

**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ РАСЧЁТА ИМПУЛЬСОВ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБОПРОВОДУ

Описаны численно-аналитические методы учёта гидравлического сопротивления трубопровода при импульсном режиме течения вязкой жидкости. Используются аналитические решения уравнений осесимметричного турбулентного или ламинарного течения, полученные в форме интегралов Дюамеля с ядрами Коши. Выполнена аппроксимация ядер, которая позволила упростить расчётные формулы метода без существенного снижения точности расчёта. Даны примеры использования методов для топливных систем дизельных и газодизельных двигателей.

**Ключевые слова:** осесимметричное течение, профиль скоростей, гидродинамический расчёт, телеграфное уравнение, операционное исчисление, интеграл Дюамеля, ядро Коши.

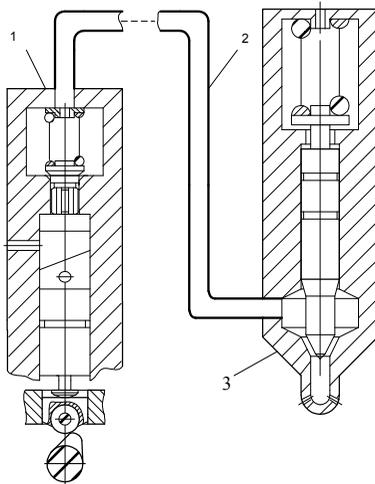


Рис. 1 – Линия высокого давления топливной аппаратуры дизеля:

1 – насос; 2 – трубопровод;  
3 – форсунка.

**Введение в основы учёта гидравлического сопротивления трубопровода при импульсном течении вязкой жидкости.** Такой режим течения наблюдается, напр., при работе топливной аппаратуры дизеля, схема которой показана на рис.1. За один рабочий цикл столб топлива продвигается по трубопроводу на 5 – 20% его длины, а коэффициент скважности для импульсов давления и скорости составляет 20 единиц и более, поэтому в промежутках между впрыскиваниями колебания практически полностью за-



Рис. 2. – Импульсы скорости течения.

тухают (рис.2). Число Маха в импульсе обычно не превышает 0.05, что в известных уравнениях динамики жидкости [1] позволяет пренебречь переносной скоростью и воспользоваться акустическим приближением, которое приводит к волновому или телеграфному уравнениям. Важной отличительной особенностью изучаемых переходных процессов является их скоротеч-

ность; для высокооборотного дизеля продолжительность импульса, показанного на рис.2, соизмерима с продолжительностью распространения волны давления от насоса к форсунке и обратно.

Система уравнений, описывающая движение жидкости по трубопроводу, после пренебрежения конвективными членами принимает вид:

$$1/(a^2 \rho) \partial P / \partial t = -\partial U / \partial x ; \partial U / \partial t = -(1/\rho) \partial P / \partial x - 2K(U)U, \quad (1)$$

и после исключения давления  $P$  и плотности  $\rho$  приводит к телеграфному уравнению

$$(1/a^2) \partial^2 U / \partial t^2 = \partial^2 U / \partial x^2 - (2K(U)/a^2) \partial U / \partial t, \quad (2)$$

где  $U$  – средняя по сечению  $x$  скорость жидкости в момент времени  $t$ ;  $a$  – скорость звука;  $K(U)$  – фактор гидравлического сопротивления, который зависит от режима течения,

- $K(U) = const$  для ламинарного потока (формула Пуазейля),
- $K(U) \sim |U|^{3/4}$  для переходной области (формула Блазиуса),
- $K(U) \sim |U|$  для турбулентного потока (формула Идельчика).

Если пренебречь вязкостью, уравнение (2) становится волновым, а его решение использует волны Даламбера или (если считать скорость звука переменной) инварианты Римана [1]. Однако такое решение неправильно описывает процесс затухания импульса; кроме того оно зачастую приводит к заметной погрешности при расчёте его амплитуды и формы.

В методиках гидродинамического расчета топливной аппаратуры дизелей традиционно используются два метода учета гидравлического сопротивления нагнетательного трубопровода – Т.Ф. Кузнецова [2] и Ю.Я. Фомина [3]. В первом методе учет вязкости сводится к включению в уравнения математической модели, разработанной И.В. Астаховым [4], дополнительных множителей  $K_g$ , уменьшающих амплитуды волн при их распространении по трубопроводу. Величина множителей определяется исходя из уровня средней для всего процесса скорости  $U_{cp}$  топлива в трубопроводе по формуле

$$K_g = \exp(-K(U_{cp}) T),$$

где  $T = L/a$  – запаздывание распространения волны;  $L$  – длина трубопровода.

Главный недостаток этого метода заключается в том, что на промежутке времени  $t \in [0; 2T]$ , то есть до момента прихода к насосу отраженных от форсунки волн, вязкость топлива не оказывает влияния на изменение давлений в полостях насоса. На практике такой учет гидравлического сопротивления трубопровода приводит к занижению расчетных значений этих давлений по сравнению с результатами эксперимента на 5...10 % и более.

В методе Ю.Я.Фомина учет гидравлического сопротивления произво-

дится путем численного интегрирования телеграфного уравнения (2) вдоль характеристик  $x - at = const$ . Этот метод устраняет указанный недостаток метода Т.Ф. Кузнецова. К тому же он считается более точным, поскольку учитывает зависимость фактора сопротивления  $K$  от текущих значений скорости топлива в данном сечении трубопровода. Однако численное интегрирование телеграфного уравнения по сравнению с его аналитическим решением более трудоемко. Кроме того, использование переменного фактора  $K$  в теоретическом плане недостаточно обосновано (см. [5]).

Для устранения описанных в [5] противоречий приходится считать, что фактор  $K$  зависит не от текущего, а от некоторого усредненного значения скорости, причем порядок усреднения для общего случая пока не ясен. При моделировании топливной аппаратуры малооборотных дизелей, отличающейся малой интенсивностью изменения параметров течения, можно, как и Ю.Я. Фомин считать, что  $U_{cp} = U$ ; адекватность получаемых результатов экспериментальным данным здесь доказана.

Для высокооборотных дизелей доказана адекватность другого крайнего подхода: в методе Т.Ф. Кузнецова усреднение скорости производится для всего процесса топливоподачи; здесь  $K(x, t) = const$ .

Для среднеоборотных дизелей на номинальном режиме работы во время основной фазы топливоподачи наблюдается выравнивание значений скоростей топлива в трубопроводе, поэтому здесь с равным успехом может быть использовано оба подхода к определению величины фактора сопротивления.

**Цель публикации.** Принятие условия  $K = const$  позволяет найти точные, а не приближенные, как в методе Т.Ф. Кузнецова, аналитические решения системы уравнений (1) и, тем самым, отказаться от применения трудоемкого численного метода характеристик [3]. Порядок и результаты использования такого подхода будут изложены ниже. Но прежде необходимо указать на известную ограниченность этого подхода, вызванную применением для учёта гидравлического сопротивления моделей квазистационарного течения. Пока в гидромеханике не будет создан замкнутый (то есть не использующий эмпирических констант и эвристических допущений) метод расчета нестационарных турбулентных течений, эта ограниченность будет присуща всем методикам этого типа. Для нестационарных ламинарных течений такой метод разработан (см. далее в этой статье), и его использование может привести, как показано в [6], к существенному уточнению результатов, причем как по амплитудным показателям, так и качественно.

**Аналитическое решение телеграфного уравнения.** Придем к выводу расчетных уравнений уточненного метода. К системе (2) с начальными условиями

$$U(x, 0) = 0, \quad P(x, 0) = 0$$

(в силу линейности уравнений величину остаточного давления  $P_{ост}$  можно, временно, не учитывать) и граничными условиями

$$U(0, t) = U_n(t), U(L, t) = U_\phi(t) \text{ или } P(0, t) = P_n(t), P(L, t) = P_\phi(t),$$

где  $U_n, U_\phi, P_n, P_\phi$  – скорости и давления топлива в сечениях трубопровода у насоса и у форсунки, применим преобразование Лапласа по переменной  $t$ . Комбинируя решения получаемой при этом системы уравнений

$$d\hat{U}/dx = -1/(a^2\rho) \cdot s \cdot \hat{P}; \quad d\hat{P}/dx = -\rho \cdot (s + 2K) \cdot \hat{U}, \quad (3)$$

для изображений  $\hat{U}(x, s)$  и  $\hat{P}(x, s)$ , придем к следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \hat{U} + (s/b(s))\hat{P}/(a\rho) &= [\hat{U}_n + (s/b(s))\hat{P}_n/(a\rho)] \exp(-b(s)x/a) \\ \hat{U} - (s/b(s))\hat{P}/(a\rho) &= [\hat{U}_\phi - (s/b(s))\hat{P}_\phi/(a\rho)] \exp(-b(s)(L-x)/a) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где  $s$  – переменная Лапласа;  $b(s) = \sqrt{s(s+2K)}$ .

Выполним в (4) обратное образование Лапласа и введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} F(x, t) &= (1/2) \cdot [U(x, t) + (a \cdot \rho)^{-1} \cdot \int_0^t g(t-\tau) \cdot P(x, \tau) d\tau] \\ W(x, t) &= (1/2) \cdot [U(x, t) - (a \cdot \rho)^{-1} \cdot \int_0^t g(t-\tau) \cdot P(x, \tau) d\tau] \end{aligned} \right\}; \quad (5)$$

$$F_n(t) = F(0, t); \quad F_\phi(t) = F(L, t); \quad W_n(t) = W(0, t); \quad W_\phi(t) = W(L, t),$$

где  $g(t)$  – оригинал функции  $G(S) = S/b(S)$ ; по таблицам [7] определяем:

$$g(t) = \delta_0(t) - K \cdot \exp(-Kt) [I_0(Kt) - I_1(Kt)]; \quad (6)$$

$\delta_0(x)$  – дельта-функция Дирака;  $I_0(x), I_1(x)$  – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

График весовой функции  $g_1(x) = I_0(x) - I_1(x)$ , используемой в регулярированной части ядра  $g(t)$ , приведен на рис.3.

Для прояснения смысла равенств (4), (5) примем величину фактора трения  $K$  равной нулю. Тогда телеграфное уравнение (3) станет волновым, определения (5) упростятся:

$$\begin{aligned} F(x, t) &= (1/2) \cdot [U(x, t) + (a\rho)^{-1} \cdot P(x, t)]; \\ W(x, t) &= (1/2) \cdot [U(x, t) - (a\rho)^{-1} \cdot P(x, t)] \end{aligned}$$

и совпадут с известными формулами для прямой  $F$  и отраженной  $W$  волн скорости, используемыми в методе И.В. Астахова [4]. Формулы (4) примут после перехода к оригиналам следующий вид:

$$F(x, t) = F_n(t - x/a); \quad W(x, t) = W_\phi(t - (L-x)/a)$$

и будут отражать известный факт инвариантности амплитуд этих волн при распространении по столбу жидкости в трубопроводе.

Гидравлическое сопротивление (случай  $K > 0$ ) приводит к усложнению этих условий. Так при формировании волн  $F_n$  и  $W_\phi$  учитываются теперь не только мгновенные величины давлений  $P_n(t)$  и  $P_\phi(t)$ , но и их значения в предшествующие моменты времени:

$$\left. \begin{aligned} F_n(t) &= (1/2) \cdot [U_n(t) + (a\rho)^{-1} \cdot (P_n(t) - K \cdot \int_0^t g_p(t-\tau) \cdot P_n(\tau) d\tau)] \\ W_\phi(t) &= (1/2) \cdot [U_\phi(t) - (a\rho)^{-1} \cdot (P_\phi(t) - K \cdot \int_0^t g_p(t-\tau) \cdot P_\phi(\tau) d\tau)] \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где  $g_p(t)$  – регулярная часть ядра  $g(t)$ ,  $g_p(t) = \exp(-Kt) \cdot g_1(Kt)$ .

При распространении по трубопроводу эти волны испытывают искажения, которые, как это следует из (4), описываются интегралами Дюамеля:

$$\left. \begin{aligned} F_\phi(t) &= \exp(-K \cdot T) \cdot F_n(t-T) + K^2 \cdot T \cdot \int_0^{t-T} g_T(t-\tau) \cdot F_n(\tau) d\tau \\ W_n(t) &= \exp(-K \cdot T) \cdot W_\phi(t-T) + K^2 \cdot T \cdot \int_0^{t-T} g_T(t-\tau) W_\phi(\tau) d\tau \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где ядро  $g_T(T)$  определяется по таблицам [7] преобразований Лапласа:

$$g_T(T) = \exp(-Kt) \cdot J_1(K\sqrt{t^2 - T^2}) / (K\sqrt{t^2 - T^2}), \quad (9)$$

$J_1(x)$  – функция Бесселя первого порядка.

График функции  $g_2(x) = J_1(x)/x$ , используемой в формуле (9), приведен на рис.3. Отметим, что учет гидравлического сопротивления не привёл к изменению запаздывания волны при ее распространении по трубопроводу.

Система равенств (7), (8) замыкается двумя граничными условиями

$$U_n = F_n + W_n, \quad U_\phi = F_\phi + W_\phi; \quad (10)$$

определенные таким образом скорости топлива  $U_n(t)$  и  $U_\phi(t)$  используются в известных уравнениях объемного баланса, составленных для полостей штуцера топливного насоса и кармана распылителя форсунки в рамках метода расчета гидромеханического узла [8].

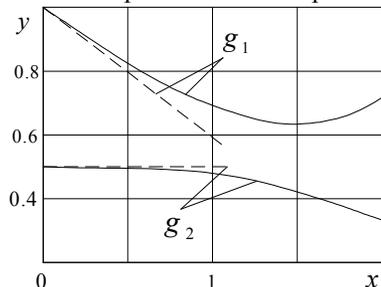


Рис. 3 – Графики весовых функций (сплошная линия) и их аппроксимаций (пунктир).

**Аппроксимация расчётных уравнений.** Система равенств (6) – (10) даёт точное решение поставленной задачи при любом значении фактора  $K$ , однако расчетные уравнения оказались сложными. Для упрощения этих уравнений воспользуемся тем, что при гидродинамическом расчете топливной аппаратуры выполняется условие

$$(Kt) \in [0; 1].$$

В этом случае функция  $g_2(Kt) \cong 0.5$  (рис.3), а функцию  $g_1(Kt)$  аппроксимирует следующая зависимость экспоненциального типа:

$$g_1(Kt) \cong \exp(-Kt/2).$$

Выбор экспоненциальной формулы для аппроксимации ядра интеграла Дюамеля не случаен, поскольку известно, что интеграл с таким ядром является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка. Воспользуемся этим приемом для вычисления интегралов, стоящих в правых частях формул (7) и (8).

Эти интегралы определяют значения некоторых функций, которые мы далее будем обозначать  $I_n(t), I_\phi(t), j_n(t-T), j_\phi(t-T)$ , соответственно. Тогда расчетным уравнениям предлагаемого метода можно придать следующую окончательную форму:

- для входного сечения трубопровода

$$W_n(t) = \exp(-KT) \cdot [W_\phi(t-T) + 0.5 \cdot (KT) \cdot K \cdot j_\phi(t-T)]; \quad (11)$$

$$F_n(t) = W_n(t) + (\alpha\rho)^{-1} \cdot [P_n(t) - P_{ocm} - K \cdot I_n(t)]; \quad (12)$$

$$I'_n(t) + 1.5K \cdot I_n(t) = P_n(t) - P_{ocm}; \quad j'_n(t) + K \cdot j_n(t) = F_n(t); \quad (13)$$

- для выходного сечения трубопровода

$$F_\phi(t) = \exp(-KT) \cdot [F_n(t-T) + 0.5 \cdot (KT) \cdot K \cdot j_n(t-T)]; \quad (14)$$

$$W_\phi(t) = F_\phi(t) - (\alpha\rho)^{-1} \cdot [P_\phi(t) - P_{ocm} - K \cdot I_\phi(t)]; \quad (15)$$

$$I'_\phi(t) + 1.5K I_\phi(t) = P_\phi(t) - P_{ocm}; \quad j'_\phi(t) + K \cdot j_\phi(t) = W_\phi(t). \quad (16)$$

В этих равенствах учтено остаточное давление  $P_{ocm}$ .

Уравнения (13) и (16) интегрируются при нулевых начальных условиях численным методом. Очередной шаг интегрирования выполняется после определения текущих значений  $P_n(t)$  и  $P_\phi(t)$ , поэтому дополнительные уравнения не увеличивают трудоёмкость гидродинамического расчета узла.

Формулы (11), (12) и (14), (15) отличаются от аналогичных формул метода [2]; слагаемых, содержащих функции  $j_n, j_\phi, I_n$  и  $I_\phi$ , там не было.

Для большинства топливных систем, за исключением систем судовых дизелей, работающих на вязком топливе и имеющих длинные нагнетательные трубопроводы, коэффициент  $(KT)$ , используемый в этих формулах, не

превосходит 0.05; кроме того величины  $K j_\phi$  и  $K j_n$  также малы. Поэтому вторым слагаемым в формулах (11), (14) можно пренебречь, и они примут такой же вид, как и в *методе Т.Ф. Кузнецова* [2]:

$$W_n(t) = \exp(-KT)W_\phi(t-T); \quad F_\phi(t) = \exp(-KT)F_n(t-T). \quad (17)$$

Для высокооборотных дизелей при гидродинамическом расчете выполняется условие  $(Kt) \in [0; 0.2]$ , которое позволяет пренебречь членами второго порядка малости относительно  $(Kt)$  и упростить уравнения (13), (16):

$$I'_n(t) = P_n(t) - P_{осм}, \quad I'_\phi(t) = P_\phi(t) - P_{осм}.$$

Однако в формулах (12), (15) слагаемые  $K I_n(t)$  и  $K I_\phi(t)$  имеют первый порядок малости относительно величины  $P_n(t)$  или  $P_\phi(t)$  и отброшенными, как это фактически сделано в методе [2], быть не могут. Эти дополнительные слагаемые имеют размерность давления и по своему физическому смыслу представляют собой интегральную сумму отраженных волн, образующихся в промежуточных сечениях трубопровода в результате искажения прямой  $F$  или обратной  $W$  волны под влиянием вязкости топлива.

**Анализ и сопоставление результатов.** Для оценки влияния предлагаемых уточнений на результаты гидродинамического расчета рассмотрим следующую *модельную задачу*. Будем описывать процесс сжатия топлива в полости высокого давления насоса известным дифференциальным уравнением

$$\alpha V_n d P_n(t) / dt = f_n C_n - f_T U_n(t) \quad (18)$$

при начальном условии  $P_n(0) = 0$  ( $P_{осм} = 0$ ), где  $\alpha$  – коэффициент сжимаемости топлива;  $V_n$  – объем полости;  $f_n, C_n$  – площадь и скорость плунжера;  $f_T$  – площадь поперечного сечения трубопровода.

Для вычисления скорости топлива  $U_n(t)$  воспользуемся формулами (10) и (11). В данной задаче не будем учитывать отраженные от форсунки волны, вследствие чего эти формулы станут эквивалентны равенствам

$$U_n(t) = F_n(t) = (a\rho)^{-1} \cdot [P_n(t) - K \cdot I_n(t)].$$

При интегрировании уравнения (18) величины  $\alpha, V_n, C_n$  будем считать постоянными; дросселированием топлива через не полностью закрытые всасывающие окна мы при записи этого уравнения пренебрегли.

Для повышения общности перейдем к безразмерным величинам:

$$\text{времени } \tau, \tau = t/T_n; \text{ давлениям } \bar{P}_n = P_n/P_0 \text{ и } \bar{I}_n = I_n/(T_n P_0);$$

$$\text{скоростям } \bar{U}_n = U_n/U_0 \text{ и } \bar{F}_n = F_n/U_0; \text{ фактору } \bar{K} = K \cdot T_n,$$

где

$$T_n = V_n / (f_n a); \quad P_0 = a \rho f_n C_n / f_T; \quad U_0 = f_n C_n / f_T.$$

Если пренебречь вязкостью топлива, то величина  $T_n$  будет постоянной времени для исследуемого переходного процесса, а  $P_0$  и  $U_0$  будут определять уровни, к которым приближаются давления  $P_n(t)$  и скорости  $U_n(t)$  или  $F_n(t)$ . В новых переменных уравнения задачи примут вид:

$$d\bar{P}_n/d\tau = 1 - \bar{P}_n + \bar{K} \cdot \bar{I}_n; \quad d\bar{I}_n/d\tau + 1.5\bar{K} \cdot \bar{I}_n = \bar{P}_n. \quad (19)$$

Система (19) была решена аналитически. Формы решений, получаемые при учете вязкости (случай  $K > 0$ ) и без учета вязкости (случай  $K = 0$ ), показаны на рис.4 а сплошной и пунктирной линией, соответственно.

Как и следовало ожидать, учет вязкости топлива привел к увеличению давления в насосе и уменьшению скорости в прямой волне подачи. С целью получения количественных оценок влияния вязкости на результаты расчетов были выведены формулы для величин  $\delta P(\tau)$  и  $\delta F(\tau)$  относительных расхождений между ординатами сравниваемых кривых  $P_n(\tau)$  или  $F_n(\tau)$ . Эти формулы имеют вид:

$$\delta P(\tau) = \bar{K} \cdot \delta \bar{P}(\tau); \quad \delta F(\tau) = \bar{K} \cdot \delta \bar{F}(\tau),$$

где

$$\delta \bar{P}(\tau) = \tau \cdot [1 + 2 / (\exp(\tau) - 1)]; \quad \delta \bar{F}(\tau) = 1 - \tau / [\exp(\tau) - 1].$$

Графики функций  $\delta \bar{P}(\tau)$  и  $\delta \bar{F}(\tau)$  приведены на рис.4 б.

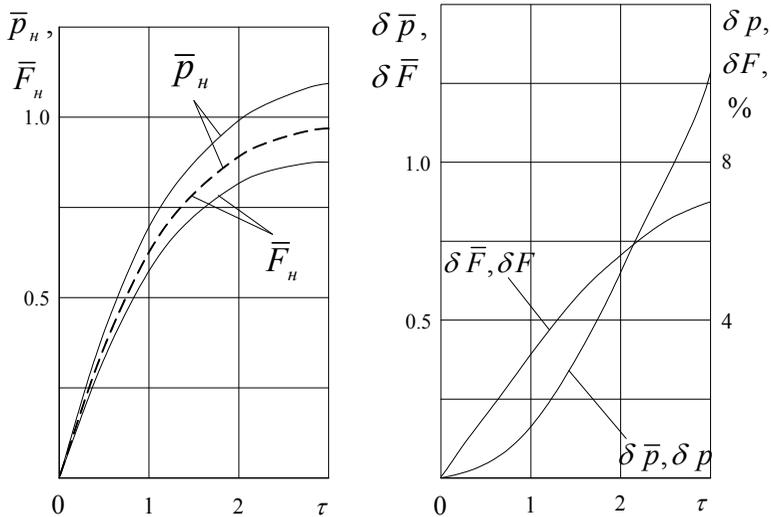


Рис. 4. – Влияние гидравлического сопротивления на процесс сжатия в насосе:

а – значения сравниваемых величин; б – расхождения.

Для большинства насосов используемая в этих формулах постоянная времени  $T_n$  изменяется примерно пропорционально величине полного хода плунжера и составляет, для примера,  $0,5 \text{ мс}$  для дизелей семейства КамАЗ,  $1,0 \text{ мс}$  для автомобильного дизеля ДМ 21А,  $1,5 \text{ мс}$  для тепловозного дизеля 5ЧН31/36, и т.д. На номинальном режиме этих дизелей величина фактора трения  $K$  лежит в пределах  $80 \dots 120 \text{ с}^{-1}$ , а продолжительность активного хода плунжера в зависимости от степени форсирования дизеля составляет  $2 \dots 3 T_n$ .

Используя эти данные и графики рис.4 б, приходим к выводу, что для высокооборотных дизелей расхождения между результатами расчетов составляет  $5 \dots 10 \%$  по давлениям в насосе и  $4 \dots 7 \%$  по величине волны подачи, а для тепловозных дизелей они могут достигать  $12 \dots 15 \%$  и  $6 \dots 10 \%$ , соответственно. Правая шкала рис.4 б соответствует изменению этих величин на номинальном режиме дизеля 6 ЧН 21/21. Указанные уровни расхождений, полученные здесь при использовании целого ряда упрощающих предположений, подтверждаются результатами подробных гидродинамических расчетов.

При расчете процессов, происходящих в форсунке, результаты применения сравниваемых методов различаются не столь заметно. Более того, если кривая изменения давления  $P_\phi(t)$  будет точно повторять (с учетом запаздывания) кривую  $P_n(t-T)$ , то расхождение между этими результатами станет пропорциональным очень малой величине  $(KT) \cdot (Kt)$  и будет незаметным. Известно, что точного повторения форм кривых давления у насоса и у форсунки не происходит, но имеющегося сходства оказывается достаточным для выполнения приближенного равенства  $I_\phi(t) \cong I_n(t-T)$ , которое и приводит к компенсации уменьшенного значения скорости  $F_n$  в прямой волне за счет увеличенного значения скорости  $W_\phi$  в отраженной волне.

Указанное обстоятельство позволило пренебречь влиянием отраженных волн в рассматриваемой выше модельной задаче. Оно же явилось причиной того, что приближенный метод [2], обеспечивающий хорошую сходимость расчетных и опытных данных по давлениям впрыскивания и худшую, но удовлетворительную сходимость этих данных по давлениям в насосе, на протяжении длительного времени использовался при разработке большинства методик гидродинамического расчета топливной аппаратуры.

**Дальнейшее развитие модели и метода расчёта.** В этой связи необходимо отметить следующее. Расчетные формулы метода получены для акустического приближения, в предположении постоянства скорости звука  $a$  и других констант жидкости. Известно, что учёт зависимости этих констант от

давления, проводимый, например, в [3], приводит к уточнению расчётных данных на 5...10 %. Эти зависимости можно использовать и в предлагаемом методе. В качестве обоснования сошлёмся на то, что *те изменения математической модели, которые, действуя независимо, приводят к небольшим уточнениям результатов расчета, могут быть проведены и одновременно.*

Аналогичный прием может быть применен и в отношении зависимости фактора сопротивления  $K$  от скорости топлива. Данный метод позволяет определять величину  $K$  как функцию средней скорости  $U_{cp}(t)$  топлива в трубопроводе для текущего момента времени  $t$ ; в первом приближении величина  $U_{cp}$  может вычисляться по формуле

$$U_{cp}(t) = (1/2) \cdot [U_n(t) + U_\phi(t)].$$

После такой модернизации метод может использоваться для расчета топливной аппаратуры судовых дизелей, конкурируя с методикой [3].

**Метод и результаты расчета ламинарного нестационарного течения жидкости по трубопроводу.** Указанный метод использовался для расчёта гидропривода, рабочей жидкостью которого являлось дизельное топливо. Подробный отчёт об этой работе содержится в [9, 10].

Исследуемая конструкция гидропривода разрабатывалась для дизелей, конвертируемых с жидкого топлива на газообразное, и предназначалась для обеспечения рабочего цикла клапана, впускающего газ в цилиндр дизеля (далее – *газового клапана*). В анализируемом приводе (рис.5) подъём газового клапана осуществляется за счёт нагнетания дизельного топлива гидронасосом в полость, расположенную под плунжером гидротолкателя, а опускание – после отсечки подачи топлива в насосе под действием пружины клапана. В качестве гидронасоса здесь используется серийно выпускаемый плунжерный топливный насос высоко-

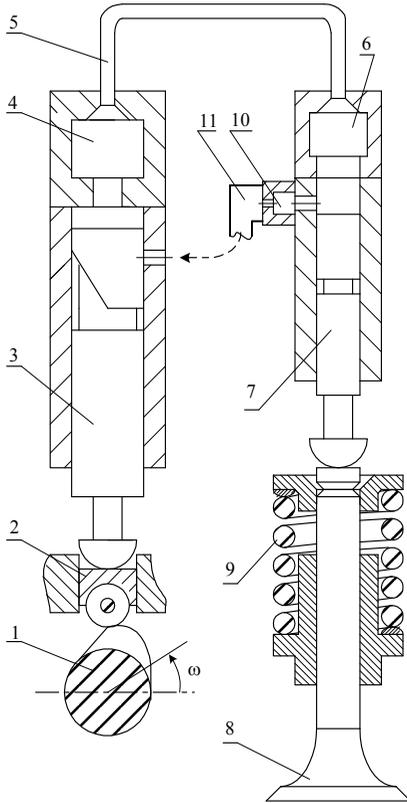


Рис. 5 – Схема гидропривода:

- 1 – кулачковый вал; 2 – толкатель;
- 3, 4 – плунжер и полость гидронасоса;
- 5 – трубопровод; 6, 7 – полость и плунжер гидротолкателя;
- 8 – газовый клапан; 9 – пружина клапана; 10 – стравливающий канал;
- 11 – топливоборник.

го давления, в котором убраны нагнетательные клапана и ликвидированы (заглушены) отсечные окна. Штуцер насоса соединяется со штуцером гидротолкателя трубопроводом, длина которого в ряде конструкций достигает 4...6 метров.

Рабочий цикл гидропривода аналогичен циклу разделённой топливной аппаратуры дизеля; расчётные схемы после установления соответствия между некоторыми элементами этих гидросистем также совпадают. Поэтому методика гидродинамического расчёта гидропривода разрабатывалась как модернизация расчёта впрыскивания топлива в цилиндр дизеля.

Главное отличие модернизированной методики заключается в том, что в ней при учёте гидравлического сопротивления нагнетательного трубопровода была использована осесимметричная двухмерная модель нестационарного течения вязкой сжимаемой жидкости по трубопроводу. Правомерность использования такой модели основывается на значительном снижении рабочих скоростей плунжера по сравнению с номинальными для данного насоса значениями, что перевело режим течения по трубопроводу из турбулентной области в область устойчивых ламинарных течений. Кроме того, уменьшенный диапазон изменения давлений топлива в полостях гидросистемы позволил считать величину скорости звука в топливе постоянной.

Используя (вместо чрезвычайно трудоёмкого для этого случая метода характеристик) операционное исчисление, нам удалось записать решение уравнений течения топлива по трубопроводу в форме линейных интегральных операторов, связывающих напрямую давления и расходы топлива в концевых сечениях трубопровода – у штуцеров насоса и гидротолкателя.

Для получения эффективного алгоритма расчёта в этой системе линейных соотношений удалось выделить слагаемые, аналогичные прямой и отражённой волнам в известном решении волнового уравнения. Но теперь формирование волн в концевых сечениях трубопровода и их затухание при прохождении по трубопроводу определяются более сложными зависимостями, чем те, которые используются в методиках гидродинамического расчёта *И.В. Астахова* или *Т.Ф. Кузнецова*. Форма этих зависимостей – свёрточные интегралы, ядра которых содержат *функцию Лапласа* или её производные.

Использование нового метода привело к существенному уточнению результатов расчёта. На начальном участке рабочего цикла гидропривода, где скорости топлива в трубопроводе возрастают, сила гидравлического сопротивления после учёта нестационарного характера течения увеличилась в 5–10 раз, что привело к снижению объёмной скорости более чем на 15 %.

**Основное допущение нового метода учёта гидравлического сопротивления трубопровода.** Установившееся течение вязкой жидкости по цилиндрическому трубопроводу остается ламинарным при *числах Рейнольдса*  $Re$ , меньших 2320 [11]; после нарушения этого условия в потоке образуется турбулентное ядро, а при еще больших скоростях течения это ядро вступает

в непосредственный контакт с шероховатой внутренней поверхностью трубопровода. Каждому из упомянутых трёх режимов течения соответствует вполне определенная форма осесимметричного распределения линейных скоростей по сечению потока (параболическая, логарифмическая и т.д.), а, значит, своя зависимость касательного напряжения, возникающего на границе потока, от средней по сечению скорости движения жидкости.

Такие же представления о характере течения и основанные на них формулы для определения гидравлического сопротивления (*Пуазейля*, *Блазиуса*, *Идельчика*) используются в методах [2,3], а также в том уточнённом методе расчёта, который был описан в начале этой статьи. Метод, описываемый далее, использует другие представления о характере течения и базируется на полученной *В. Зилке* (фирма «Боинг») формуле для определения гидравлического сопротивления трубопровода при неустановившемся ламинарном режиме течения вязкой жидкости [12].

*Формула В. Зилке* прошла экспериментальную проверку, однако возможность ее использования, например, для гидродинамических расчетов топливной аппаратуры может вызвать закономерные сомнения. Известно, что в нагнетательных трубопроводах дизелей, работающих на легких сортах топлива с вязкостью  $\nu = 1...10 \text{ сСк}$ , максимумы чисел Рейнольдса оказываются значительно (в 2...5 раз) большими критического значения  $Re = 2320$ .

Поэтому первоначально новый метод расчета предназначался только для судовых дизелей, использующих тяжелые сорта топлива с вязкостью  $\nu > 100 \text{ сСк}$ , а также для математического моделирования гидропривода газового клапана [9, 10] и, возможно, ряда других устройств, работающих в области устойчивых ламинарных режимов течения топлива по трубопроводам. Но сопоставление результатов, полученных при использовании нового и традиционного подходов к учету гидравлического сопротивления, свидетельствовало о том, что новый метод может применяться для дизелей, работающих на легком топливе. В качестве теоретического обоснования правомочности такого решения можно принять допущение о том, что в силу скоротечности основной фазы моделируемого процесса турбулизация потока, если она и происходит, не успевает оказать существенное влияние на распределение линейных скоростей топлива, формирующееся под воздействием вязкости и интенсивно изменяющегося расхода (см. также [13]).

**Вывод расчетных уравнений нового метода.** При моделировании нестационарного ламинарного течения вязкой жидкости по трубопроводу постоянного внутреннего диаметра  $d_T$  обычно полагают [14, 15], что в пределах каждого поперечного сечения потока в любой момент времени  $t$  давления  $P$  одинаковы, а линейные скорости различны и образуют осесимметричное поле  $V(r, x, t)$ , удовлетворяющее уравнению движения

$$\partial V / \partial t = -1 / \rho \cdot \partial P / \partial x + \nu / r \cdot (\partial / \partial r) \cdot [r \cdot \partial V / \partial r] \quad (20)$$

и граничному условию  $V(R, x, t) = 0$ ,

где  $\rho, \nu$  – плотность и кинематическая вязкость жидкости, соответствующие текущему значению давления  $P(x, t)$ ;  $x$  – координата сечения,  $x \in [0, L]$ ;  $L, R$  – длина трубопровода и его радиус,  $R = d_T / 2$ ;  $r$  – расстояние до оси трубопровода,  $r \in [0, R]$ .

Для решения этого уравнения в [12] использовано преобразование Лапласа, в результате чего изображения поля скоростей  $\widehat{V}(r, x, s)$  и градиента давления  $\partial \widehat{P}(x, s) / \partial x$  оказались связаны соотношением

$$\widehat{V}(r, x, s) = \widehat{W}_0(r, s) (1 / \rho) \widehat{P}'_x(x, s), \text{ где } \widehat{W}_0(r, s) = [I_0(\sqrt{s/\nu} r) / I_0(\sqrt{s/\nu} R) - 1] / s;$$

$I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Оригинал  $W_0(r, t)$  передаточной функции  $\widehat{W}_0(r, s)$  был получен в [12];

формула для его вычисления содержит ряды из *цилиндрических функций* и для практического использования в инженерной методике расчета не пригодна. Однако условиям моделируемого процесса отвечают малые значения *безразмерного времени*  $\tau = \nu \cdot t / R^2$  из [12], поэтому используемые в изображении  $\widehat{W}_0(r, s)$  функции  $I_0(z)$  можно заменить их асимптотическим разложением при  $|z| \rightarrow \infty$  [7]. После замены функция

$\widehat{W}_0(r, s)$  примет вид:

$$\widehat{W}_0(r, s) = \exp[-(R-r) \cdot \sqrt{(s/\nu)}] / s,$$

и ее оригинал может быть найден по таблицам преобразования Лапласа.

В результате мы получили следующую приближенную формулу:

$$V(r, x, t) = \int_0^t (-1 / \rho) \cdot P'_x(x, \theta) \cdot g(r, t - \theta) d\theta, \quad (21)$$

где  $g(r, t) = \Phi((1-r/R) / \sqrt{2\nu t / R^2})$ ;  $\Phi(x)$  — функция Лапласа.

Графики функции  $g(r, t)$ , построенные при характерном для топливной аппаратуры значении  $\nu / R^2 = 6 \text{ c}^{-1}$ , приведены на рис.6. Анализ этих ре-

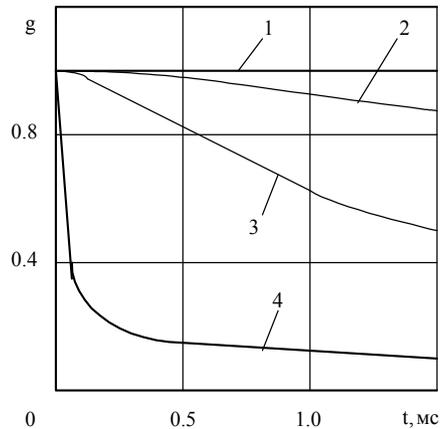


Рис. 6. – Графики весовых функций:  
1 –  $r = 0.7R$ ; 2 –  $r = 0.8R$ ;  
3 –  $r = 0.9R$ ; 4 –  $r = 0.99R$ .

зультатов и формулы (21) показывает, что в моделируемом процессе влияние вязкости сконцентрировано в тонком слое, прилегающем к стенке трубопровода. Толщина  $\Delta R$  пограничного слоя находится из условия

$$4\nu t / \Delta R^2 = 0.5 \dots 0.7$$

и на основной фазе процесса составляет 15...20 % от величины радиуса  $R$ .

В ядре потока, имеющем радиус  $0.8 \dots 0.85 R$ , распределение скоростей практически однородно, а ускорение  $\partial V / \partial t$  находится в одной фазе изменения с градиентом давления  $(-\partial P / \partial x)$ . В непосредственной близости от стенки форма весовой функции  $g(r, t)$  такова, что в фазе с градиентом изменяется не ускорение, а скорость течения. Поэтому при торможении потока пограничный слой и ядро двигаются в противоположных направлениях.

Конкретные формы распределения скоростей на различных фазах топливоподачи, полученные при использовании формулы (21), приведены ниже. Для разрабатываемого метода достаточно знать величину производной  $\partial V / \partial r$  на границе течения, поэтому определение форм носит иллюстративный характер.

Если уравнение (21) проинтегрировать по площади поперечного сечения потока, а затем разделить на величину  $\pi R^2$  этой площади, то получим следующее уравнение для средней по данному сечению скорости  $U(x, t)$ :

$$\partial U(x, t) / \partial t = -(1/\rho) \cdot \partial P(x, t) / \partial x - F_{mp}(x, t), \quad (22)$$

где

$$U(x, t) = (1/\pi R^2) \cdot \int_0^R V(r, x, t) \cdot 2\pi \cdot r \, dr;$$

$F_{mp}$  – приведенное значение касательного напряжения на стенке трубопровода,

$$F_{mp}(x, t) = (2\nu / R) \cdot \partial V(r, x, t) / \partial r \Big|_{r=R}.$$

Уравнение движения (22) вместе с *уравнением неразрывности*

$$1/(a^2 \rho) \partial P(x, t) / \partial t = -\partial U(x, t) / \partial x \quad (23)$$

образуют обычную для методик гидродинамического расчета математическую модель течения топлива по трубопроводу; при этом величина  $F_{mp}$ , входящая в модель, именуется *силой гидравлического сопротивления*. Далее мы будем пользоваться этим общепринятым термином, понимая его условность.

Для интегрирования системы уравнений (22), (23) необходимо определить зависимость этой силы от значений скорости  $U$  или давления  $P$ . Такую зависимость можно найти, если продифференцировать формулу (22) по переменной  $r$ ; искомым результатом будет иметь форму интеграла Дюамеля:

$$F_{mp}(x, t) = -2/R \sqrt{\nu/\pi} \cdot \int_0^t (1/\rho) \cdot \partial P(x, \theta) / \partial x \cdot (1/\sqrt{(t-\theta)}) \, d\theta.$$

Однако дифференцирование увеличивает погрешность приближенных

формул, поэтому для определения силы  $F_{mp}(x, t)$  воспользуемся результатом работы [12]:

$$F_{mp}(x, t) = K_{л} \cdot \int_0^t (\partial / \partial \theta) U(x, \theta) \cdot W_{mp}(t - \theta) d\theta, \quad (24)$$

где  $K_{л} = 16\nu / d_T^2$  – фактор трения при ламинарном установившемся течении, а значения функции  $W_{mp}(t)$  зависят от безразмерного времени  $\tau = \nu t / R^2$ , то есть  $W_{mp}(t) = W(\tau)$ , и могут быть получены при суммировании ряда:

$$W(\tau) = 1/\sqrt{\pi\tau} + 1.5 + 3.75\sqrt{\tau/\pi} + 3.875\tau + \dots \quad (25)$$

При расчетах процессов топливоподачи величина  $\tau$  не превосходит 0.1, а для высокооборотных дизелей она меньше 0.01. Поэтому в сумме (25) могут быть оставлены только лишь два первых слагаемых:

$$W(\tau) \cong 1/\sqrt{\pi\tau} + 1.5.$$

После использования этого приближения формула (24) примет вид:

$$F_{mp}(x, t) = 0.75 \cdot K_{л} \cdot U(x, t) + \sqrt{K_{л} / \pi} \cdot \int_0^t 1/\sqrt{t-\theta} \cdot (\partial / \partial \theta) U(x, \theta) d\theta. \quad (26).$$

**Сопоставление результатов и их анализ.** Сравним результаты, получаемые при использовании формулы (26), с результатами применения известных формул [3] для расчета силы  $F_{mp}$  при стационарном ламинарном режиме течения (*формула Пуазейля*):

$$F_{mp}(x, t) = 2 K_{л} U(x, t);$$

и стационарном турбулентном режиме (*формула Блазиуса*):

$$F_{mp}(x, t) = 2 K_m U(x, t),$$

где

$$K_m = 0.079 \cdot (\nu^{1/4} / d_m^{5/4}) \cdot |U(x, t)|^{3/4}. \quad (27)$$

Для удобства сопоставления формулу (26) также преобразуем к виду

$$F_{mp}(x, t) = 2 K \cdot U(x, t),$$

где фактор сопротивления  $K$  будем определять при нестационарном ламинарном режиме течения по следующему формальному правилу:

$$K = 3/8 \cdot K_{л} + \sqrt{K_{л} / \pi} \int_0^t 1/\sqrt{t-\theta} \cdot (\partial / \partial \theta) U(x, \theta) d\theta / U(x, t). \quad (28)$$

Выполним расчет изменения факторов  $K$  и  $K_m$  для входного сечения трубопровода (у насоса) при номинальном режиме работы дизеля КамАЗ-740. На рис.7 а показан график изменения скорости  $U_n(t)$  топлива в этом сечении, полученный при гидродинамическом расчете по методике [3]. Там же представлены графики зависимостей  $K_m(t)$ ,  $K(t)$ , рассчитанные по формулам (27), (28) при значениях

$$U(x, t) = U_n(t), \nu = 6cCk, d_T = 2\text{мм}.$$

Пунктирной линией показан постоянный уровень фактора  $K_L$ .

На рис.7 б, в приведены распределения скоростей топлива по сечению трубопровода для двух моментов времени, соответствующих основной и заключительной фазам процесса топливоподачи. Эти результаты получены при использовании формулы (21); входящие в нее значения градиента давлений определялись при помощи приближенного равенства

$$(-1/\rho) \cdot \partial P / \partial x \approx dU_n(t) / dt,$$

вытекающего из уравнения движения (22) при пренебрежении влиянием силы  $F_{mp}$ . Там же пунктиром показаны *параболы Пуазейля*, соответствующие ламинарному установившемуся течению, а штрих пунктиром – распределения скоростей, используемые при выводе *формулы Блазиуса*.

Анализ результатов, приведенных на рис.7, позволил сформулировать следующие выводы.

Гидравлическое сопротивление при нестационарном ламинарном режи-

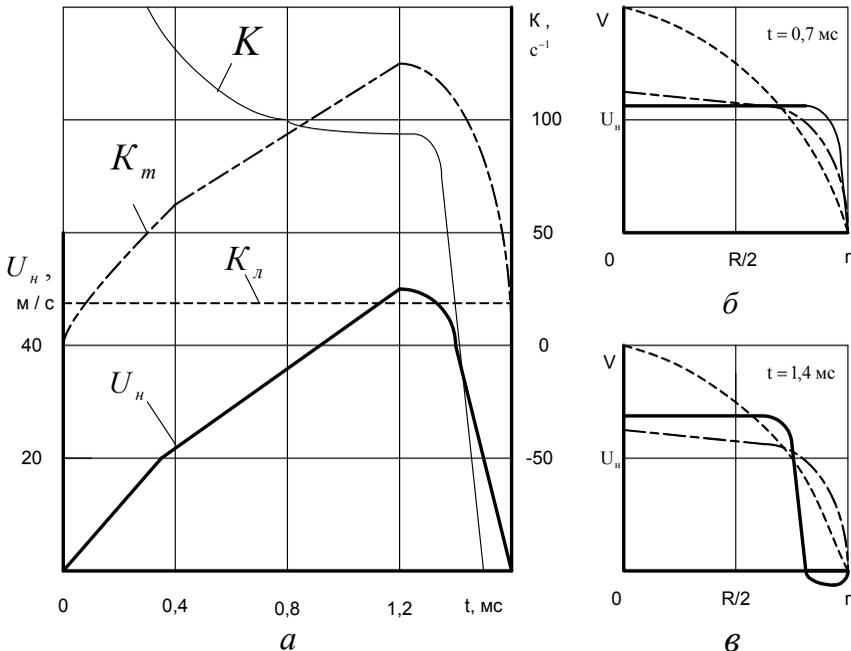


Рис. 7. – Сопоставление результатов использования различных моделей течения: а – факторы гидравлического сопротивления; б, в – профили скорости течения.

ме течения может на порядок превосходить величину этого же сопротивления при стационарном ламинарном течении с той же скоростью  $U(t)$ .

Сопротивление трубопровода может действовать не только против на-

правления, но и по направлению потока (при его резком торможении). Возможность такого действия объясняется тем, что существенная часть силы  $F_{mp}$  связана с перераспределением скоростей в пограничном слое и не приводит к необратимому переходу механической энергии в тепло. Влияние гидравлического сопротивления направлено на уменьшение крутизны фронтов импульса скорости, но его фаза и амплитуда не определяются мгновенными значениями скорости и ускорения топлива в данном сечении. Величина сопротивления возрастает (по модулю) на участках резкого изменения скорости и уменьшается при стабилизации величины этой скорости.

На начальной и основной фазе топливоподачи гидравлическое сопротивление, рассчитываемое по формулам нестационарного ламинарного режима, совпадает по фазе и близко по величине с сопротивлением, определяемым по формулам стационарного турбулентного течения.

Эти выводы согласуются с общей теорией нестационарных ламинарных течений, приведенной в [12, 14, 15]. Заметим, что использование такого подхода к моделированию основной фазы процесса топливоподачи в теоретическом плане пока столь же необоснованно, как и применение модели стационарного турбулентного течения, а в практическом плане в силу проведенного сопоставления результатов оказывается эквивалентным, поскольку приводит к близким расчетным значениям основных параметров топливоподачи.

**Аналитический метод учёта гидравлического сопротивления трубопровода.** В. Зилке рекомендовал применять свою формулу (24) при численном интегрировании уравнений (22), (23) вдоль характеристик. Для использования в методиках гидродинамического расчета топливной аппаратуры такой путь, даже при использовании упрощенной формулы (26), неприемлем, поскольку он в 10...20 раз увеличивает объем оперативной памяти, используемый программой, и значительно повышает трудоемкость расчета. Однако важнейшим достоинством нового подхода к расчету сопротивления является то, что он сохранил линейность уравнений математической модели. Поэтому появилась возможность получить общее аналитическое решение системы уравнений (22), (23), (26) колебаний столба топлива в трубопроводе, обобщающее известное решение волнового уравнения в форме суперпозиции прямых и обратных волн скорости на случай движения вязкой жидкости.

Получим это решение, для чего рассмотрим систему уравнений (22), (23), (26) и следующую краевую задачу для этой системы:

$$U(x, 0) = 0; P(x, 0) = p_{ост}; P(0, t) = p_n(t); P(L, t) = p_\phi(t),$$

где  $p_{ост}$  – остаточное давление;  $p_n$ ,  $p_\phi$  – текущие давления топлива в полостях штуцера насоса и кармана распылителя форсунки.

Решение задачи проводим при использовании операционного исчисления тем же методом, который применялся для решения аналогичной задачи в

начале статьи. Поэтому остановимся только на имеющихся в ходе решения отличиях и форме окончательного результата.

При описании процесса формирования волн – прямой волны  $F_n(t)$  у насоса и обратной волны  $W_\phi(t)$  у форсунки – так же возникает необходимость находить оригинал  $g(t)$  функции  $G(s) = s/b(s)$ , где значения  $b(s)$  для данного случая описываются формулой

$$b(s) = \sqrt{(s^2 + 0.75 \cdot K_n \cdot s + \sqrt{K_n} \cdot s^{3/2})}.$$

Такой функции в таблицах преобразования Лапласа нет, но можно воспользоваться приближенной заменой

$$G(s) \cong G_1(s) = 1 - 0.5\sqrt{K_n/s},$$

погрешность, которой имеет асимптотическую оценку  $0.25(K_n/s)^{3/2}$  и не приводит к заметному расхождению между значениями оригиналов  $g(t)$  и  $g_1(t)$  этих функций. Оригинал  $g_1(t)$  находим по таблицам преобразования Лапласа, после чего искомые формулы для определения волн принимают вид:

$$F_n(t) = (1/2) \cdot [U_n(t) + (a \cdot \rho)^{-1} \cdot (p_n(t) - p_{ocm} - K_0 \cdot I_n(t))]; \quad (29)$$

$$W_\phi(t) = (1/2) \cdot [U_\phi(t) - (a \cdot \rho)^{-1} \cdot (p_\phi(t) - p_{ocm} - K_0 \cdot I_\phi(t))], \quad (30)$$

где

$$I_n(t) = \int_0^t [p_n(\theta) - p_{ocm}] (t - \theta)^{-1/2} d\theta; \quad I_\phi(t) = \int_0^t [p_\phi(\theta) - p_{ocm}] (t - \theta)^{-1/2} d\theta; \quad (31)$$

$$K_0 = (1/2)\sqrt{K_n/\pi} = \sqrt{v/\pi R^2}.$$

При описании процесса распространения волн от одного конца трубопровода до другого приходится находить оригинал  $g_T(t)$  изображения

$$G_T(s) = \exp(-b(s) \cdot T),$$

где  $T$  – продолжительность распространения волны,  $T = L/a$ .

Для решения этой задачи аппроксимируем функцию  $b(s)$  зависимостью более простого вида:

$$b(s) \cong s + K_n/4 + \sqrt{s K_n/4},$$

а затем в полученном по таблицам оригинале  $g_T(t)$  используем допустимую в нашем случае замену для функции Лапласа:  $\Phi(x) \cong x \cdot \sqrt{2/\pi}$ .

В результате указанных упрощений искомые формулы приняли следующий вид:

$$F_\phi(t) = \exp(-0.25 K_n T) \cdot [F_n(t - T) - K_0 T j_n(t - T)]; \quad (32)$$

$$W_n(t) = \exp(-0.25 K_n T) \cdot [W_\phi(t-T) - K_0 T j_\phi(t-T)], \quad (33)$$

где

$$j_n(t) = \int_0^t F'_n(\theta) \cdot (t-\theta)^{-1/2} d\theta; \quad j_\phi(t) = \int_0^t W'_\phi(\theta) \cdot (t-\theta)^{-1/2} d\theta; \quad (34)$$

$F_\phi, W_n$  – значения волн скорости  $F$  и  $W$  на противоположных концах трубопровода (у форсунки и у насоса, соответственно).

Полученные формулы имеют ту же структуру, что и расчетные формулы, приведенные выше. Однако имеются и существенные различия.

Ядра интегралов Дюамеля (31), (34), к сожалению, не позволяют вычислять значения функций  $I_n(t), I_\phi(t), j_n(t), j_\phi(t)$  в ходе решения обыкновенных дифференциальных уравнений, как это было сделано ранее.

Основное затухание волн в формулах (32), (33) обеспечивает не экспоненциальный множитель (этим фактором здесь можно пренебречь), а функции  $j_n(t), j_\phi(t)$ . Поэтому исключить их из расчета, как это предлагалось делать выше для большинства типов дизелей, в данном методе нельзя.

Указанные отличия увеличивают трудоемкость нового метода моделирования движения топлива по трубопроводу, однако она остается существенно меньшей трудоемкости интегрирования остальных уравнений методики гидродинамического расчета, составленных для полостей насоса и форсунки.

**Результаты решения модельной задачи.** Проиллюстрируем особенности нового подхода к учету гидравлического сопротивления трубопровода на примере расчета процесса сжатия топлива в полости насоса. Эта же задача в качестве модельной рассматривалась выше. Указанный процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\alpha V_n p'_n = f_n C_n - f_T U_n; \quad U_n = (\alpha \rho)^{-1} [p_n - K_0 I_n]; \quad I_n = \int_0^t P_n(\theta) (t-\theta)^{-1/2} d\theta. \quad (35)$$

После перехода к безразмерным величинам система уравнений (35) была проинтегрирована аналитическим методом, использующим операционное исчисление. Приведем формулу для изменения давления  $p_n$ :

$$p_n(\tau) = p_0 \cdot [1 - \exp(-\tau) + 2\bar{K}_0 \int_0^\tau (\tau - \theta) \cdot \sqrt{\theta} \cdot \exp(\theta - \tau) d\theta], \quad (36)$$

где  $\bar{K}_0$  – безразмерное значение фактора гидравлического сопротивления,

$$\bar{K}_0 = K_0 \cdot \sqrt{T_n}.$$

Анализ решения (36) показывает, что и при данном подходе гидравлическое сопротивление трубопровода начинает оказывать влияние на изменение давления  $p_n(t)$  сразу после начала сжатия, а не через промежуток времени  $2T$ , как это было в методе *Т.Ф. Кузнецова* [2].

Анализ решений системы (35) для функции  $U_n(t)$  показал, что на начальном участке процесса сопротивление приводит к снижению скоростей топлива во входном сечении трубопровода, а значит и в волне подачи  $F_n(t)$ , на 10...15% и более. Причем фактор  $K$ , вычисляемый по формуле (28), на этой фазе процесса не ниже среднего значения  $K_{cp}$ , как получается в методе [3] при использовании *формулы Блазиуса*, а существенно выше (рис.7 а). На основании анализа полученного решения изменение фактора трения  $K(t)$  для волны подачи приближенно может быть описано формулой

$$K(t) = 6\nu/R^2 + 2\sqrt{\nu/(\pi R^2 t)}, \quad (37)$$

а среднее значение  $K_{cp}$  этого фактора для начальной и основной фаз процесса топливоподачи оценивается следующим выражением:

$$K_{cp} = 2\sqrt{\nu/(\pi R^2 T_{ен})}, \quad (38)$$

где  $T_{ен}$  – продолжительность впрыскивания топлива.

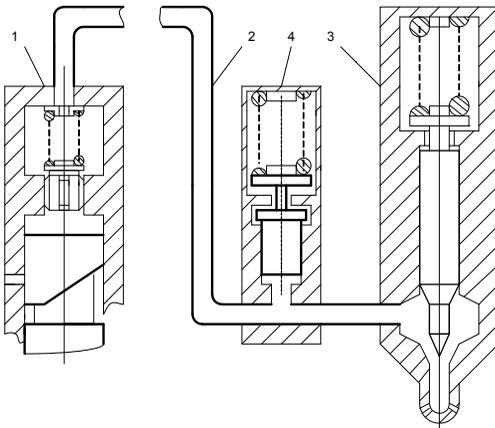


Рис. 8 – Схема топливной системы:  
1 – насос; 2 – трубопровод;  
3 – форсунка; 4 – модулятор.

Формула (38) получена при условии  $T_{ен} \geq T_n$  и может применяться вместо *формулы Блазиуса* при выполнении расчета по методу, описанному в начале статьи, для больших и средних подач топлива на всех скоростных режимах работы дизеля. В этом случае использование нового подхода свелось к уточнению формулы для гидравлического сопротивления. При расчете малых подач топлива (например, для режима холостого хода) целесообразно использовать формулу (37) и соотношения (32) – (34) ламинарного течения.

**Интегральный метод учёта сопротивления трубопровода.** Методы, использующие интегралы Дюамеля, могут применяться не только при расчёте нагнетательных трубопроводов, но и топливной системы в целом. Необходимым условием обобщения является использование линейной (или линеаризованной) математической модели.

Этому условию в полной мере отвечает процесс предварительного разгона столба топлива в топливной системе с модулятором импульсов давления

(рис.8). Если принять обычные для этого случая допущения [16, 17], а именно пренебречь следующими факторами:

- изменением скорости плунжера на участке его активного хода,
- дросселирующим влиянием всасывающих окон и нагнетательного клапана,
- а также изменением давления  $p_m$  в полости модулятора,

то расчёт этого процесса будет описываться системой уравнений (рис.9):

$$\{ \alpha V_n p'_n = f_n C_n - f_T U(0,t); p'_m = 0, \quad (39)$$

которая замыкается уравнениями течения топлива в форме (22), (23), где сила гидравлического сопротивления  $F_{mp}$  вычисляется по формулам (24) или (26).

Заметим, что из этой системы соотношений можно исключить давление топлива. Если не учитывать сопротивление трубопровода, то, выполнив это исключение, придём к стандартной краевой задаче для волнового уравнения:

$$(1/a^2) \cdot \partial^2 U(x,t) / \partial t^2 - \partial^2 U(x,t) / \partial x^2 = 0; \quad (40)$$

$$f_T U(0,t) - f_n C_n = V_n \partial U(x,t) / \partial x \Big|_{x=0};$$

$$\partial U(x,t) / \partial x \Big|_{x=L} = 0. \quad (41)$$

Полное решение этой задачи было проведено в диссертации [16], где излагается теория топливных систем с модуляторами импульсов давления. Для скорости в выходном сечении трубопровода была получена формула

$$U(L,t) = (f_n / f_T) \cdot \int_0^t W_0(t-\tau) dC_n(\tau), \quad (42)$$

где *весовая функция* (или ядро интеграла Дюамеля)  $W_0(t)$  имеет примерно такой вид, который показан на рис.10.

Если скорость плунжера  $C_n(t)$  постоянна, то

$$U(L,t) = (f_n / f_T) W_0(t) C_n.$$

В этом случае функция  $W_0(t)$  описывает изменение скорости  $U(L,t)$ .

После учёта гидравлического сопротивления волновое уравнение (40) будет заменено телеграфным уравнением (2) или, для случая нестационарного ламинарного течения, более сложным интегро-дифференциальным уравнением. Но граничные условия для нового уравнения будут иметь прежний вид (41).

Применим к этой системе преобразование Лапласа по

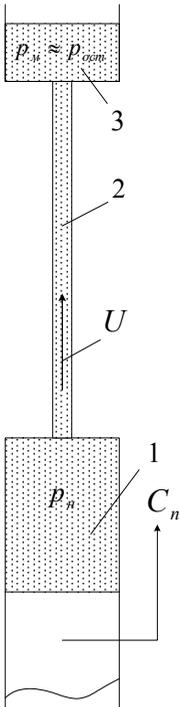


Рис. 9 – Расчетная схема.

времени  $t$  и получим:

$$(b^2(s)/a^2) \cdot U(x, s) - \partial^2 U(x, s) / \partial x^2 = 0;$$

$$f_T U(0, s) - f_n C_n / s = V_n \partial U(x, s) / \partial x \Big|_{x=0}; \quad \partial U(x, s) / \partial x \Big|_{x=L} = 0,$$

где, в зависимости от выбранной модели течения,

$$b(s) = \sqrt{(s(s+2K))} \approx s + K$$

или

$$b(s) = \sqrt{(s^2 + 0.75 K_n s + \sqrt{K_n} s^{3/2})} \approx s + 0.5 \sqrt{K_n} s.$$

Перепишем первое граничное условие в таком виде

$$f_T U(0, s) - f_n \hat{C}_n(s) / b(s) = V_n \partial U(x, s) / \partial x \Big|_{x=0},$$

где

$$\hat{C}_n(s) = [b(s)/s] \cdot C_n.$$

Следовательно, влияние сопротивления свелось к двум моментам:

- переменную Лапласа  $s$  заменила функция  $b(s)$ ;
- постоянную скорость плунжера  $C_n$  заменила переменная скорость

$$\hat{C}_n(t) \approx C_n \cdot (1 + Kt) \quad \text{или} \quad \hat{C}_n(t) \approx C_n \cdot (1 + \sqrt{K_n} t / \pi).$$

Поэтому далее можно использовать *теорему Эфроса* [7] об оригинале сложной функции и сразу получить ядро  $W(t)$  для интегрального представления зависимости скорости течения топлива  $U(L, t)$  от скорости плунжера:

$$U(L, t) = \int_0^t W(t - \tau) dC_n(\tau).$$

Если применить этот подход к модели турбулентного течения, то:

$$W(t) = \exp(-Kt) \cdot [W_0(t) +$$

$$+ K \int_0^t W_0(\tau) d\tau],$$

где ядро  $W_0(t)$  – это та же функция, что и в (42).

Сравнение графиков функций  $W_0(t)$  и  $W(t)$  (рис. 10), показывает, что к концу фазы предварительного разгона столба топлива в трубопроводе его скорости оказываются практически одинаковыми. Причиной являются

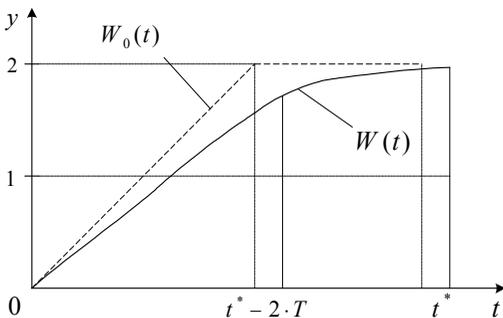


Рис. 10 – Влияние сопротивления на скорости в сечении трубопровода у модулятора.

компенсационные процессы, которые наблюдаются в любой топливной системе разделённого типа, но в системах с модуляторами развиты особенно сильно. Сопротивление приводит к незначительному увеличению максимального давления  $p_{н.мах}$  в насосе и удлинению процесса отвода топлива под поршень модулятора, но среднее давление  $F_{н.ср}$  в импульсе подачи при впрыскивании остаётся прежним.

Таблица – Влияние сопротивления в системе с модулятором импульсов давления (модель ламинарного нестационарного течения)

$\beta$	$K_{л}\sqrt{\frac{2T}{\pi}}$	$\frac{t^*}{2T}$	$\frac{F_{н.ср}}{P_0}$	$\frac{P_{н.мах}}{P_0}$
2.0	0	1.8	0.983	0.866
	0.037	1.9	0.976	0.902
	0.052	2.0	0.970	0.922
1.0	0	2.4	0.997	0.665
	0.037	2.5	0.976	0.689
	0.052	2.6	0.963	0.701
0.5	0	3.3	0.999	0.477
	0.037	3.4	0.965	0.500
	0.052	3.5	0.942	0.511

Следовательно, при выборе параметров топливных систем с модуляторами гидравлическое сопротивление трубопровода можно не учитывать.

К этому же выводу можно прийти, если использовать модель ламинарного нестационарного течения. Результаты расчётов, подтверждающие это, приведены в таблице. Влияние гидравлического сопротивления возрастает

по мере увеличения относительной продолжительности отвода топлива под поршень модулятора, связанной с уменьшением параметра  $\beta$ , где

$$\beta = 2 f_T L / V_n; p_0 = a \rho \cdot (f_n / f_T) C_{н.ср},$$

$C_{н.ср}$  – средняя скорость плунжера насоса на участке нагнетания топлива.

**Выводы.** Предложен и обоснован новый подход к учёту гидравлического сопротивления трубопроводов, использующий уточнённые (одномерные и двухмерные) модели импульсного течения вязкой жидкости и универсальные численно-аналитические методы интегрирования их уравнений.

Разработан новый метод расчёта нестационарного турбулентного течения топлива по нагнетательному трубопроводу, основанный на точных решениях телеграфного уравнения, представленных в форме интегралов Дюамеля.

Разработан и применён для проектирования гидропривода газового клапана новый метод расчёта нестационарного ламинарного течения топлива по нагнетательному трубопроводу.

**Список литературы:** 1. Атанов Г.А. Основы одномерной нестационарной газодинамики. – К.: Вища школа, 1979. 2. Кузнецов Т.Ф. Теоретические основы и методика расчёта впрыска вязкого топлива в поршневых двигателях внутреннего сгорания // Труды ХИИЖТ. – Харьков: ХИИЖТ,

1960. – Вып. 35. – С.13 – 19. **3. Фомин Ю.Я.** Гидродинамический расчет топливных систем дизелей с использованием ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1973. **4. Астахов И.В.** Подача и распыливание топлива в дизелях / И. В. Астахов, В. И. Трусов, А.С. Хачян и др. – М.: Машиностроение, 1972. **5. Григорьев А. Л.** Уточнённый метод учёта гидравлического сопротивления трубопровода при гидродинамических расчётах топливной аппаратуры дизелей // Вестник ХГПУ. – Харьков, 1999. – Вып. 58. – С. 58 – 68. **6. Григорьев А.Л.** Метод и результаты расчета неустановившегося ламинарного течения топлива по нагнетательному трубопроводу топливной аппаратуры дизеля // Вестник ХГПУ. – Харьков, 1999. – Вып. 60. – С. 86 – 96. **7. Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1977. **8. Григорьев А. Л.** Универсальный метод динамического расчёта гидромеханического узла // Вестник ХГПУ. – Харьков, 2000. – Вып. 104. – С. 75 – 84. **9. Григорьев А. Л.** Математическое моделирование гидропривода газового клапана газодизеля // Вестник ХГПУ. – Харьков, 1999. – Вып. 62. – С. 3 – 11. **10. Григорьев А. Л. Зонов В. Д., Товкач С.В.** Оптимизация параметров гидропривода газового клапана газодизеля // Вестник ХГПУ. – Харьков, 1999. – Вып. 75. – С. 59 – 64. **11. Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1970. **12. Зилке В.** Трение, зависящее от частоты, при неустановившемся течении в трубопроводе // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1968. – №1. – С. 120 – 127. **13. Грехов Л.В.** Топливная аппаратура и системы управления дизелем / Л.В. Грехов, Н.А. Иващенко, В.А. Марков. – М.: Легион - Автodata, 2004. – 344 с. **14. Слѣзкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1955. **15. Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. **16. Григорьев А. Л.** Разработка методов интенсификации процесса топливоподачи в топливной аппаратуре высокооборотных дизелей. – Дис. канд. тех. наук: 05.04.02. – тепловые двигатели. – Харьков, 1988. – 352 с (ДСП). **17. Григорьев А. Л., Грунауэр А. А., Тартаковский И. И.** Выбор критерия и обоснование метода оптимизации в задаче профилирования кулачков топливного насоса дизеля // Теория механизмов и машин. Сб. науч. тр. – К., 1993. – С. 72 – 87.

*Поступила в редколлегию 14.10.2013*

---

УДК 539.1: 621.436

**Использование интегралов Дюамеля для расчёта импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу / А.Л. Григорьев** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 63 – 86. Бібліогр.: 17 назв.

Описано розрахунково-аналітичні методи врахування гідравлічного опору трубопроводу при імпульсному режимі течії в'язкої рідини. Використано аналітичні розв'язки рівняння вісесиметричної турбулентної або ламінарної течії, що мають форму інтегралів Дюамеля з ядрами Коші. Виконано апроксимацію ядер, яка дозволила спростити розрахункові формули методу без істотного зниження точності розрахунку. Надано приклади використання методів для паливних систем дизельних та газодизельних двигунів.

**Ключові слова:** вісесиметрична течія, профіль швидкостей, гідродинамічний розрахунок, телеграфне рівняння, операційне числення, інтеграл Дюамеля, ядро Коші.

We describe the calculation and analytical methods for ensuring the hydraulic resistance of the pipeline in pulsed mode flow of a viscous fluid. Used analytical solutions of the equation of axis-symmetrical turbulent or laminar flow in the shape of Duhamel integrals with Cauchy kernels. Done approximation kernels, which allow simplifying formulas method without significantly reducing the accuracy of the calculation. Provided examples of methods for fuel systems and diesel engines hazodyzelnih.

**Key words:** axisymmetrical flow, velocity profile, hydrodynamic calculation, telegraph equation, operational calculus, Duhamel integral, Cauchy kernel.