УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УІПА, Харків;
О.М. ПРОХОРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц. НТУ «ХПІ»

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ДВОВИМІРНОГО ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗРИВНОГО ІНТЕРЛІНАЦІЙНОГО СПЛАЙНУ, ВИКОРИСТОВУЮЧИ КРИВОЛІНІЙНІ ТРИКУТНИКИ ТА ТРАПЕЦІЇ

Будується та досліджується розривний інтерлінаційний сплайн першого порядку, який використовує прямокутні елементи з однією криволінійною стороною та трикутні елементи з криволінійною гіпотенузою. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні властивості та похибку побудованих розривних конструкцій.

Ключові слова: розривна функція, розривна інтерлінація, криволінійні елементи.

Вступ. Класична теорія наближення диференційованих функцій багатьох змінних використовує оцінки похибок, які істотно основані на припущенні, що наближувана функція має обмежені похідні достатньо високого порядку. Наприклад, в роботі [1] оцінка наближення поліномами Лагранжа степеня n вимагає неперервності похідної порядку $n+1$, в роботах [2]–[4] похибка наближення сплайнами вимагає неперервності r-ої $(1 \le r \le n+1)$ похідної, де n – степінь сплайна. Для наближення неперервних функцій замість похідних використовуються *модулі неперервності*.

В той же час практика показує, що необхідно вміти з достатньою точністю наближувати розривні функції, зокрема, функції, які мають в області задання розриви першого роду в окремих точках або на окремих лініях тощо. Наприклад, дослідження внутрішньої структури тіла людини за допомогою методів комп’ютерної томографії в заданій площині повинно враховувати, що різні частини тіла мають свою форму і свою щільність. Тобто щільність внутрішньої структури всього тіла описується розривною функцією від трьох змінних, яка має розриви першого роду на поверхнях між різними частинами тіла (серце, шлунок, печінка тощо). В деяких випадках досліднику відома форма цих поверхонь (як правило, наближено).

Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання *плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії*. Для цього доцільніше використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх *слідами* на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що інтерлінація є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями.

Тому актуальною є задача наближення такого роду функцій за допомогою конструкцій, які на вказаних лініях зберігають властивості наближуваної функції, тобто мають розриви першого роду (взагалі кажучи, з невідомими значеннями розривів).

Аналіз останніх досліджень. В роботах [5] – [6] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних *розривними інтерполяційними білінійними сплайнами*, а в роботі [7] – *інтерлінаційними розривними сплайнами* на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерполяційні [8] та інтерлінаційні [9] сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники . В роботі [10] досліджувався неперервний оператор інтерлінації для наближення неперервних функцій на лініях тріангуляції.

Оскільки областю визначення розривної функції може бути довільної складності область, то виникає потреба у використанні розривних сплайнів, побудованих на елементах більш складної форми, наприклад, з криволінійними сторонами. В роботах [11] – [12] досліджувалися розривні інтерполяційні та апроксимаційні сплайни, побудовані на криволінійних трикутниках та трапеціях.

В даній роботі будується та досліджується розривний інтерлінаційний сплайн першого порядку, який використовує прямокутні елементи з однією криволінійною стороною та трикутні елементи з криволінійною гіпотенузою

Побудова розривного інтерлінаційного сплайна з використанням трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області D. Будемо вважати, що область D розбивається прямими

$$x = x_k,\quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m\,,$$
$$y = y_k,\quad y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$$

на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов’язково між всіма). Метою цього пункту є побудова та дослідження таких операторів розривної кусково-поліноміальної інтерлінації, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерлінації функції $f(x,y)$.

Розглянемо трикутний елемент $\mathrm{T}_{ij},\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m}$ (рис.1), в якому катети задаються рівняннями

$$AB : x = x_i\,,\qquad AC : y = y_j\,,$$

а гіпотенуза BC, взагалі кажучи, є криволінійною і може задаватися рівнянням

$$h(x)+g(y)=1 \text{ , тобто } y=g^{-1}(1-h(x)) \text{ або } x=h^{-1}(1-g(y)) .$$

Причому виконуються наступні співвідношення: $g(y_j)=0,\ h(x_i)=0$.

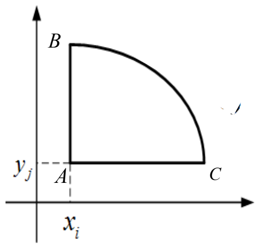


Рис. 1 – Один з можливих трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою та з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Нехай на цьому трикутнику задана функція $f(x,y)$, яка на лініях заданого трикутного елемента може мати розриви першого роду.

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x=x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y)=\lim_{x\to x_i+0} f(x,y)=f(x_i+0,y) ;$$

$$\varphi m_i(y)=\lim_{x\to x_i-0} f(x,y)=f(x_i-0,y) ;$$

$$\varphi pp_{ij}=\varphi p_i(y_j)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=$$

$$=f(x_i+0,y_j+0);$$

$$\varphi mp_{ij}=\varphi m_i(y_j)=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=f(x_i+0,y_j+0) .$$

2. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $y=y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x)=\lim_{y\to y_j+0} f(x,y)=f(x,y_j+0) ;$$

$$\psi m_j(x)=\lim_{y\to y_j-0} f(x,y)=f(x,y_j-0) ;$$

$$\psi pp_{ij}=\psi p_j(x_i)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=f(x_i+0,y_j+0) ;$$

$$\psi pm_{ij}=\psi m_j(x_i)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y)=f(x_i-0,y_j-0) .$$

3. Сліди функції $f(x,y)$ на криволінійній гіпотенузі (під та над прямою відповідно):

$$\eta m_{ij}(x)=f\left(x,g^{-1}(1-h(x))-0\right),\quad \eta p_{ij}(x)=f\left(x,g^{-1}(1-h(x))+0\right);$$

$$\eta pm_{ij}=\eta m_{ij}(x_i)=f\left(x_i+0,g^{-1}(1-h(x_i))-0\right),$$

$$\eta pp_{ij}=\eta p_{ij}(x_i)=f\left(x_i+0,g^{-1}(1-h(x_i))+0\right)$$

або

$$\eta m_{ij}(y)=f\left(h^{-1}(1-g(y))+0,y\right),\qquad \eta p_{ij}(y)=f\left(h^{-1}(1-g(y))-0,y\right);$$

$$\eta pm_{ij} = \eta m_{ij}(y_j) = f\left(h^{-1}(1-g(y_j))+0, y_j-0\right),$$

$$\eta mp_{ij} = \eta p_{ij}(y_j) = f\left(h^{-1}(1-g(y_j))-0, y_j+0\right).$$

Введемо позначення:

$$\mu m_i(x) = f\left(x_i+0, g^{-1}(1-h(x))-0\right),$$

$$\mu p_i(x) = f\left(x_i+0, g^{-1}(1-h(x))+0\right),$$

або

$$\mu p_j(y) = f\left(h^{-1}(1-g(y))+0, y_j-0\right),$$

$$\mu m_j(y) = f\left(h^{-1}(1-g(y))-0, y_j+0\right).$$

Легко перевірити, що виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} &\mu m_i(x_i) = \eta m_{ij}(x_i), \qquad \mu p_i(x_i) = \eta p_{ij}(y_j), \\ &\mu p_j(y_j) = \eta m_{ij}(y_j), \quad \mu m_j(y_j) = \eta p_{ij}(y_j). \end{aligned} \tag{1}$$

Для побудови оператора інтерлінації скористаємося результатами роботи *Литвина О.М.* [10].

Теорема1. *Якщо сліди функції* $f(x,y)$ *задовольняють умовам*

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i\left(g^{-1}(1-h(x_i))\right),$$

$$\eta m_{ij}\left(h^{-1}(1-g(y_j))\right) = \psi p_j\left(h^{-1}(1-g(y_j))\right),$$

то оператор

$$Lf(x,y) = L_1 f(x,y) + L_2(x,y) - L_{12}(x,y), \tag{2}$$

де

$$L_1 f(x,y) = h(x)\cdot \eta m_{ij}(y) + g(y)\cdot \eta m_{ij}(x),$$

$$L_2 f(x,y) = \psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j),$$

$$L_1 L_2 f(x,y) = h(x)\left(\varphi p_i(y) + \mu p_j(y) - \varphi p_i(y_j)\right) +$$

$$+g(y)\left(\eta m_{ij}(x_i) + \mu m_i(x) - \psi p_j(x)\right)$$

інтерлінує функцію $f(x,y)$ *на трьох сторонах трикутника*

T_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, *тобто*

$$L\, f(x,y)\big|_{y=y_j} = \psi p_j(x), \ Lf(x,y)\big|_{x=x_i} = \varphi p_i(y), \tag{3}$$

$$Lf(x,y) = f(x,y), \text{ якщо } h(x)+g(y)=1. \tag{4}$$

Доведення. Перепишемо формулу (2) у вигляді

$$Lf(x,y) = (1-h(x)-g(y))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)) + +h(x)(\eta m_{ij}(y) -$$

$$-\mu p_j(y)+\psi p_j(x)) + g(y)\left(\eta m_{ij}(x) - \mu m_i(x) + \varphi p_i(y)\right). \tag{5}$$

Візьмемо у формулі (5) $y = y_j$, в результаті отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j} = (1-h(x)-g(y_j))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j)-\varphi p_i(y_j)) + +h(x)(\eta m_{ij}(y_j) -$$

$$-\mu p_j(y_j)+\psi p_j(x)) + g(y_j)\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(y_j)\right).$$

Оскільки $g(y_j)=0$, то

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j} = (1-h(x))\cdot\psi p_j(x)+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\mu p_j(y_j)+\psi p_j(x)).$$

Згідно формули (1), маємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j} = (1-h(x))\cdot\psi p_j(x)+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\eta m_{ij}(y_j)+\psi p_j(x)) = \psi p_j(x).$$

Аналогічно, підставивши формулі (5) $x = x_i$, отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{x=x_i} = (1-h(x_i)-g(y))(\psi p_j(x_i)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)) +$$

$$+h(x_i)(\eta m_{ij}(y)-\mu p_j(y)+\psi p_j(x_i)) +$$

$$+g(y)\left(\eta m_{ij}(x_i)-\mu m_i(x_i)+\varphi p_i(y)\right) = \left|\begin{array}{l} h(x_i)=0 \\ \varphi p_i(y_j)=\psi p_j(x_i) \\ \mu m_i(x_i)=\eta m_{ij}(x_i) \end{array}\right| =$$

$$=(1-g(y))\cdot\varphi p_i(y)+g(y)\cdot\varphi p_i(y)=\varphi p_i(y).$$

Таким чином, умови (3) перевірені.

Підставивши $y = g^{-1}(1-h(x))$ у формулу (5), отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=g^{-1}(1-h(x)))} =$$

$$=(1-h(x)-g(g^{-1}(1-h(x))))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))-\varphi p_i(y_j)) +$$

$$+h(x)(\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x)))-\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)))+\psi p_j(x)) +$$

$$+g(g^{-1}(1-h(x)))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))\right) =$$

$$=h(x)(\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x)))-\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)))+\psi p_j(x)) +$$

$$+g(g^{-1}(1-h(x)))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))\right).$$

Згідно з введеними позначеннями, маємо:

$$\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x))) = f\left(h^{-1}(1-g(g^{-1}(1-h(x))))+0, g^{-1}(1-h(x))\right) =$$

$$=\left(h^{-1}(h(x)))+0, g^{-1}(1-h(x))\right) = \left(x, g^{-1}(1-h(x))-0\right) = \eta m_{ij}(x);$$

$$\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)) = f\left(h^{-1}(1-g(g^{-1}(1-h(x)))+0, y_j-0\right) =$$

$$= f\left(x, y_j+0\right) = \psi p_j(x);$$

$$\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x))) = f(x_i+0, g^{-1}(1-h(x))) = \mu m_i(x).$$

Тоді отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=g^{-1}(1-h(x)))}=h(x)(\eta m_{ij}(x)-\psi p_j(x)+\psi p_j(x))+$$
$$+(1-h(x))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\mu m_i(x)\right)=$$
$$=h(x)\cdot\eta m_{ij}(x)+(1-h(x))\cdot\eta m_{ij}(x)=\eta m_{ij}(x)$$

Аналогічно доводиться, що $Lf(x,y)\big|_{x=h^{-1}(1-g(x)))}=\eta m_{ij}(y)$.

І умова (4) доведена.

Теорема доведена.

Теорема 2. *Якщо* $f(x,y)\in C^{(1,1)}(\mathrm{T}_{ij})$, *то для залишку* $Rf(x,y)=(I-L)f(x,y)$ *виконуються співвідношення*

$$Rf(x,y)=(1-h(x)-g(y))\int_0^x\int_0^y f^{(1,1)}(u,v)dudv+$$
$$+f(x)\int_x^{h^{-1}(1-g(y))}\int_0^y f^{(1,1)}(u,v)dudv+g(y)\int_0^x\int_y^{g^{-1}(1-h(x))}f^{(1,1)}(u,v)dudv.$$

Доведення. Запишемо тотожності

$$f(x,y)=\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)+\int_{x_i}^x\int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u,v)dudv,$$

$$f(x,y)=\eta m_{ij}(x)-\mu p_j(y)+f(x,y_j)+\int_x^{h^{-1}(1-g(y))}\int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u,v)dudv,$$

$$f(x,y)=\eta m_{ij}(x)-\mu p_i(x)+\varphi p_i(y)+\int_{x_i}^x\int_{y_j}^{g^{-1}(1-h(x))}f^{(1,1)}(u,v)dudv.$$

За їх допомогою отримаємо тотожність

$$f(x,y)\equiv(1-h(x)-g(y))f(x,y)+h(x)f(x,y)+g(y)f(x,y)\equiv$$
$$\equiv Lf(x,y)+Rf(x,y).$$

Теорему 2 доведено.

Наслідок. *Для довільних функцій* $f(x,y)=u(x)+v(y)$, *де* $u(x),v(y)$ – *довільні функції однієї змінної справедлива рівність*

$$Lf(x,y)=f(x,y).$$

Доведення випливає з того, що $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(u(x)+v(y))=0$.

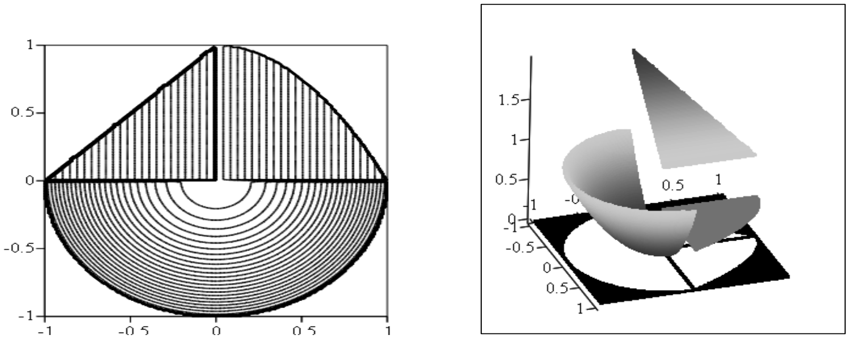
Зауваження. Якщо $\varphi p_i(y)=\varphi m_i(y)$, $\psi p_j(x)=\psi m_j(x)$, $\eta p_{ij}(x)=\eta m_{ij}(x)$, то побудований розривний сплайн вигляду (2) є неперервним інтерлінаційним сплайном на границях трикутного елементу T_{ij}.

Приклад. Нехай функція $f(x,y)$ визначена в області $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, представленій на рис. 2*а*. Катети цих трикутних елементів утворені прямими $x = 0,\ y = 0$, а гіпотенузи задані рівнянням вигляду $h(x) + g(y) = 1$, де $h(x),\ g(y)$ задовольняють умовам $h(0) = 0,\ g(0) = 0$ та в кожному трикутному елементі задаються наступним чином:

$$T_1 : h(x) = x^2,\ g(y) = y, \qquad T_2 : h(x) = -x,\ g(y) = y,$$

$$T_3 : h(x) = x^2,\ g(y) = y^2, \qquad T_4 : h(x) = x^2,\ g(y) = y^2.$$

Нехай у визначеній області задана функція $f(x,y)$ (рис. 2*б*).



а *б*

Рис. 2 – Графічне представлення: *а* області визначення функції $f(x,y)$ та *б* самої функції $f(x,y)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.5, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x^2, \\ -x + 1, & -1 < x < 0,\ 0 < y < 1 + x, \\ x^2 + y^2, & -\sqrt{1 - y^2} < x < \sqrt{1 - y^2},\ -1 < y < 0. \end{cases}$$

Тобто функція $f(x,y)$ на лініях тріангуляції має розриви першого роду, але не на всіх лініях.

У якості вихідних даних будемо використовувати сліди заданої функції на лініях трикутних елементів:

$$T_1 : \varphi p(y) = f(+0, y) = 0.5, \quad \psi p(x) = f(y, +0) = 0.5,$$

$$\eta m(x) = f(x, 1 - x^2 - 0) = 0.5;$$

$$T_2 : \varphi m(y) = f(-0, y) = 1, \quad \psi p(x) = f(x, +0) = -x + 1,$$

$$\eta p(y) = f(x, 1 + x + 0) = -x + 1;$$

$$T_3 : \varphi m(y) = f(-0, y) = y^2, \quad \psi m(x) = f(x, -0) = x^2,$$

$$\eta p(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2} + 0) = 1.$$

Ці сліди задовольняють умовам теореми 1 в кожному з чотирьох трикутників, тому за формулою (2) будуємо розривний інтерлінаційний сплайн, який в точності співпадає із заданою функцією (рис. 2*б*).

Побудова розривного інтерлінаційного сплайна з використанням трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою. Нехай $f(x, y)$ задана розривна функція двох змінних в області D. Будемо вважати, що область D розбивається прямими

$$x = x_k, \quad x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m,$$

$$y = y_k, \quad y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n$$

на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається два прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою цього пункту є побудова та дослідження таких операторів розривної кусково-поліноміальної інтерлінації, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерлінації функції $f(x, y)$.

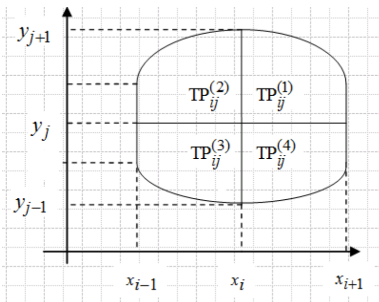
Якщо (x_i, y_j) – це вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутника, то може зустрітися чотири типи трапецій (рис.3):

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(2)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \left\{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \left\{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(4)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(y), y_{j-1} < y < y_j\right\}.$$



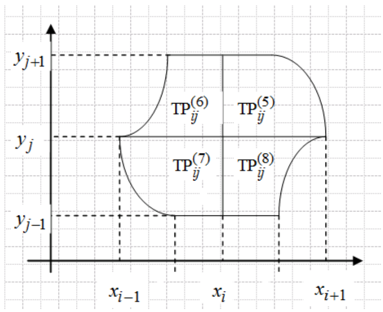


Рис. 3 – Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j).

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція $f(x,y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду. Розглянемо трапецію типу $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$.

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \to x_i + 0} f(x,y) = f(x_i + 0, y), \quad \varphi m_i(y) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x,y) = f(x_i - 0, y);$$

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi pm_{ij+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0).$$

2. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x = x_{i+1}$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x \to x_{i+1} + 0} f(x,y) = f(x_{i+1} + 0, y), \ \varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x \to x_{i+1} - 0} f(x,y) = f(x_{i+1} - 0, y);$$

$$\varphi mp_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = \lim_{\substack{x \to x_{i+1} - 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

3. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \to y_j + 0} f(x,y) = f(x, y_j + 0), \quad \psi m_j(x) = \lim_{y \to y_j - 0} f(x,y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\psi pp_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi mp_{i+1,j} = \psi m_j(x_{i+1}) = \lim_{\substack{x \to x_{i+1} - 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

4. Сліди функції $f(x,y)$ на лінії $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$ (під та над лінією відповідно):

$$\psi m_{j+1}(x) = f\left(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0\right), \quad \psi p_{j+1}(x) = f\left(x, g_{j+1}^{(1)}(x) + 0\right);$$

$$\psi pm_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f\left(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0\right),$$

$$\psi mm_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f\left(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0\right)$$

Означення. Будемо називати *розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в трапецевидному елементі* $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ наступну функцію:

$$Lf(x,y) = \left(L_1 + L_2 - L_2 L_1\right) f(x,y), \tag{6}$$

де

$$L_1 f(x,y)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi p_i(y)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi m_{i+1}(y)\ ;$$

$$L_2 f(x,y)=\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\psi m_{j+1}(x)+\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\psi p_j(x)\,.$$

Для оператора інтерлінації, побудованого з використанням криволінійних трапецій, справедливі такі ж теореми про інтерлінаційні властивості та про похибку наближення, що і для оператора інтерлінації, побудованого в роботі [13] на основі трапецевидних елементів. Нижче наведемо ці теореми без доведень.

***Теорема 3* [13].** *Якщо сліди функції $f(x,y)$ задовольняють співвідношенням:*

$$\psi p_j(x_i)=\varphi p_i(y_j),\quad \psi p_j(x_{i+1})=\varphi m_{i+1}(y_j),$$

$$\varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i))=\psi m_{j+1}(x_i),\quad \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))=\psi m_{j+1}(x_{i+1}),$$

то оператор (1) інтерлінує $f(x,y)$ на $\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)} : Lf(x,y)\big|_{\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}}=f(x,y)\big|_{\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}}$, тобто

$$Lf(x_i,y)=\varphi p_i(x),\qquad Lf(x_{i+1},y)=\varphi p_{i+1}(x),$$

$$Lf(x,y_j)=\psi p_j(x),\quad Lf(x,g_{j+1}^{(1)}(x))=\psi m_{j+1}(x).$$

Теорема 4 [13]. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді для залишкового члена $Rf(x,y)=(I-L)f(x,y)$ виконується рівність*

$$Rf(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}P_{1,k}(x)P_{2,m}(x,y)\int_{x_k}^{x}\int_{y_m(x)}^{y}f^{(p,q)}(\xi,\eta)\frac{(x_k-\xi)^{p-1}(y_\ell-\eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!}d\xi d\eta,$$

$$1\le p,q\le 2,\ y_1(x)=y_j,\ y_2(x)=g_{j+1}^{(1)}(x)\,\mathbf{,}$$

а поліноми $P_{1,k}(x),P_{2,m}(x,y)$ мають вигляд

$$P_{1,1}(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}},\quad P_{1,2}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},$$

$$P_{2,1}(x)=\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j},\quad P_{2,2}(x)=\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}.$$

Оцінимо похибку наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованим розривним інтерлінантом $Lf(x,y)$, визначеним формулою (6) в трапецевидному елементі $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$.

***Теорема 5* [13].** *Нехай $f(x,y)\in C^{p,q}(\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}),\ p=\overline{1,2},\ q=\overline{1,2}$, тоді для за-*

лишкового члена $Rf(x,y)$ *має місце оцінка*

$$\left\| Rf(x,y) \right\|_{C\left(\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}\right)} \le M \cdot \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} \left| G_1(x,\xi) \cdot G_2(x,y,\eta) \right| d\xi d\eta ,$$

де

$$M = \max_{(x,y)\in \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}} \left| f^{(p,q)}(x,y) \right|, \ G_1(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \dfrac{(x_i - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i \le \xi < x, \\ -\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \dfrac{(x_{i+1} - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x \le \xi \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$$G_2(x,y,\eta) = \begin{cases} \dfrac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \cdot \dfrac{(y_j - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j \le \eta < y, \\ -\dfrac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \cdot \dfrac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y \le \eta < g_{j+1}^{(1)}(x). \end{cases}$$

Зауваження. Якщо односторонні сліди функції на відповідних лініях, що утворюють границі трапецевидних елементів, збігаються, то розривна функція перетворюється в неперервну.

Приклад. Нехай функція $f(x,y)$ задана в одиничному квадраті $[0,1]^2$ таким чином (рис. 4):

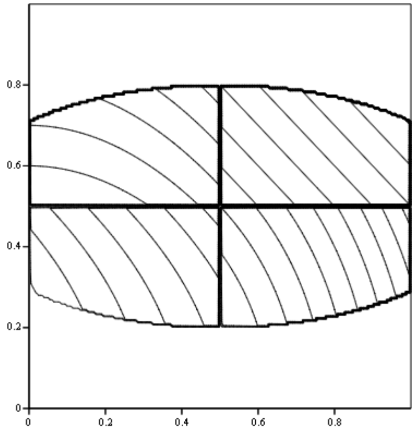
$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & 0.5 < x < 1,\ 0.5 < y < 0.5 + \sqrt{0.09\left[1 - \dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}; \\ x^2 + y, & 0 < x < 0.5,\ 0.5 < y < 0.5 + \sqrt{0.09\left[1 - \dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}; \\ x + y^2, & 0 < x < 0.5,\ 0.5 - \sqrt{0.09\left[1 - \dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]} < y < 0.5; \\ x^2 + y^2, & 0.5 < x < 1,\ 0.5 - \sqrt{0.09\left[1 - \dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]} < y < 0.5. \end{cases}$$

Тобто на лініях фігури функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії:

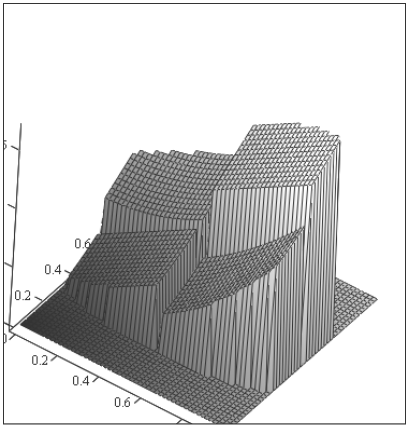
$$x = x_1 = 0,\ x = x_2 = 0.5,\ x = x_3 = 1,$$

$$y = y_1 = 0.5 - \sqrt{0.09\left[1 - \frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]},\ \ y = y_2 = 0.5,$$

$$y = y_3 = 0.5 + \sqrt{0.09\left[1 - \frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}.$$



а



б

Рис. 4 – Графічні зображення: *а* – області визначення функції $f(x,y)$;
б – функції $f(x,y)$.

Вони розбивають область визначення функції $f(x,y)$ на вісім трапецевидних елементів з однією криволінійною стороною в кожному елементі.

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x,y) = L_1 L_2 f(x,y) = \varphi pp_{ij} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + \varphi mp_{i+1,j} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$

$$+ \varphi pm_{i,j+1} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + \varphi mm_{i+1,j+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j},$$

при умові, що виконуються рівності

$$\varphi pm_{i,j+1} = \psi pm_{i,j+1}, \quad \varphi pp_{i,j} = \psi pp_{i,j},$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \psi mm_{i+1,j+1}, \quad \varphi mp_{i+1,j} = \psi pm_{i+1,j}.$$

Графічний вигляд такого інтерполяційного сплайна наведений на рис. 5.

Знайдемо оцінку похибки наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованою розривною конструкцією $S(x,y)$

$$\max\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \approx 0.025.$$

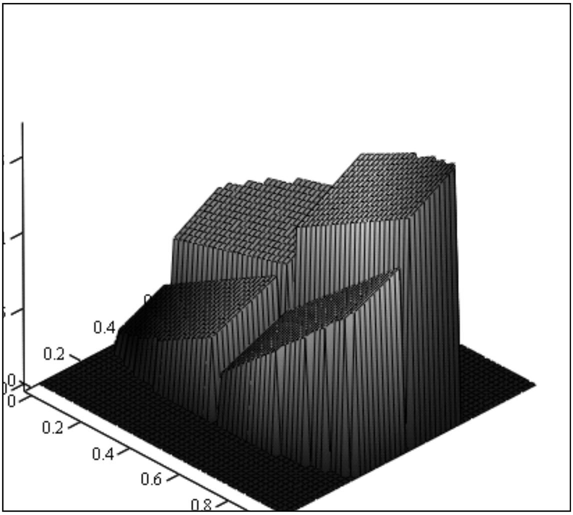


Рис. 5 – Графічний вигляд розривного сплайн-інтерполянта для функції $f(x, y)$.

Тепер побудуємо на заданій сітці розривний інтерлінаційний сплайн $L(x, y)$ за формулою (6). Після перетворень, можна побачити, що аналітично цей сплайн повністю збігається із заданою функцією $f(x, y)$, тобто $L(x, y) = f(x, y)$.

Можемо зробити висновок, що інтерлінаційний розривний сплайн точно відновлює задану розривну функцію на заданих криволінійних елементах.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей двовимірних тіл, внутрішня структура яких є неоднорідною.

В методах, розроблених авторами, вважається, що розриви функцій відомі. Наступним кроком автори планують застосувати розроблену теорію наближення розривних функцій розривними сплайн-інтерлінантами до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

Висновки. Таким чином, в даній статті запропоновано метод побудови розривних сплайн-інтерлінантів, які включають в себе розривні сплайни, для випадку, коли область визначення досліджуваної функції розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою та на криволінійні і трапеції. Сформульована і доведена теореми про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій. Визначений загальний вигляд похибки наближення побудованими сплайн-інтерлінантами. Визначені умови, при яких побудована розривна конструкція перетворюється в неперервний інтерлінаційний сплайн.

Список літератури: **1.** *Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.* Методи обчислень: Підручник: У 2ч. – К.: Вища школа, 1995. **2.** *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с. **3.** *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976; **4.** *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И.*, *Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1976; **5.** *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи) // «Теорія прийняття рішень»: праці V міжнародної школи-семінару, 27 вересня-1 жовтня 2010р., Ужгород. – 2010 – С.141-142. **6**. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72. **7**. *Литвин О.Н., Першина Ю.И* Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. –С.96 – 105. **8**. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій кусково-лінійними інтерполяційними розривними сплайнами на трикутній сітці вузлів // Доповіді НАНУ. –2012. – №1. – С. 38 – 43. **9**. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины.–Киев, 2011, №5. – С.34 – 47. **10**. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. К.: Наукова думка, 2005.– 333с. **11.** *Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій розривними сплайнами з використанням трикутників з однією криволінійною стороною // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам’янець – Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2012. – Вип.7. – С. 213 – 221. **12.** *Литвин О.М.* Відновлення об’єктів, що описуються розривними функціями, з використанням криволінійних трапецій [Текст] / *О.М. Литвин, Ю.І. Першина* // Бионика интелекта. – Харьков: ХНУРЭ, 2012. – №1(78). – С. 37 – 44. **13.** *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Побудова інтерполяційних, апроксимаційних та інтерлінаційних сплайнів з використанням трапецевидних елементів // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 2 – С. 141 - 152.

Надійшла до редколегії 18.02.2013

УДК 519.6

Відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла за допомогою розривного інтерлінаційного сплайну, використовуючи криволінійні трикутники та трапеції / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. М. Прохорова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 76 – 89. Бібліогр.: 13 назв.

Строится и исследуется разрывный интерлинационный сплайн первого порядка, который использует прямоугольные элементы с одной криволинейной стороной и треугольные элементы с криволинейной гипотенузой. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлинационных свойствах и о погрешности построенный разрывных конструкций.

Ключевые слова: разрывная функция, разрывная интерлинация, криволинейные элементы.

It is under construction and investigated discontinuous interlination spline of the first order which uses rectangular elements with one curvilinear party and triangular elements with a curvilinear hypotenuse. Theorems about interlinational properties and about an error constructed discontinuous designs are formulated and proved.

Key words: discontinuous function, breaking interlinatsiya, curvilinear elements.