

**В.П.ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрено движение осциллятора линейно-переменной массы при нагружении его кратковременным импульсом постоянной силы. С помощью цилиндрических функций построено замкнутое решение задачи и проанализированы результаты расчётов.

**Ключевые слова:** осциллятор, линейно-переменная масса, кратковременный импульс, цилиндрические функции.

**Введение.** Нестационарные колебания механических систем с переменными во времени параметрами относятся к мало изученным разделам теории колебаний. В литературе в основном описаны лишь свободные колебания простейших моделей переменной массы с одной степенью свободы. Одним из первых, кто начал изучать такое движение, был *И.В. Мещерский* [1]. В указанной публикации он построил замкнутое решение уравнения малых свободных колебаний математического маятника линейно-переменной массы в *функциях Бесселя* положительного и отрицательного индексов. Свободные колебания линейного осциллятора линейно-переменной массы рассматривались в [2], где построено решение уравнения движения. Но автор этой публикации не проводила расчётов и не анализировала особенностей колебаний, вызванных переменностью массы. Две задачи о свободных колебаниях системы линейно-переменной жёсткости во времени решено в [3]. Речь идёт о колебаниях тяжёлого груза при равномерном вертикальном опускании или подъёме его на невесомом тросе, намотанном на равномерно вращающийся барабан. В отличие от указанных публикаций, где решали однородное дифференциальное уравнение движения, здесь мы построим замкнутое решение неоднородного уравнения.

Целью работы является изучение движения осциллятора линейно-переменной массы, вызванного действием непродолжительного импульса силы, типа ударного воздействия [4].

**Постановка задачи Коши и построение её решения.** Предполагаем, что масса осциллятора  $M$  изменяется во времени  $t$  по закону

$$M = m_0(1 + \gamma t),$$

где  $m_0$  – начальное значение массы;  $\gamma m_0$  – скорость изменения массы во времени.

Вертикальное перемещение осциллятора определяем координатой  $x(t)$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m_0(1 + \gamma t) \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = m_0 g \gamma t + Q[H(t) - H(t - \tau)]. \quad (1)$$

В нём  $c$  – коэффициент жёсткости пружины;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H(t)$  – функция Хевисайда;  $Q \cdot \tau$  – величина импульса продолжительности  $\tau$ .

Начало вертикальной оси  $Ox$  опущено от точки подвеса пружины  $A$  вниз на расстояние  $X_0 = l + c(m_0 g)^{-1}$ , где  $l$  – длина недеформированной пружины (см. рис. 1).

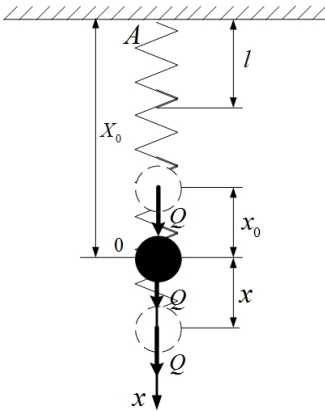


Рис. 1 – Расчётная схема вертикальных колебаний осциллятора.

Считаем, что при  $t = 0$  координата  $x = 0$  и осциллятор находится в состоянии покоя.

Введением вспомогательной переменной  $\xi = 1 + \gamma t$  уравнение (1) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{c}{\gamma^2 m_0 \xi} x = \frac{g}{\gamma^2} \frac{(\xi - 1)}{\xi} + \frac{Q}{m_0 \gamma^2 \xi} [H(\xi - \xi_0) - H(\xi - \xi_1)], \quad (2)$$

где  $\xi_0 = 1$ ;  $\xi_1 = 1 + \gamma \tau$ .

Ему соответствуют однородное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{c}{\gamma^2 m_0 \xi} x = 0. \quad (3)$$

Фундаментальными решениями (3) являются:

$$x_1(\eta) = \eta J_1(\eta); \quad x_2(\eta) = \eta Y_1(\eta). \quad (4)$$

Здесь  $\eta = \eta_0 \sqrt{\xi}$ ;  $\eta_0 = \frac{2}{|\gamma|} \sqrt{\frac{c}{m}}$ ;  $J_1(\eta), Y_1(\eta)$  – функции Бесселя и Неймана

индекса единица.

При дифференцировании фундаментальных решений по  $\xi$  учтём, что [5]:

$$\frac{d}{d\eta} [\eta J_1(\eta)] = \eta J_0(\eta); \quad \frac{d}{d\eta} [\eta Y_1(\eta)] = \eta Y_0(\eta);$$

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta_0^2}{2\eta} \frac{d}{d\eta};$$

$J_0(\eta); Y_0(\eta)$  – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

Тогда:

$$\frac{dx_1}{d\eta} = \frac{\eta_0^2}{2} J_0(\eta); \quad \frac{dx_2}{d\eta} = \frac{\eta_0^2}{2} Y_0(\eta).$$

Согласно *методу Лагранжа*, частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде

$$x = c_1(\eta)x_1(\eta) + c_2(\eta)x_2(\eta). \quad (5)$$

Для определения неизвестных функций  $c_1(\eta)$  и  $c_2(\eta)$  получаем интегралы:

$$c_1(\eta) = -\frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta)x_2(\eta)}{\Delta(\eta)} d\eta; \quad c_2(\eta) = \frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta)x_1(\eta)}{\Delta(\eta)} d\eta,$$

в которых

$$\Delta(\eta) = x_1 \frac{dx_2}{d\eta} - x_2 \frac{dx_1}{d\eta} = \frac{\eta_0^2 \eta}{2} [J_1(\eta)Y_0(\eta) - J_0(\eta)Y_1(\eta)] = \frac{\eta_0^2 \eta}{2} \frac{2}{\pi \eta} = \frac{\eta_0}{\pi};$$

$$f(\eta) = \frac{g}{\gamma^2} \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta^2} + \frac{Q\eta_0^2}{m_0 \gamma^2 \eta^2} [H(\eta - \eta_0) - H(\eta - \eta_1)]; \quad \eta_1 = \eta_0 \sqrt{1 + \gamma\tau}.$$

Учитывая эти выражения и (4), находим:

$$c_1(\eta) = -\frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ g(\eta^2 - \eta_0^2) + \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [H(\eta - \eta_0) - H(\eta - \eta_1)] \right\} Y_1(\eta) d\eta;$$

$$c_2(\eta) = \frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ g(\eta^2 - \eta_0^2) + \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [H(\eta - \eta_0) - H(\eta - \eta_1)] \right\} J_1(\eta) d\eta. \quad (6)$$

Интегралы (6) выражаются через цилиндрические функции, поскольку [5]:

$$\int \eta^2 J_1(\eta) d\eta = \eta^2 J_2(\eta); \quad \int \eta^2 Y_1(\eta) d\eta = \eta^2 Y_2(\eta);$$

$$\int J_1(\eta) d\eta = -J_0(\eta); \quad \int Y_1(\eta) d\eta = -Y_0(\eta).$$

Следовательно,

$$c_1(\eta) = -\frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \left\{ g [\eta^2 Y_2(\eta) - \eta_0^2 Y_2(\eta_0)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + g\eta_0^2 [Y_0(\eta) - Y_0(\eta_0)] - \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [Y_0(\eta_*) - Y_0(\eta_0)] \Big\}; \\
c_2(\eta) = & \frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \left\{ g [\eta^2 J_2(\eta) - \eta_0^2 J_2(\eta_0)] + \right. \\
& \left. + g\eta_0^2 [J_0(\eta) - J_0(\eta_0)] - \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [J_0(\eta_*) - J_0(\eta_0)] \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь  $\eta_* = \begin{cases} \eta & \text{при } \eta \leq \eta_1; \\ \eta_1 & \text{при } \eta > \eta_1; \end{cases}$   $J_2(\eta), Y_2(\eta)$  – функция Бесселя и Неймана

индекса два.

Учитывая, что [5]:

$$\begin{aligned}
Y_2(\eta_0) + Y_0(\eta_0) &= \frac{2}{\eta_0} Y_1(\eta_0); & J_2(\eta_0) + J_0(\eta_0) &= \frac{2}{\eta_0} J_1(\eta_0), \\
J_2(\eta) Y_1(\eta) - Y_2(\eta) J_1(\eta) &= \frac{2}{\eta\pi}; & J_0(\eta) Y_1(\eta) - Y_0(\eta) J_1(\eta) &= -\frac{2}{\eta\pi},
\end{aligned}$$

после подстановки выражений (7) в (5) получаем замкнутое решение поставленной задачи Коши:

$$\begin{aligned}
x = & \frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \left\{ \frac{2}{\pi} g (\eta^2 - \eta_0^2) + 2g\eta_0\eta [Y_1(\eta_0) J_1(\eta) - J_1(\eta_0) Y_1(\eta)] + \right. \\
& \left. + \frac{Q\eta_0^2\eta}{m_0} [(J_0(\eta_0) - J_0(\eta_*)) Y_1(\eta) - (Y_0(\eta_0) - Y_0(\eta_*)) J_1(\eta)] \right\}.
\end{aligned}$$

**Результаты моделирования.** Рассмотрим модельную задачу, когда масса осциллятора возрастает. Для этого примем следующие исходные данные:  $m_0 = 100$  кг;  $c = 4 \cdot 10^4$  Н/м;  $Q = 981$  Н;  $\tau = 1$  с и разные значения  $\gamma$ . На рис.2 а и б представлены перемещения осциллятора, полученные при  $\gamma = 0,1$  с<sup>-1</sup> и  $\gamma = 0,5$  с<sup>-1</sup> соответственно.

Вследствие возрастания массы, во время действия импульса ( $t \leq 1$ с) максимум  $x(t)$  более чем в два раза превышает статическое перемещение  $x_{CT} = Q/c$ . После прекращения действия импульса ( $t > 1$ с) осциллятор совершает свободные колебания относительно подвижного уровня отсчёта или центра колебаний, который опускается вниз. С увеличением параметра  $\gamma$  возрастают амплитуды свободных колебаний.

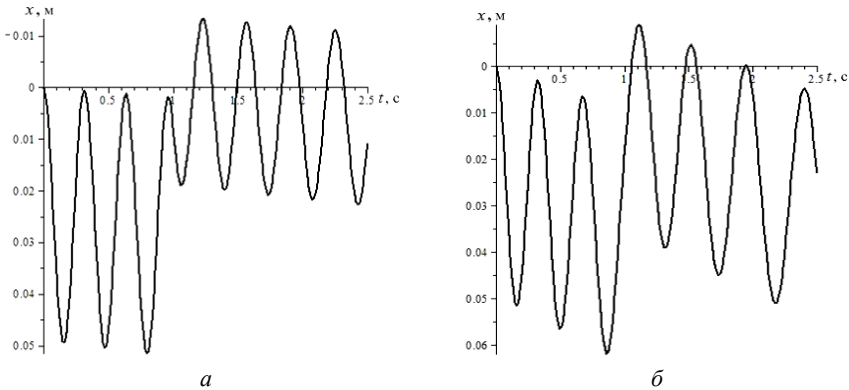


Рис. 2 – Зависимость перемещения  $x$  от времени  $t$  при разных  $\gamma > 0$  :  
 $a - \gamma = 0,1 \text{ с}^{-1}$ ;  $б - \gamma = 0,5 \text{ с}^{-1}$ .

Проведём числовой расчёт колебаний осциллятора с убывающей массой. Для этого примем прежние исходные данные и поменяем знак у параметра  $\gamma$ . Результаты таких расчётов представлены на рис. 3.

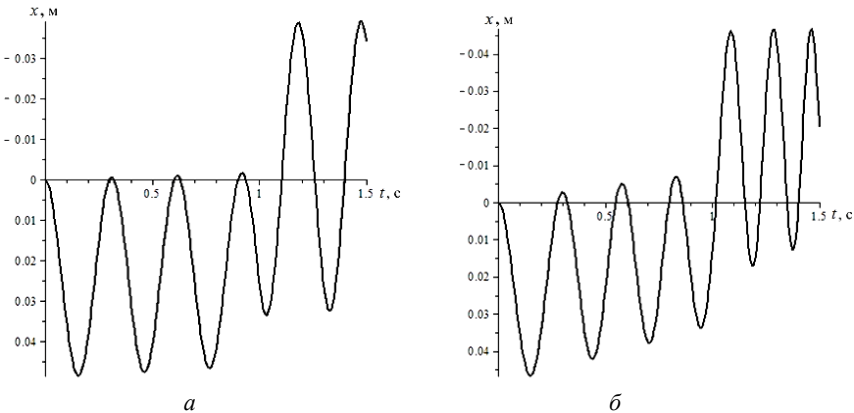


Рис. 3 – Зависимость перемещения  $x$  от времени  $t$  при разных  $\gamma < 0$  :  
 $a - \gamma = -0,1 \text{ с}^{-1}$ ;  $б - \gamma = -0,5 \text{ с}^{-1}$ .

При уменьшении массы осциллятора коэффициент динамичности перемещений оказывается меньшим двух. Центр колебаний поднимается вверх. Уменьшение массы осциллятора частично «гасит» действие импульса.

**Выводы.** При действии импульса постоянной силы на коротком промежутке времени задача моделирования нестационарных колебаний осциллято-

ра линейно-переменной массы допускает замкнутое решение в цилиндрических функциях. Решение позволяет проводить расчёт динамических перемещений осциллятора без учёта их затухания во времени.

**Список литературы:** 1. *Меушерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы / И.В. Меушерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p. 3. *Светлицкий В.А.* Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с. 4. *Ольшанский В.П.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе // В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Х.: “Міськдрук”, 2012. – 320 с. 5. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

*Поступила в редколлегию 09.04.2013*

---

УДК 534.1

**Моделювання коливальних осциляторів лінійно-змінної маси за імпульсного навантаження / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський** // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №37 (1010). – С. 125 – 130. Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто рух осцилятора лінійно-змінної маси при навантаженні його короткочасним імпульсом сталої сили. За допомогою циліндричних функцій побудовано замкнутий розв’язок задачі та проаналізовано результати розрахунків.

**Ключові слова:** осцилятор, лінійно-змінна маса, короткочасний імпульс, циліндричні функції.

The motion of the oscillator linearly variable mass when loaded his short pulses of constant force is considered. With cylindrical functions to construct a closed solution and analyzed the results.

**Key words:** an oscillator, linearly variable mass, short impulse, cylindrical functions.

УДК 629.7.05

**Ю.А. ПЛАКСІЙ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

## **ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕВЕРСИВНИХ СХЕМ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ ОРІЄНТАЦІЇ**

Для реверсивних схем визначення кватерніонів орієнтації отримані оцінки точності на еталонній моделі регулярної прецесії. Запропоновано покращення схем на основі фінітного нормування кватерніона і застосування більш точної апроксимації для уявних поворотів на такті.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, реверсивна схема, дрейф, еталонна модель.

**Вступ і постановка задачі.** При розв’язанні задачі визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС) в умовах

---

© Ю. А. Плаксіє, 2013