

ра линейно-переменной массы допускает замкнутое решение в цилиндрических функциях. Решение позволяет проводить расчёт динамических перемещений осциллятора без учёта их затухания во времени.

**Список литературы:** 1. *Меушерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы / И.В. Меушерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p. 3. *Светлицкий В.А.* Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с. 4. *Ольшанский В.П.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе // В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Х.: “Міськдрук”, 2012. – 320 с. 5. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

*Поступила в редколлегию 09.04.2013*

---

УДК 534.1

**Моделювання коливань осцилятора лінійно-змінної маси за імпульсного навантаження / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський** // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №37 (1010). – С. 125 – 130. Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто рух осцилятора лінійно-змінної маси при навантаженні його короткочасним імпульсом сталої сили. За допомогою циліндричних функцій побудовано замкнутий розв’язок задачі та проаналізовано результати розрахунків.

**Ключові слова:** осцилятор, лінійно-змінна маса, короткочасний імпульс, циліндричні функції.

The motion of the oscillator linearly variable mass when loaded his short pulses of constant force is considered. With cylindrical functions to construct a closed solution and analyzed the results.

**Key words:** an oscillator, linearly variable mass, short impulse, cylindrical functions.

УДК 629.7.05

**Ю.А. ПЛАКСІЙ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

## **ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕВЕРСИВНИХ СХЕМ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ ОРІЄНТАЦІЇ**

Для реверсивних схем визначення кватерніонів орієнтації отримані оцінки точності на еталонній моделі регулярної прецесії. Запропоновано покращення схем на основі фінітного нормування кватерніона і застосування більш точної апроксимації для уявних поворотів на такті.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, реверсивна схема, дрейф, еталонна модель.

**Вступ і постановка задачі.** При розв’язанні задачі визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС) в умовах

---

© Ю. А. Плаксіє, 2013

постійного такту роботи бортового обчислювача  $\Delta t$  до відповідних розрахункових алгоритмів інтегрування кінематичних рівнянь пред'являються жорсткі вимоги щодо мінімальної завантаженості обчислювача на такті при точності визначення параметрів орієнтації, достатній для виконання основної технічної задачі, яка покладена на рухомий об'єкт. Відомо, що для простих в обчислювальному плані алгоритмів низького порядку підвищення точності визначення орієнтації може бути досягнуто за рахунок спеціальної організації обчислень, наприклад, за рахунок застосування *реверсивної схеми* [1, 2].

Для первинної інформації про обертання твердого тіла, що поступає з гіроскопів на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  у вигляді *квазікоординат* [3] (тобто компонентів першої різниці вектору уявного повороту [4])

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i$  – проєкції вектора абсолютної кутової швидкості тіла на зв'язані осі, реверсивна схема алгоритму визначення кватерніона орієнтації наведена в [1].

За цією схемою на непарних тактах компоненти кватерніона орієнтації  $\Lambda_n^*$  обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_{n0}^* &= \lambda_{n-1,0}^* - \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,1}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n2}^* + \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n3}^*); \\ \lambda_{n1}^* &= \lambda_{n-1,1}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n3}^* - \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n2}^*); \\ \lambda_{n2}^* &= \lambda_{n-1,2}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^* \theta_{n2}^* + \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n1}^* - \lambda_{n1}^* \theta_{n3}^*); \\ \lambda_{n3}^* &= \lambda_{n-1,3}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^* \theta_{n3}^* + \lambda_{n1}^* \theta_{n2}^* - \lambda_{n2}^* \theta_{n1}^*). \end{aligned} \quad (2)$$

На парних тактах послідовність обчислень параметрів поточної орієнтації протилежна:

$$\begin{aligned} \lambda_{n3}^* &= \lambda_{n-1,3}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^* \theta_{n3}^* + \lambda_{n-1,1}^* \theta_{n2}^* - \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n1}^*); \\ \lambda_{n2}^* &= \lambda_{n-1,2}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^* \theta_{n2}^* + \lambda_{n3}^* \theta_{n1}^* - \lambda_{n-1,1}^* \theta_{n3}^*); \\ \lambda_{n1}^* &= \lambda_{n-1,1}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n2}^* \theta_{n3}^* - \lambda_{n3}^* \theta_{n2}^*); \\ \lambda_{n0}^* &= \lambda_{n-1,0}^* - \frac{1}{2}(\lambda_{n1}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n2}^* \theta_{n2}^* + \lambda_{n3}^* \theta_{n3}^*). \end{aligned} \quad (3)$$

При цьому в основу схеми (2), (3) покладений алгоритм першого поряд-

ку:

$$\lambda_{n0}^* = \lambda_{n-1,0}^* - \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,1}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n2}^* + \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n3}^*);$$

$$\lambda_{n1}^* = \lambda_{n-1,1}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n3}^* - \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n2}^*); \quad (1, 2, 3), \quad (4)$$

де (1, 2, 3) – символ кругової перестановки індексів.

Як зазначено в [1], застосування реверсивної схеми до алгоритму (4) забезпечує зменшення методичної похибки обчислення кватерніона орієнтації на порядок у порівнянні з методичною похибкою алгоритму (4).

Інша схема реверсивного алгоритму у випадку первинної інформації про обертання твердого тіла на такті у вигляді проєкцій  $\omega_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вектора абсолютної кутової швидкості тіла  $\vec{\omega}_n = \vec{\omega}(t_n)$  на зв'язані осі наведена в [5]. За цю схему на кожному такті обчислень визначається величина нормуючого множника  $s_n = 1 - \Lambda_{n-1}^2$ , де  $\Lambda_{n-1}^2 = \lambda_{n-1,0}^{*2} + \lambda_{n-1,1}^{*2} + \lambda_{n-1,2}^{*2} + \lambda_{n-1,3}^{*2}$ . Компоненти поточного кватерніона  $\Lambda_n^*$  обчислюються так:

– на непарних тактах

$$\lambda_{n0}^* = \lambda_{n-1,0}^* - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,1}^* \omega_{n1} + \lambda_{n-1,2}^* \omega_{n2} + \lambda_{n-1,3}^* \omega_{n3}) + 0,5 \lambda_{n-1,0}^* s_n;$$

$$\lambda_{n1}^* = \lambda_{n-1,1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^* \omega_{n1} + \lambda_{n-1,2}^* \omega_{n3} - \lambda_{n-1,3}^* \omega_{n2}) + 0,5 \lambda_{n-1,1}^* s_n;$$

$$\lambda_{n2}^* = \lambda_{n-1,2}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^* \omega_{n2} + \lambda_{n-1,3}^* \omega_{n1} - \lambda_{n1}^* \omega_{n3}) + 0,5 \lambda_{n-1,2}^* s_n;$$

$$\lambda_{n3}^* = \lambda_{n-1,3}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^* \omega_{n3} + \lambda_{n1}^* \omega_{n2} - \lambda_{n2}^* \omega_{n1}) + 0,5 \lambda_{n-1,3}^* s_n; \quad (5)$$

– на парних тактах

$$\lambda_{n3}^* = \lambda_{n-1,3}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^* \omega_{n3} + \lambda_{n-1,1}^* \omega_{n2} - \lambda_{n-1,2}^* \omega_{n1}) + 0,5 \lambda_{n-1,3}^* s_n;$$

$$\lambda_{n2}^* = \lambda_{n-1,2}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^* \omega_{n2} + \lambda_{n3}^* \omega_{n1} - \lambda_{n-1,1}^* \omega_{n3}) + 0,5 \lambda_{n-1,2}^* s_n;$$

$$\lambda_{n1}^* = \lambda_{n-1,1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^* \omega_{n1} + \lambda_{n2}^* \omega_{n3} - \lambda_{n3}^* \omega_{n2}) + 0,5 \lambda_{n-1,1}^* s_n;$$

$$\lambda_{n0}^* = \lambda_{n-1,0}^* - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n1}^* \omega_{n1} + \lambda_{n2}^* \omega_{n2} + \lambda_{n3}^* \omega_{n3}) + 0,5 \lambda_{n-1,0}^* s_n. \quad (6)$$

Схема (5), (6) побудована за принципом методів першого порядку; додатково в ній застосовано послідовне поточне нормування кватерніона. Порівняння цієї схеми зі схемою (2), (3) дозволяє зробити висновок, що тут використано представлення уявних поворотів (1) у вигляді  $\theta_{ni}^* = \omega_{ni} \cdot \Delta t$ .

Необхідно отримати дійсні оцінки точності визначення орієнтації реверсивних схем (2),(3) та (5), (6) на еталонній моделі регулярної прецесії твердого тіла і запропонувати шляхи підвищення точності цих схем.

### Дослідження реверсивних алгоритмів на моделі регулярної прецесії.

Для отримання оцінок методичних похибок реверсивних схем (2), (3) та (5), (6) застосуємо *еталонну модель регулярної прецесії* у вигляді аналітичних виразів для квазікоординат (уявних поворотів) [6]:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

де  $\theta_1(t) = 2a \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \psi) / k$ ,  $\theta_2(t) = -2a \sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \psi) / k$ ,  
 $\theta_3(t) = \omega_3(0) \cdot t$ ,

і аналітичних виразів для компонент кватерніона орієнтації  $\Lambda(t)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \\ \lambda_1(t) &= a \sin \alpha_2 \cos(\alpha_1 + \psi) / \nu; \\ \lambda_2(t) &= -a \sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \psi) / \nu; \\ \lambda_3(t) &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $a = (\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0))^{1/2}$ ,  $k = (1 - \xi_2)\omega_3(0)$ ,  $\xi_2 = I_3/I_1$ ,  $I_1, I_3$  – моменти інерції тіла відносно першої і третьої осі,  $\cos \psi = \omega_1(0)/a$ ,  $\sin \psi = -\omega_2(0)/a$ ,  $\alpha_1 = 0,5kt$ ,  $\alpha_2 = 0,5vt$ ,  $\nu = (a^2 + \xi_2^2 \omega_3^2(0))^{1/2}$ ,  $r = \xi_2 \omega_3(0) / \nu$ .

В якості похибок алгоритмів будемо розглядати *похибку дрейфу* [4]:

$$\delta\theta_n = 2 \arctg(|\text{vect}(\delta\Lambda_n)| / \text{sqal}(\delta\Lambda_n)), \quad (9)$$

де  $\delta\Lambda_n$  – кватерніон накопиченої похибки орієнтації,  $\delta\Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \tilde{\Lambda}_n$ ,  $\Lambda_n^*$  – обчислений кватерніон,  $\tilde{\Lambda}_n$  – кватерніон, спряжений до кватерніону орієнтації (8) еталонної моделі:  $\tilde{\Lambda}_n = \text{sqal}(\Lambda_n) - \text{vect}(\Lambda_n)$ ; а також *похибку норми обчисленого кватерніона орієнтації*:

$$\chi_n = 1 - \Lambda_n^2, \quad (10)$$

де  $\Lambda_n^2 = \lambda_{n0}^{*2} + \lambda_{n1}^{*2} + \lambda_{n2}^{*2} + \lambda_{n3}^{*2}$ .

На рис.1 показана залежність від часу оцінки похибки дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3), що отримана на еталонній моделі (7), (8) при початкових умовах  $\vec{\omega}(0) = (-0,0212; -0,012; -0,015)$  [рад/с],  $\Lambda(0) = (1; 0; 0; 0)^T$ ,  $\xi_2 = 0,45$  на інтервалі часу  $t \in [0; 2000]$ с,  $\Delta t = 0,1$ с.

Для порівняння на рис.2 представлені також оцінки похибки дрейфу для алгоритму першого порядку (4) і алгоритму другого порядку [3]:

$$\lambda_{n0}^* = \lambda_{n-1,0}^* (1 - \frac{1}{8} \Lambda_n^2) - \frac{1}{2} (\lambda_{n-1,1}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n2}^* + \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n3}^*);$$

$$\lambda_{n1}^* = \lambda_{n-1,1}^* \left(1 - \frac{1}{8} \Lambda_n^2\right) + \frac{1}{2} (\lambda_{n-1,0}^* \theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^* \theta_{n3}^* - \lambda_{n-1,3}^* \theta_{n2}^*); \quad (1,2,3). \quad (11)$$

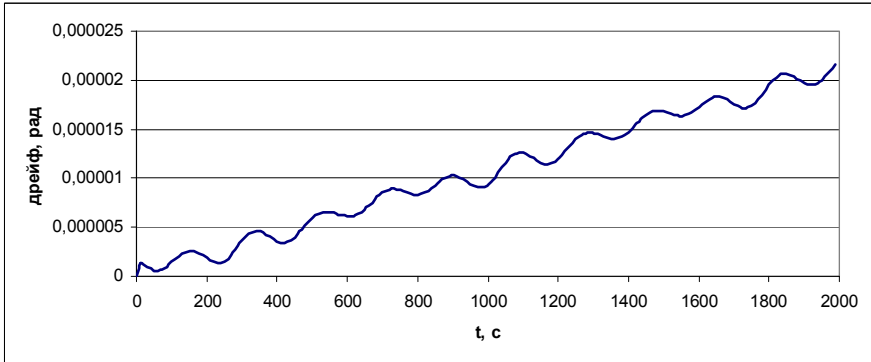


Рис. 1– Оцінки похибки дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3).

Як видно з графіків рис.2, оцінка похибки дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3) приблизно в 2 рази краща, ніж для алгоритму першого порядку, але на 25% гірша, ніж для алгоритму другого порядку.

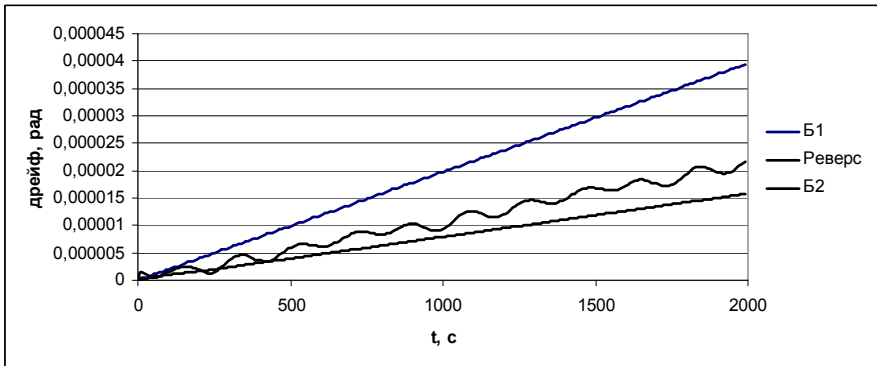


Рис. 2– Оцінки похибки дрейфу для алгоритму першого порядку (4) (верхня лінія), другого порядку (11) (нижня лінія) та реверсивного алгоритму (2), (3).

Залежність від часу оцінки похибки норми  $\chi_n$  для реверсивного алгоритму (2), (3) показана на рис.3. Хоча в цьому алгоритмі не передбачене нормування кватерніона, завдяки реверсивній схемі оцінка похибки норми з часом не зростає і лежить в межах  $-2,1 \cdot 10^{-6} < \chi_n < -1,1 \cdot 10^{-7}$ .

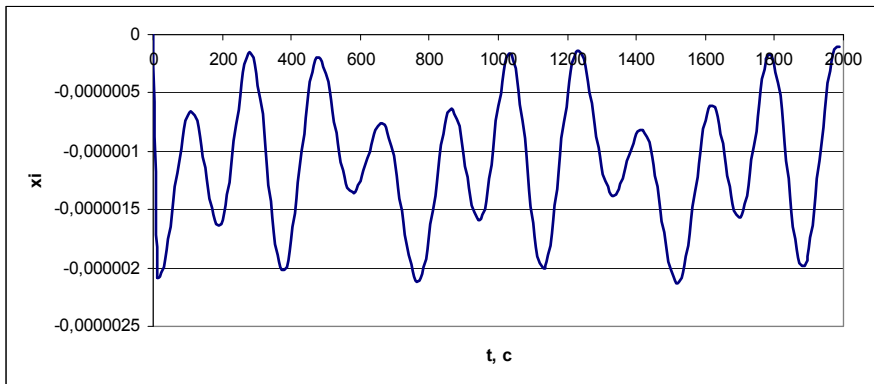


Рис. 3 – Оцінка похибки норми  $\chi_n$  для алгоритму (2), (3).

Застосування реверсивної схеми до алгоритму (11) характеризується оцінками дрейфу і похибки норми, що наведені на рис.4 і рис.5. Ці оцінки навіть гірші, ніж для алгоритму першого порядку (4). Таким чином, реверсивна схема обчислень забезпечує підвищення точності визначення орієнтації тільки для алгоритму першого порядку.

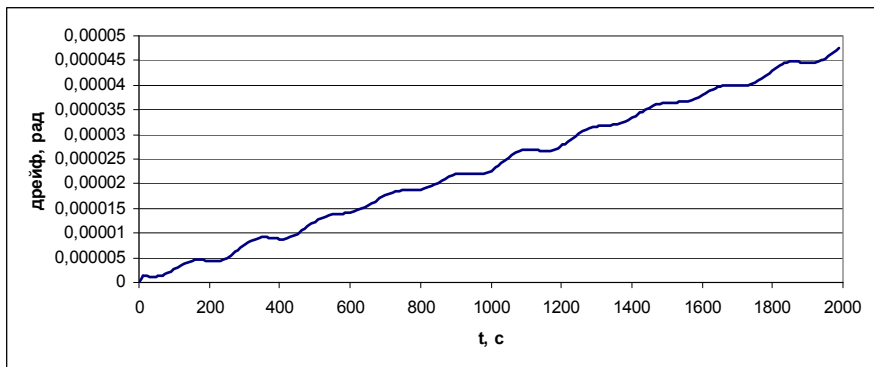


Рис. 4 – Оцінка похибки дрейфу для реверсивної схеми другого порядку.

### **Фінітне нормування кватерніона орієнтації в реверсивних схемах.**

Вдосконалення реверсивної схеми (2), (3) можливе за рахунок включення в цю схему процедури нормування кватерніона орієнтації. Таке нормування може бути попереднім (на початку обчислень на такті), послідовним поточним (як у наведеній схемі (5), (6)) і фінітним (після всіх обчислень на такті). Проведене дослідження показує, що саме фінітне нормування кватерніона орієнтації є найбільш доцільним.

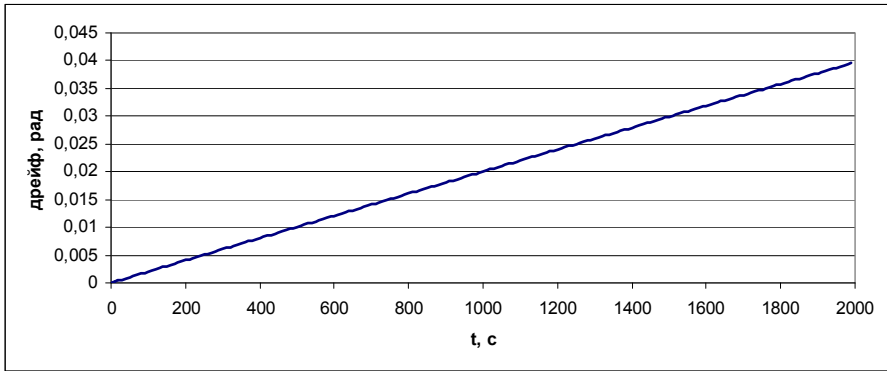


Рис. 5 – Оцінка похибки норми  $\chi_n$  для реверсивної схеми другого порядку.

Для нормування кватерніона орієнтації  $\Lambda_n^*$  застосуємо формулу:

$$\Lambda_n^{**} = \frac{\Lambda_n^*}{1 + \alpha}, \quad (12)$$

де  $\|\Lambda_n^{**}\| = 1$ ,  $|\alpha| < 1$ . Покомпонентно з (12) маємо:

$$\lambda_{ni}^{**} = \frac{\lambda_{ni}^*}{1 + \alpha}, \quad i = \overline{0,3}. \quad (13)$$

Возведемо (13) в квадрат і складемо суму по  $i$ , в результаті отримаємо вираз

$$\Lambda_n^2 = (1 + \alpha)^2,$$

з якого з урахуванням малості величини  $\alpha$  знайдемо її значення:

$$\alpha = 0,5(\Lambda_n^2 - 1).$$

Оскільки  $|\alpha| < 1$ , то, помноживши чисельник і знаменник правої частини (12) на  $(1 - \alpha)$  і нехтуючи величиною  $\alpha^2$  в знаменнику, можна замінити (12) наближеною формулою:

$$\Lambda_n^{**} = \Lambda_n^*(1 - \alpha),$$

яка з урахуванням виразу для  $\alpha$  набуває остаточного вигляду:

$$\Lambda_n^{**} = \Lambda_n^*(1,5 - 0,5\Lambda_n^2). \quad (14)$$

Таке нормування не використовує операцію ділення, на відміну від звичайного нормування кватерніона і не впливає на похибку дрейфу, при цьому забезпечується асимптотична стійкість процесу нормування:  $\|\Lambda_n^{**}\| \rightarrow 1$ .

Застосуємо фінітне нормування в складі реверсивної схеми (2), (3). Отримана оцінка похибки дрейфу наведена на рис.6. Очевидно, має місце

значне покращення оцінки похибки норми в порівнянні з ненормованою схемою.

Розглянемо тепер реверсивну схему (5), (6). Залежності від часу оцінок похибки дрейфу і похибки норми для цієї схеми представлені на рис.7 і рис.8.

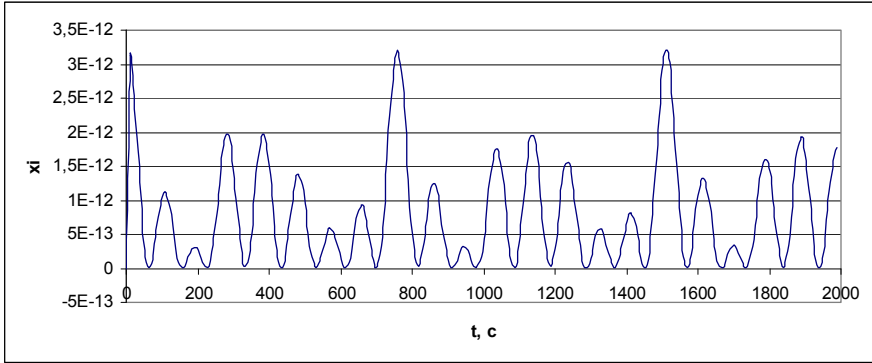


Рис. 6 – Оцінка похибки норми  $\chi_n$  для реверсивної схеми (2), (3) з фінітним нормуванням кватерніона.

Для цього алгоритму оцінка похибки дрейфу має пилкообразний характер і на порядок гірша за оцінку дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3). Поточне нормування кватерніона орієнтації забезпечує оцінку похибки норми приблизно у межах  $-2 \cdot 10^{-6} < \chi_n < 1,6 \cdot 10^{-6}$ , при цьому зростання похибки не відбувається.

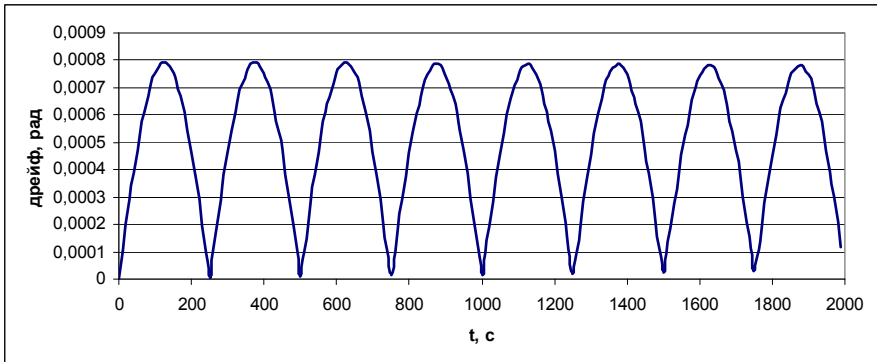


Рис. 7 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму (5), (6).

Вдосконалимо схему (5), (6) за рахунок використання первинної інформації з попереднього такту  $[t_{n-2}, t_{n-1}]$  і фінітного нормування кватерніона



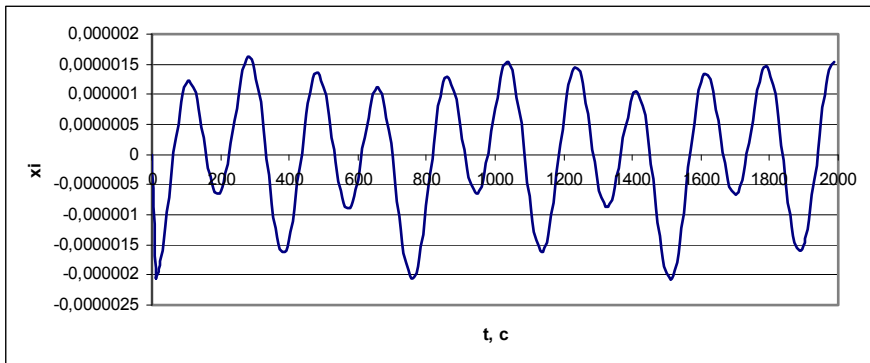


Рис. 8 – Оцінка похибки норми  $\chi_n$  для алгоритму (5), (6).

орієнтації. При цьому замість представлення позірних поворотів у вигляді  $\theta_{ni}^* = \omega_{ni} \cdot \Delta t$  застосуємо більш точну апроксимацію:

$$\theta_{ni}^* = 0,5(\omega_{n-1,i} + \omega_{ni})\Delta t . \quad (15)$$

Тоді кватерніон орієнтації обчислюється на непарних тактах за формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_{n0}^* &= \lambda_{n-1,0}^* - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,1}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n-1,2}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n-1,3}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3})); \\ \lambda_{n1}^* &= \lambda_{n-1,1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n-1,2}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) - \lambda_{n-1,3}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2})); \\ \lambda_{n2}^* &= \lambda_{n-1,2}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n-1,3}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) - \lambda_{n1}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3})); \\ \lambda_{n3}^* &= \lambda_{n-1,3}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) + \lambda_{n1}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) - \lambda_{n2}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1})). \quad (16) \end{aligned}$$

На парних тактах компоненти кватерніона орієнтації обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_{n3}^* &= \lambda_{n-1,3}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) + \lambda_{n-1,1}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) - \lambda_{n-1,2}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1})); \\ \lambda_{n2}^* &= \lambda_{n-1,2}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n3}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) - \lambda_{n-1,1}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3})); \\ \lambda_{n1}^* &= \lambda_{n-1,1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n2}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) - \lambda_{n3}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2})); \\ \lambda_{n0}^* &= \lambda_{n-1,0}^* - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n1}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n2}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n3}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3})). \quad (17) \end{aligned}$$

Додатково в кінці кожного такту обчислень до отриманого кватерніона орієнтації застосовується фінітне нормування за формулою (14).

Результати оцінювання похибки дрейфу і похибки норми для цієї схеми наведені на рис.9 і рис.10 і мало відрізняються від результатів, отриманих для схеми (2), (3) з додатковим фінітним нормуванням (див. рис.1 і рис.6).

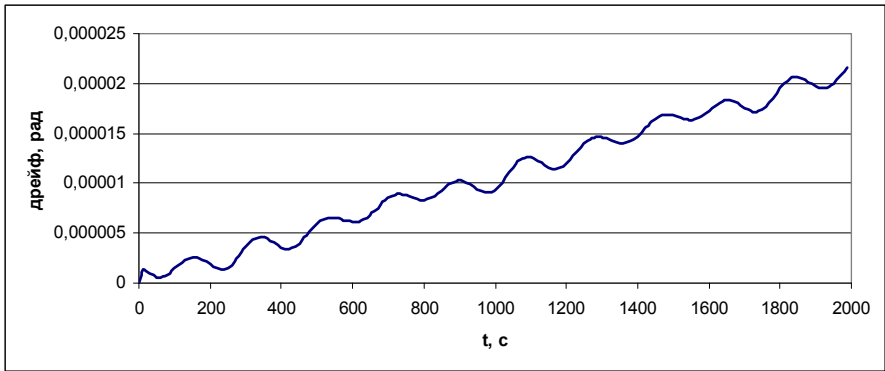


Рис. 9 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму (16), (17) з фінітним нормуванням.

Порівняння отриманих результатів оцінювання точності для запропонованого алгоритму (16), (17), що використовує фінітне нормуванням з відповідними оцінками точності для відомої схеми (5), (6), де відбувається послідовне поточне нормування кватерніона, показує суттєве підвищення точності визначення орієнтації як за оцінкою похибки дрейфу, так і за оцінкою похибки норми.

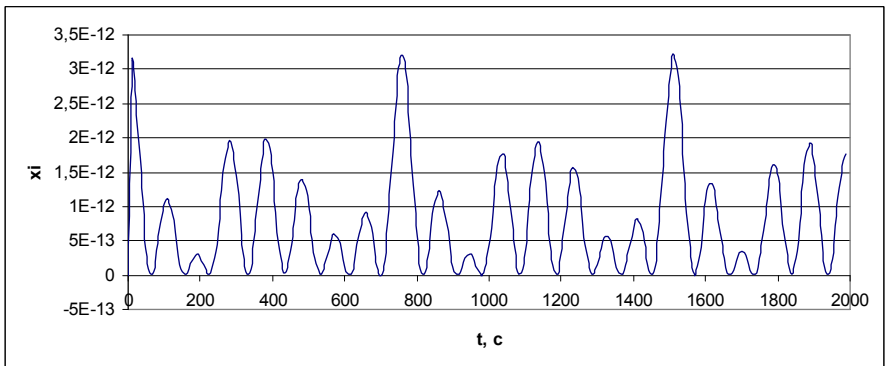


Рис. 10 – Оцінка похибки норми  $\chi_n$  для алгоритму (16), (17) з фінітним нормуванням.

**Висновки.** Розглянуті реверсивні схеми визначення кватерніона орієнтації в БІНС для різних випадків первинної інформації про обертання твердо-

---

ISSN 2222-0631. Вісник НТУ «ХПІ». 2013. №37 (1010) 139

го тіла. На основі еталонної моделі регулярної прецесії отримані оцінки точності реверсивних схем у вигляді похибки дрейфу і похибки норми. Отримано, що для алгоритму першого порядку реверсивна схема має меншу похибку дрейфу, ніж для алгоритму без цієї ж схеми, але гіршу, ніж для алгоритму другого порядку без вказаної схеми. Показано, що ефективне застосування реверсивної схеми обмежено алгоритмами першого порядку.

Для покращення точності реверсивних схем запропонована процедура фінітного нормування кватерніона орієнтації, яка не впливає на похибку дрейфу і не використовує операцію ділення. Також відома реверсивна схема вдосконалена шляхом застосування більш точної апроксимації позірних поворотів на такті обчислень.

**Список літератури:** 1. *Ткаченко А.И.* Повышение точности вычисления кинематических параметров // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1973.– вып. 19.– С. 117–121. 2. *Ткаченко А.И.* Повышение точности интегрирования одной системы дифференциальных уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – т. XV, №2. –С. 509–512. 3. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем – М.: Наука, 1992. – 280 с. 4. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с. 5. *Беляев С.Н., Истомин А.Е.* Моделирование двухплоскостного бесплатформенного стабилизатора вооружения легкобронированной боевой машины // Механіка та машинобудування. – 2011, №2.–С.87–94. 6. *Плаксій Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2,.–1992, вып. 11.–С.79–83.

*Надійшла до редколегії 07.05.2013*

---

УДК 629.7.05

**Підвищення точності реверсивних схем алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації / Ю. А. Плаксій** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 130 – 140. Бібліогр.: 6 назв.

Для реверсивних схем определения кватернионов ориентации получены оценки точности на эталонной модели регулярной прецессии. Предложено улучшение схем на основе финитного нормирования кватерниона и применения более точной аппроксимации для кажущихся поворотов на такте.

**Ключевые слова:** кватернион, ориентация, реверсивная схема, дрейф, эталонная модель.

Accuracy estimates for reverse schemes of definition of orientation quaternions on wobbling reference model are received. Improvement of schemes based on the finite rationing of a quaternion and application of more exact approximation for seeming turns on a step is offered.

**Key words:** quaternion, orientation, reverse scheme, drift, reference model.