 3$). Дане дослідження стосується n -вимірного фазового простору і, як і в [10], здійснюється в рамках лінійної стаціонарної моделі.

Постановка задачі. Нехай в $N_1 > N$ цілочисельних точках проміжку $[t_0, t_1]$ з відрізка $[t_0, t_k]$ відома статистична інформація $\{x_i\}$ і $\{u_i\}$ про еволюцію показників x і u даної динамічної системи. Множини x і u необхідно розкласти на підмножини x_1, x_2, \dots, x_n і u_1, u_2, \dots, u_n , для яких у вказа-

них N_1 точках відомі статистичні дані $\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm}\}$ і $\{u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tm}\}$, причому у всіх цих точках виконуються рівності

$$\sum_{m=1}^n x_{tm} = x_t, \quad \sum_{m=1}^n u_{tm} = u_t.$$

Стан системи у будь-який момент неперервного часу $t \in [t_0, t_k]$ будемо характеризувати фазовим вектором $\mathbf{x}(t)$, а вхід системи – вектор-стовпцем керувань $\mathbf{u}(t)$ із n -вимірному простору E^n (значення n заздалегідь невідоме). Фазова траєкторія $\{\mathbf{x}(t)\}$ і траєкторія керувань $\{\mathbf{u}(t)\}$ вважаються неперервними вектор-функціями часу і задовольняють задачу Коші

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = P(\tau)\mathbf{x}(t) + Q(\tau)\mathbf{u}(t + \tau), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*, \quad (5)$$

де $P(\tau)$ і $Q(\tau)$ – квадратні матриці (Q – невиворнена матриця), які разом з граничним значенням \mathbf{x}_* і величиною лага τ заздалегідь невідомі.

Метою даної роботи є прогнозування майбутніх станів системи, тому граничні значення диференціальних рівнянь (5) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо $t_* = t_1 = N + 1$, тоді відрізок $[1, N]$ будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_k]$ – періодом прогнозування. Статистичну інформацію в цілочисельних точках відрізка $[N + 1 - N_1, 0]$ будемо використовувати для визначення оптимального значення N . При ідентифікованих значеннях параметрів P , Q , \mathbf{x}_* і τ розв'язок задачі Коші (5) на відрізку $[1, t_*]$ дозволяє перевіряти імітаційні властивості, а розв'язок задачі Коші (5) на відрізку $[t_*, t_k]$ дозволяє встановлювати прогнозні властивості лінійної моделі (5).

Зазначимо, що при моделюванні лінійних стаціонарних моделей з метою прогнозування довжина N періоду ідентифікації повинна бути достатньо великою, щоб на ньому стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. Стаціонарність моделі характеризується високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [11]. Якщо виконані умови стаціонарності, то оцінену на періоді ідентифікації $[1, N]$ лінійну модель (5) можна переносити на період прогнозування $[t_*, t_k]$ за умови $t_k - t_* \ll N$ в силу інерційності динамічної системи [12].

Розв'язок задачі Коші (5) можна шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові [6]. Якщо ці траєкторії ідентифіковані за даними спостережень, то вектор керувань \mathbf{u} може бути знайдений за допомогою оберненого зв'язку:

$$\mathbf{u}(t+\tau) = R(\tau)\mathbf{x}(t) + S(\tau)\dot{\mathbf{x}}(t), \quad R = -Q^{-1}P, \quad S = Q^{-1}. \quad (6)$$

Основна проблема, яка тут виникає, полягає у знаходженні оптимальних значень розмірності n фазового простору і величини лага τ та специфікації компонент фазового вектора \mathbf{x} і вектора керувань \mathbf{u} . Велику роль при вирішенні цієї проблеми відіграє регулятор, який повинен за допомогою балансових рівностей (4) забезпечити високі імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій $x(t)$ і $u(t)$.

Як відомо, в нелінійних динамічних системах можуть виникати незатухаючі коливання. Втрати енергії, визвані присутністю опорів, тут можуть автоматично компенсуватись притоком її із деякого джерела енергії, що входить до складу системи. Це має місце в так званих *автоколивальних системах* [9], в яких можливі строго періодичні стійкі коливання навколо рівноважного стану. У даній роботі буде показано, що незатухаючі стійкі коливання можна отримати і в рамках лінійної стаціонарної моделі (6). Метою нашого дослідження є налаштування фазових координат і керувань на періодичні коливання навколо відповідних лінійних трендів.

Метод розв'язання задачі. За аналогією з відомими методами аналізу часових рядів [12] будемо припускати, що траєкторія руху динамічної системи подається адитивною комбінацією її складових. Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес описувати лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Як показують практичні дослідження макроекономічних систем [6, 10], перевірка статистичних тестів [11] вказує на те, що трендова та періодична складові корелюють між собою. Це означає, що траєкторії фазових координат можуть бути знайдені після оцінювання регресійної моделі

$$\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{c}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \mathbf{v}_t, \quad t = \overline{1, N}, \quad (7)$$

де ω_k – частота, φ_k – вектор фаз, \mathbf{c}_k – вектор амплітуд k -ї гармоніки, \mathbf{v}_t – вектор випадкових збурень.

В [6] показано, що вектор середніх значень залишків дорівнює нулю ($\bar{\mathbf{v}} = 0$), якщо частоти коливань належать спектру

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

У випадку (8) вдається обчислити у явному вигляді наступні суми:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \cos \omega_k t &= 0, \quad \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sin \omega_k t = 0, \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N t \cos \omega_k t &= \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N t \sin \omega_k t = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_k}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Етап 1. Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (8), на які налаштовані гармонічні хвилі, можна здійснювати за допомогою першого пристрою регулятора, що обчислює суму значень фазових координат. Для цього розглянемо регресійну модель

$$x_t - \bar{x} = b(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + v_t, \quad t = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Модель (10) нелінійна за параметрами b, c_k, φ_k ($k=1, 2, \dots$). Але використання рівностей (9) при мінімізації суми квадратів залишків

$$S = \sum_{t=1}^N v_t^2 = \sum_{t=1}^N \left(x_t - \bar{x} - b(t - \bar{t}) - \sum_k c_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \right)^2 \quad (11)$$

дозволяє розв'язати нелінійну систему алгебраїчних рівнянь, що виникає в результаті привирняння нулю часткових похідних функції S за параметрами b, c_k, φ_k ($k=1, 2, \dots$), і отримати наступні МНК- оцінки:

$$\hat{b} = \frac{\frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left\{ (x_t - \bar{x}) \left(t + \sum_k \left(\text{ctg} \frac{\omega_k}{2} \sin \omega_k t - \cos \omega_k t \right) \right) \right\}}{\frac{N^2 - 1}{6} - \sum_k 1 / \sin^2 \frac{\omega_k}{2}}, \quad (12)$$

$$\text{tg} \hat{\varphi}_k = \frac{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t \cos \omega_k t}{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t \sin \omega_k t}, \quad \hat{c}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t \sin(\omega_k t + \hat{\varphi}_k), \quad \varepsilon_t = x_t - \bar{x} - \hat{b}(t - \bar{t}).$$

Оскільки у реальних динамічних системах присутня тенденція розвитку, то параметр $b \neq 0$ і, отже, можна припустити, що МНК- оцінка \hat{b} є значущою. З (12) видно, що тренд корелює з гармоніками і, навпаки, гармонічні хвилі залежать від тренду, навколо якого вони коливаються. При встановленому тренді можна розглянути також регресійну модель коливань

$$\varepsilon_t = \sum_k c_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + v_t, \quad t = \overline{1, N}. \quad (13)$$

У випадку спектра (8) гармоніки моделі (13) не корелюють між собою. За допомогою рівностей (9) переконуємось, що МНК-оцінки \hat{c}_k і $\hat{\varphi}_k$ ($k=1, 2, \dots$) моделі (13) збігаються з відповідними МНК- оцінками моделі (10) і обчислюється за формулами (12). Враховуючи цей факт, для аналізу гармонічних коливань можна замість моделі (10) досліджувати модель (13).

1. Оскільки гармоніки з різними частотами не корелюють між собою, то коваріаційна матриця гармонічних коливань моделі (13) є діагональною, причому діагональні елементи цієї матриці дорівнюють дисперсіям оцінок амплі-

літуд $\hat{\sigma}_{\hat{c}_k}^2$ [13]. Незсунені оцінки цих дисперсій дорівнюють:

$$\hat{\sigma}_{\hat{c}_k}^2 = \frac{2}{N} \hat{\sigma}_v^2, \quad \hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N-2n} \sum_{t=1}^N \hat{v}_t^2. \quad (14)$$

Тут, якщо оцінки \hat{c}_k , $\hat{\phi}_k$ ($k=1, 2, \dots$) приймають оптимальні значення (12), мінімальна сума квадратів відхилень дорівнює такому:

$$\min S = \sum_{t=1}^N v_t^2 = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 - \frac{N}{2} \sum_k \hat{c}_k^2. \quad (15)$$

2. Припустимо, що на кожному рівні ($t=1, 2, \dots, N$) випадкові відхилення v_t регресійної моделі (13) мають нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і сталою дисперсією σ_v^2 :

$$v_t \sim N(0, \sigma_v^2), \quad t = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Перевірка цієї гіпотези на практиці здійснюється за допомогою спеціальних тестів (*Пірсона*, у випадку $N > 100$; *Фішера* при невеликих об'ємах вибірки) [13]. Можна показати, що за умови (16) МНК-оцінки \hat{c}_k (12) будуть також розподілені за нормальним законом:

$$\hat{c}_k \sim N(c_k, \sigma_{\hat{c}_k}^2), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (17)$$

У подібних ситуаціях для перевірки значущості МНК-оцінок \hat{c}_k ($k=1, 2, \dots$) можна використовувати *критерій Ст'юдента*: k -а гармоніка вважається значущою, якщо виконується нерівність

$$\frac{|\hat{c}_k|}{\hat{\sigma}_{\hat{c}_k}} > t_{kp}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

де t_{kp} – критичне значення розподілу Ст'юдента, обчислене при рівні значущості α і $r = N - 2n$ ступенях вільності [13]. Якщо умова (18) не виконується, то k -у гармоніку необхідно вилучити з моделі (10).

3. Процес виділення значущих гармонічних хвиль, характерних для даної динамічної системи, необхідно проводити сумісно з визначенням періоду коливань T . Якщо частоти коливань належать спектру (8), то очевидно, $T = N$. Для встановлення оптимального значення N необхідно враховувати поведінку досліджуваної системи поза періодом ідентифікації $[1, N]$. Оскільки статистичні дані на періоді прогнозування $[N+1, t_k]$ нам невідомі, то можна використати відому статистичну інформацію з відрізка $[N+1 - N_1, 0]$. Якщо N вибране таким, що модельна траєкторія коливань

$$\varepsilon(t) = \sum_k \hat{c}_k \sin(\omega_k t + \hat{\phi}_k) \quad (19)$$

при $t \leq 0$ змінюється в напрямку статистичних даних ε_t ($t=0, -1, \dots$), то гі-

поза $T = N$ підтверджується.

Нехай за допомогою екстраполяції назад, ми ідентифікували період коливань i , отже, встановили оптимальний період ідентифікації $[1, N]$. При цьому нами виділені $n - 1$ значущих гармонік, що розповсюджуються у даній системі i , отже, визначена оптимальна розмірність n фазового простору.

Етап 2. Специфікація компонент \mathbf{x} проводиться при заданому значенні n . При поділі множини x на підмножини x_1, \dots, x_n необхідно враховувати фізичну сутність цих підмножин та їх значущість у загальній масі. Якщо фазові координати вибрані, то припускаємо, що властиві їм гармонічні коливання налаштовуються на частоти (8), ідентифіковані нами на етапі 1.

Аналогічно (12) отримуємо наступні МНК-оцінки невідомих векторів:

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \{(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(t + \sum_k \text{ctg}(\frac{\omega_k}{2} \sin \omega_k t - \cos \omega_k t))\}}{\frac{N^2 - 1}{6} - \sum_k 1 / \sin^2 \frac{\omega_k}{2}}, \quad (20)$$

$$\text{tg} \hat{\varphi}_k = \frac{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t \cos \omega_k t}{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t \sin \omega_k t}, \quad \hat{\mathbf{c}}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t \sin(\omega_k t + \hat{\varphi}_k), \quad \varepsilon_t = \mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}).$$

Вочевидь, кожна підмножина множини x має свою специфіку функціонування. Тому кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо фазова координата швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то цій координаті відповідатиме максимальна кількість, тобто $n - 1$ гармонік. Мінімальна кількість гармонік буде у розкладі тих фазових координат, які слабо реагують на зміни в інших підмножинах системи. Якщо ідентифіковані тренди фазових координат, то перевірку значущості гармонік, що розповсюджуються у кожній підмножині даної системи, можна проводити в рамках регресійної моделі коливань

$$\varepsilon_t = \sum_k \mathbf{c}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + v_t. \quad (21)$$

МНК- оцінки цієї моделі також обчислюються за формулами (20) і, отже, збігаються з відповідними МНК- оцінками моделі (7). *Рафінування* (відкидання незначущих МНК- оцінок амплітуд гармонік) моделі (21), як і у випадку моделі (13), здійснюється за допомогою критерію Ст'юдента (18).

Рафіновану модель коливань фазових координат навколо відповідних трендів

$$\varepsilon_t = \sum_k \mathbf{c}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (22)$$

екстраполюємо назад на проміжок $t \leq 0$ і перевіряємо відповідність статис-

тичним точкам $\varepsilon_t (t = 0, -1, \dots)$ з відрізка $[N + 1 - N_1, 0]$. Якщо перевірка нас задовольняє, то можуть бути прийнятними і модельні траєкторії руху фазових координат

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}) + \sum_k \hat{\mathbf{c}}_k \sin(\omega_k t + \hat{\phi}_k). \quad (23)$$

Апроксимаційні властивості отриманих модельних кривих будемо описувати за допомогою *коефіцієнтів детермінації* R^2 . Коефіцієнти детермінації лінійних трендів фазових координат обчислюються за формулою

$$\mathbf{R}_{\text{тр}}^2 = \frac{[(N^2 - 1) \cdot N / 12] \hat{\mathbf{b}}^2}{\sum_{t=1}^N (\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^2}. \quad (24)$$

Врахування періодичної складової у модельних траєкторіях руху (23) дає

$$\mathbf{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N v_t^2}{\sum_{t=1}^N (\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^2}, \quad v_t^2 = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 - \frac{N}{2} \sum_k \mathbf{c}_k^2. \quad (25)$$

Для моделі коливань (22) отримуємо

$$\mathbf{R}_{\text{кол}}^2 = \frac{\frac{N}{2} \sum_k \hat{\mathbf{c}}_k^2}{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2}, \quad (26)$$

а частка дисперсії k -ї гармоніки у загальній дисперсії коливань фазових координат становить

$$\mathbf{R}_k^2 = \frac{\frac{N}{2} \sum_k \hat{\mathbf{c}}_k^2}{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2} = \frac{\hat{\mathbf{c}}_k^2}{\sum_k \hat{\mathbf{c}}_k^2} \mathbf{R}_{\text{кол}}^2. \quad (27)$$

Якщо нас не влаштовують імітаційні властивості модельних кривих (22) і (23), то необхідно провести іншу специфікацію фазових координат і переоцінювання відповідних регресійних моделей. Результатом рафінування регресійної моделі (21) повинна бути також якісна апроксимація статистичних даних $\{x_t\}$ і $\{\varepsilon_t\}$ сумарними траєкторіями $\{x(t)\}$ і $\{\varepsilon(t)\}$, які моделює перший пристрій регулятора згідно першого балансового співвідношення (4).

Етап 3. Специфікація вектора керувань \mathbf{u} здійснюється при заданому фазовому векторі \mathbf{x} . Враховуючи фізичну сутність задачі, кожній компоненті

x_m ставимо у відповідність керування u_m ($m = 1, 2, \dots, n$). Розкладання траєкторій руху керувань $\mathbf{u}(t)$ на трендову і періодичну складові буде проведене після ідентифікації регресійної моделі, аналогічної (7):

$$\mathbf{u}_t - \bar{\mathbf{u}} = \beta(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \sin(\omega_k t + \psi_k) + \mathbf{w}_t, \quad t = \bar{1}, \bar{N}. \quad (28)$$

МНК-оцінки моделі (28) обчислюються згідно формул (20), що встановлюють відповідні МНК-оцінки регресійної моделі (7). Виділення значущих гармонік і аналіз траєкторій керувань $\mathbf{u}(t)$ відбувається за схемою, описаною на попередньому етапі при ідентифікації траєкторій фазових координат. У результаті отримуємо наступні модельні траєкторії керувань:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \hat{\beta}(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_k \sin(\omega_k t + \hat{\psi}_k). \quad (29)$$

Адекватність кривих (29) статистичним даним перевіряємо за допомогою коефіцієнтів детермінації, а також другого пристрою регулятора, який моделює сумарну траєкторію $\{u(t)\}$ згідно другої балансової рівності (4).

Етап 4. Ідентифікація оберненого зв'язку (6) проводиться, якщо побудовані модельні траєкторії фазових траєкторій (23) і керувань (29). Запишемо (23) у вигляді

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}) + \sum_k (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t), \quad (30)$$

$$\mathbf{a}_k = \hat{\mathbf{c}}_k \sin \hat{\phi}_k, \quad \mathbf{b}_k = \hat{\mathbf{c}}_k \cos \hat{\phi}_k,$$

а (29) у вигляді

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{v}(\tau) + \hat{\beta}(t - \bar{t}) + \sum_k (\alpha_k(\tau) \cos \omega_k t + \beta_k(\tau) \sin \omega_k t), \quad (31)$$

$$\mathbf{v}(\tau) = \bar{\mathbf{u}} + \tau \hat{\beta}, \quad \alpha_k(\tau) = \hat{\gamma}_k \sin(\omega_k \tau + \hat{\psi}_k), \quad \beta_k(\tau) = \hat{\gamma}_k \cos(\omega_k \tau + \hat{\psi}_k).$$

Позначимо

$$\mathbf{g}(t) = (1, t - \bar{t}, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \dots, \cos \omega_{n-1} t, \sin \omega_{n-1} t)',$$

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = (0, 1, -\omega_1 \sin \omega_1 t, \omega_1 \cos \omega_1 t, \dots, -\omega_{n-1} \sin \omega_{n-1} t, \omega_{n-1} \cos \omega_{n-1} t)'$$

і введемо у розгляд матриці

$$L = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \hat{b}_1 & a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_{1n-1} \\ \bar{x}_2 & \hat{b}_2 & a_{21} & b_{21} & \dots & a_{2n-1} & b_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n & \hat{b}_n & a_{n1} & b_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_{nn-1} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & \hat{\beta}_1 & \alpha_{11} & \beta_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n-1} & \beta_{1n-1} \\ v_2 & \hat{\beta}_2 & \alpha_{21} & \beta_{21} & \cdot & \cdot & \alpha_{2n-1} & \beta_{2n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n & \hat{\beta}_n & \alpha_{n1} & \beta_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn-1} & \beta_{nn-1} \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\omega_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тепер (6) можна записати так:

$$M(\tau)\mathbf{g}(t) = R(\tau)L\mathbf{g}(t) + S(\tau)LJ\mathbf{g}(t),$$

звідки знаходимо

$$M(\tau) = [R(\tau) \quad S(\tau)] \begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix}.$$

У якості матриць $R(\tau)$ і $S(\tau)$, що фігурують в рівнянні оберненого зв'язку (6), можна обрати

$$[R(\tau) \quad S(\tau)] = M(\tau) \begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix} \left(\left(\begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix} \right)' \right)^{-1}. \quad (32)$$

Очевидно, модельні траєкторії фазових координат повинні бути ідентифіковані так, щоб існувала обернена матриця, яка фігурує в (32). Матриця, яка обертається в (32), є симетричною, причому всі її власні числа дійсні і невід'ємні. У подібних ситуаціях показником нечутливості отриманих результатів до незначних змін вхідної інформації є індекс обумовленості $CI = \sqrt{\lambda_{\max} / \lambda_{\min}}$ вказаної матриці (λ_{\max} і λ_{\min} – найбільше і найменше власні числа відповідно). При практичних дослідженнях вважається, що обернена матриця існує, якщо виконується наступний критерій: $CI < 20$ [11].

Практична реалізація алгоритму. Як приклад слабо формалізованої

динамічної системи розглянемо макроекономіку Франції, яку будемо поділяти на n секторів. У якості координат фазового вектора \mathbf{x} виберемо валові випуски секторів, а керувань \mathbf{u} – кінцеві споживчі витрати на продукцію відповідної галузі. Чисельний експеримент з використанням екстраполяції назад за статистичними даними 1957 – 1959 рр. дозволив встановити оптимальне значення об'єму вибірки $N = 50$, при цьому 1960 – 2009 рр. – це період ідентифікації, 2010 – 2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності n фазового простору від рівня значущості α показує, що при $\alpha = 0,05$ економіку Франції необхідно поділяти на 17 секторів, а при $\alpha = 0,01$ – на 10 секторів. У випадку $\alpha = 0,01$ будемо моделювати наступну десятисекторну економіку Франції [14]: 1 – сільське господарство, 2 – промисловість, 3 – будівництво, 4 – транспорт, 5 – комунікації, 6 – фінанси, 7 – нерухомість, 8 – наука, 9 – сфера послуг (освіта, медицина), 10 – інше.

Розкладання часових рядів $\{x_t\}$ і $\{u_t\}$ на період ідентифікації ($t = 1, 2, \dots, 50$) на трендову і періодичну складові, підтверджує наявність у дев'яти значущих гармонік ($k = 1, 2, \dots, 9$). Параметрична ідентифікація регресивних моделей випусків (7) і невиробничого споживання (28) дала наступні значення $\mathbf{R}_{\text{тр}}^2$ трендів, навколо яких відбуваються коливання в секторах (табл. 1).

Таблиця 1 – Коефіцієнти детермінації трендів

	№ сектора										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Вип.	0,71	0,76	0,78	0,82	0,88	0,85	0,86	0,83	0,89	0,86	0,83
Нев. сп.	0,74	0,75	0,73	0,82	0,83	0,76	0,84	0,77	0,77	0,82	0,81

Гармонічні хвилі в різних секторах проявляють себе по різному. В табл. 2 наведені значення коефіцієнтів детермінації R_{mk}^2 , які характеризують вклад k -ї гармоніки в дисперсію коливань m -го сектора (верхні значення відповідають коливанням випусків, нижні значення – коливанням невиробничого споживання). Аналіз таблиці показує, що сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань становить від 91% (4-й сектор) до 97% (5-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості, і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків і невиробничого споживання.

Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків (верхні значення) і невиробничого споживання (нижні значення) приводяться в табл. 3. Дані, що наведені в табл. 1 і табл. 3, показують, що сумарний вклад

гармонік в дисперсію випусків секторів становить від 10% (9-й сектор) до 28% (1-й сектор), а в дисперсію невиробничого споживання секторів – від 15% (7-й сектор) до 25% (3-й сектор).

Аналіз отриманих результатів свідчить про високу якість апроксимації модельних кривих випусків і невиробничого споживання секторів та відповідних моделей коливань в цих секторах, тому можна очікувати і якісних прогнозних властивостей.

Таблиця 2 – Вклад гармонік в дисперсію коливань секторів

№ сек.	№ гармоніки									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
1	0,885	–	0,048	–	–	–	–	–	–	0,934
	0,669	0,069	0,091	0,038	–	–	0,035	–	–	0,933
2	0,548	0,175	0,122	–	–	0,035	0,032	–	0,019	0,945
	0,396	0,334	0,159	–	–	0,015	–	0,004	0,019	0,923
3	0,723	–	0,135	0,039	–	0,035	0,009	0,009	0,008	0,957
	0,693	0,063	0,097	0,035	0,012	0,012	–	0,009	0,005	0,921
4	0,416	0,169	0,158	0,062	–	0,062	0,019	–	0,019	0,905
	0,696	0,145	0,035	–	–	0,014	0,014	–	–	0,914
5	0,843	0,078	0,022	0,006	0,009	0,003	0,002	0,001	0,001	0,967
	0,321	0,269	0,128	0,138	0,027	0,036	0,036	–	0,018	0,979
6	0,654	0,134	0,078	0,014	–	0,027	–	0,006	0,012	0,925
	0,756	0,145	0,032	0,014	–	–	–	0,002	–	0,958
7	0,754	0,063	0,089	0,022	–	0,016	–	0,009	0,012	0,965
	0,882	0,019	0,005	0,004	–	–	–	–	–	0,911
8	0,614	0,096	0,133	0,026	0,016	0,031	0,012	0,013	0,015	0,955
	0,561	0,078	0,095	0,071	0,045	0,032	0,032	0,024	–	0,942
9	0,878	–	0,044	0,009	–	–	–	–	–	0,931
	0,842	–	0,056	0,014	0,005	–	–	–	–	0,916
10	0,860	0,016	0,013	–	0,012	–	0,002	0,001	–	0,912
	0,886	0,021	–	–	0,006	–	0,002	–	–	0,921

Таблиця 3 – Коефіцієнти детермінації модельних траєкторій

№ сектора										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
0,98	0,99	0,98	0,99	0,99	0,98	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99

На рис. 1 приведені графіки модельних траєкторій випуску $x(t)$ і невиробничого споживання $u(t)$ макроекономічної системи Франції, які виробляє регулятор згідно балансових рівностей (4), а також відповідних траєкторій

коливань $\varepsilon_x(t)$ і $\varepsilon_u(t)$. Тут точками зображена статистична інформація, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідні значення у початковому році періоду ідентифікації). Порівняння прогностичних значень на періоді прогнозування з реальними даними ($t = 51, 52$) свідчить про високоточні прогностні властивості отриманих модельних траєкторій.

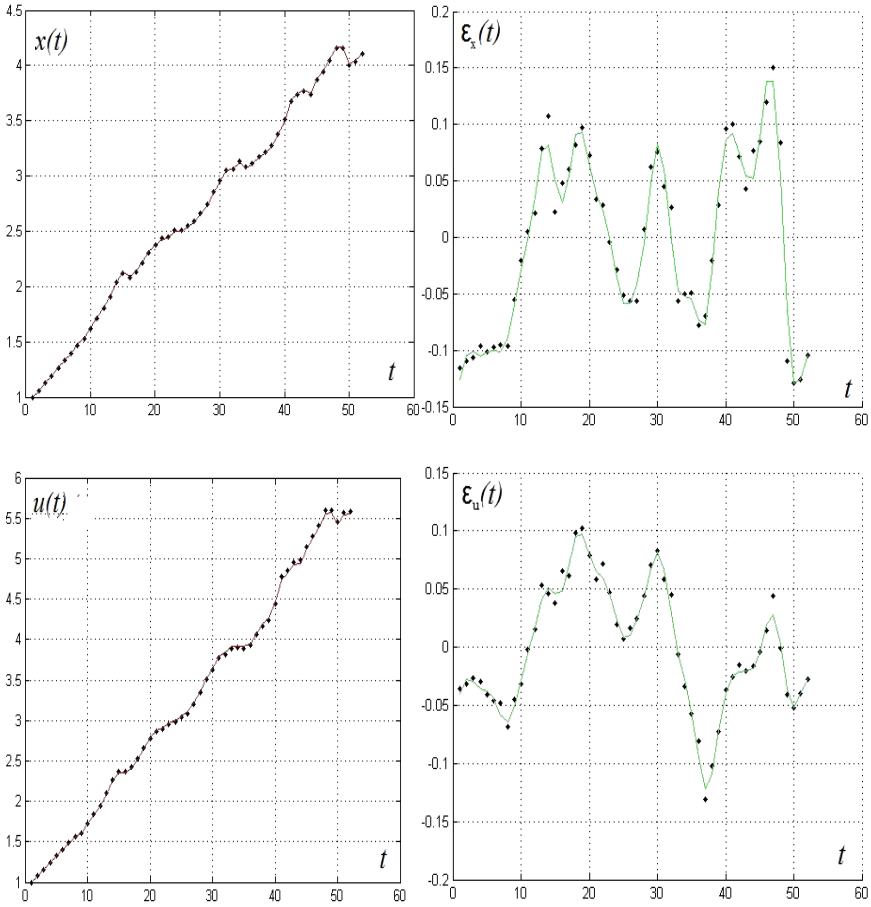


Рис. 1 – Модельні траєкторії випуску і невиробничого споживання та відповідних коливань.

Якщо отримані якісні імітаційні та прогностні властивості модельних траєкторій фазових координат і керувань, то можна моделювати обернений

зв'язок (6). Величину лага τ розглядаємо як параметр керування. Перебором значень τ і, обчислюючи на кожному кроці індекс обумовленості CI матриці, що обертається в (32), встановлюємо, що оптимальне значення τ дорівнює $1/6$. У випадку $\tau = 1/6$ значення елементів матриць R і Q (32) стають нечутливими до незначних змін вхідної інформації [10], $CI = 17,55$. Це означає, що ефект запізнення невиробничого споживання Франції відносно випуску продукції становить в середньому 2 місяці по кожному сектору. Матриці R і Q при цьому наступні елементи:

$$R = \begin{bmatrix} 0,072 & -0,062 & -0,091 & 0,135 & -0,356 & -0,015 & 0,134 & 0,147 & -0,174 & 0,186 \\ 0,345 & -0,007 & 0,028 & -0,011 & -0,065 & -0,034 & 0,198 & 0,011 & -0,155 & 0,058 \\ 0,112 & -0,014 & 0,009 & 0,013 & -0,005 & -0,092 & 0,175 & 0,034 & -0,065 & 0,028 \\ 0,058 & 0,005 & 0,036 & -0,067 & -0,037 & -0,055 & 0,119 & 0,054 & -0,039 & 0,030 \\ -0,167 & 0,067 & 0,139 & -0,107 & 0,523 & 0,169 & -0,084 & -0,352 & 0,395 & -0,256 \\ -0,339 & 0,153 & 0,299 & -0,355 & 1,166 & -0,022 & -0,123 & -0,417 & 0,678 & -0,517 \\ 0,619 & -0,108 & -0,220 & 0,072 & -0,906 & -0,159 & 0,885 & 0,614 & -0,663 & 0,546 \\ -0,040 & -0,049 & -0,094 & 0,149 & -0,308 & 0,054 & -0,112 & 0,093 & -0,062 & 0,141 \\ 0,232 & -0,094 & -0,237 & 0,245 & -0,667 & -0,006 & 0,099 & 0,344 & -0,283 & 0,354 \\ -0,264 & 0,117 & 0,258 & -0,313 & 0,791 & 0,054 & 0,045 & -0,380 & 0,518 & -0,364 \end{bmatrix}$$

i

$$Q = \begin{bmatrix} -0,027 & -0,123 & 0,237 & 0,029 & -0,439 & -0,088 & 0,81 & 0,546 & -0,642 & -0,155 \\ 0,690 & 0,002 & -0,035 & -0,013 & -0,211 & -0,114 & 0,008 & 0,152 & -0,183 & 0,013 \\ 1,113 & -0,058 & -0,020 & 0,154 & -0,214 & -0,022 & -0,102 & 0,077 & -0,030 & 0,108 \\ -0,063 & 0,014 & -0,035 & -0,005 & -0,159 & -0,207 & -0,200 & 0,186 & -0,188 & -0,049 \\ 1,792 & 0,010 & 0,435 & 0,213 & 1,030 & 0,617 & 0,408 & -1,174 & 1,723 & 0,425 \\ 0,579 & -0,032 & 0,373 & 0,471 & 1,027 & 0,777 & 0,069 & -1,274 & 0,837 & 0,433 \\ -0,787 & 0,048 & -0,705 & -0,395 & -1,058 & -1,683 & -0,766 & 2,285 & -1,935 & -0,598 \\ -0,474 & -0,030 & -0,063 & -0,029 & -0,028 & -0,030 & -0,030 & 0,224 & -0,520 & 0,011 \\ 0,393 & -0,037 & -0,375 & -0,164 & -1,142 & -0,797 & -0,315 & 1,122 & 0,003 & -0,342 \\ 0,672 & 0,004 & 0,388 & 0,256 & 1,117 & 0,633 & 0,284 & -1,160 & 1,080 & 0,331 \end{bmatrix}$$

Висновки. У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі слабо формалізованої динамічної системи з ефектом запізнення, який дозволяє отримати незатухаючі стійкі коливання у випадку макроекономічних систем. На прикладі макроекономіки Франції показано, що фазові координати і керування можна налаштувати на нечутливі до незначних змін вхідної інформації періодичні коливання навколо відповідних прямолінійних трендів. Отримані траєкторії фазових координат і відповідних керувань мають високоякісні імітаційні та прогнозні властивості.

Список літератури: 1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем / Под ред. Цыпкина Я. – М. УРСС, 2004. – 400с. 2. Nazarenko O. M. Filchenko D. V. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective // Int. J. of Innovating Computing, Information and Control. – 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 1553 – 1566. 3. Bates D. M. Watts D. B. Nonlinear Regression Analysis and Its Applications. – N. Y.: Wiley, 1988. – 365 p. 4. Ramsay J. O. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach / J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell // J. of the Royal Stat. Society. Series B. – 2007. – Part 5, No. 69. – P. 741 – 796. 5. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: Юнити, 2005.-295с. 6. Назаренко О. М. Побудова ті ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем // Вісник Харк. нац. ун-ту., 2008. – № 833 Сер. “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, вип. 10. – С. 185-192. 7. Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал “Исследовано в России”. – 2002. – Т.5. – С.54-86. 8. Назаренко А. М., Васильев А. А., Моделирование макроэкономических систем эконометрико-игровым методом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип. 4. – С.158-168. 9. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591с. 10. Назаренко А. М., Фильченко Д. В. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев, 2009. – Вып. 158.– С.42-61. 11. Greene W. H. Econometric Analysis / W. H. Greene. – 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. – 1056 p. 12. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: Юнити, 1998. – 1056с. 13. Назаренко О. М. Основы эконометрики, Вид. 2-е, перероб.: Підручник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 392с. 14. INSEE [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 519.7

Ідентифікація та прогнозування стаціонарних слабо формалізованих процесів з ефектом запізнення в n -вимірному просторі / О. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 90 – 104. Бібліогр.: 14 назв.

Рассматривается проблема моделирования и прогнозирования стационарных временных рядов, которые описывают слабо формализованные процессы. Предлагается алгоритм параметрической идентификации линейной стационарной модели в n -мерном фазовом пространстве.

Ключевые слова: фазовое пространство, управление, идентификация, эффект запаздывания.

The paper is devoted to the problem of modeling and prediction of stationary time series describing the weakly formalized processes. An algorithm of parametric identification of linear stationary model in n -dimensional phase space has been proposed.

Key words: phase space, control, identification, effect of delay.