

С.Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. пр., НТУ «ХПИ»

КВАЗИРАВНОМЕРНЫЙ ПРЕДЕЛ ЛЕВИТАНОВСКИХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Найдены условия, в некоторых случаях необходимые и достаточные, при которых предел последовательности определенного вида L -почти периодических функций является того же вида L -почти периодической функцией. Таким условием является квазиравномерная сходимость в различных ее определениях.

Ключевые слова: почти периодические функции, L -почти периодические функции, почти автоморфные функции, квазиравномерная сходимость.

Введение. Одно из часто используемых свойств *почти периодических, Левитановских почти периодических и почти автоморфных функций* – это свойство предельного перехода, в котором чаще всего используется *равномерная сходимость*. На самом деле, она является достаточным (сравнительно легко проверяемым) условием того, чтобы предел был того же вида, что и функции из рассматриваемой последовательности. Целью работы является нахождение более слабых условий, при которых предел последовательности Левитановских почти периодических функций оставался бы Левитановской почти периодической функцией. Рассмотрены и частные случаи Левитановских почти периодических функций – непрерывные почти автоморфные и равномерно непрерывные почти автоморфные функции.

Вспомогательные утверждения и определения. Работа является продолжением статей автора [3] и [4]. Тут использованы основные обозначения и определения из работы [2]. G – это σ -компактная топологическая группа, e – единица группы. Y – сепарабельное пространство Фреше, $f(t)$ – абстрактная функция, отображающая G в Y , $f_h(t) = f(th)$ – сдвигка, когда h – это элемент группы; когда h – это последовательность элементов, $h = \{h_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty \in G$, то $f_h(t)$ – поточечный предел (если существует) последовательности $f(th_\alpha)$.

Пусть $\rho(.,.)$ – метрика в Y , N – конечное множество в G , $\varepsilon > 0$. С каждой функции $f(x)$ связано множество

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho[f(a\tau b); f(ab)] < \varepsilon \right\}.$$

Определение 1.[3] Последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t):G \rightarrow Y$ назовем квазиравномерно сходящейся к функции $f(t)$, $f(t):G \rightarrow Y$, если:

а) она сходится поточечно к функции $f(t)$, $\lim_n f_n(t) = f(t)$, $\forall t \in G$;

б) $\forall \varepsilon > 0$, индекса K и любой последовательности $\{t'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \subset G$ найдутся индекс $n_0 > K$ и подпоследовательность элементов $\{t_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \subset \{t'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ такие, что

$$\rho(f(t_\beta), f_{n_0}(t_\beta)) < \varepsilon, \beta = 1, 2, 3, \dots$$

Сформулируем некоторые результаты и определения работ [3] и [1], на которые будем опираться в дальнейшем.

Предложение 1. [3] Квазиравномерный предел непрерывных функций является непрерывной функцией.

Предложение 2. [3] Квазиравномерный предел компактных функций является компактной функцией.

Предложение 3. [3] Квазиравномерный по всем подпоследовательностям предел равномерно непрерывных функций является равномерно непрерывной функцией.

Определение 2 ([1]). Поточечная сходимость последовательности отображений $\{f_n\}$ к отображению f , заданных на топологическом пространстве X со значениями в метрическом пространстве Y , называется **квазиравномерной сходимостью по Александру**, если для всякого натурального числа K существует не более чем счетное открытое покрытие $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \dots\}$ пространства X и такая последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ натуральных чисел, больших K , что $\rho(f(x), f_{n_k}(x)) < \varepsilon$ для всякого $x \in \Gamma_k$.

Предложение 4.[1] Квазиравномерная сходимость по Александру (определение 2) является необходимым и достаточным условием непрерывности предела, если поточечно сходящаяся последовательность состоит из непрерывных функций.

В 1938 году Б. М. Левитан [6], [7] ввел новый класс числовых комплекснозначных почти периодических функций, определенных на числовой оси. В. А. Марченко [8] заметил, что L – почти периодические (L – п.п.) числовые функции представляют собой все непрерывные функции на некотором хаусдорфовом пространстве, полученном введением на числовой оси особой топологии. Б. Я. Левин [5] привел новое определение L – п.п. число-

вых функций, заданных на произвольной σ – компактной группе и доказал основные положения теории L – п.п. функций. А. Райх [9] ввел новое определение числовой комплекснозначной L – п.п. функции, определенной на топологической группе. Следуя Райха, введем определение абстрактной L – п.п. функции.

Определение 3. [2] *Непрерывная функция $f(t): G \rightarrow Y$ называется L – почти периодической, если $\forall \varepsilon > 0$ и конечного множества $N \subset G$, существует относительно плотное множество $E \subset G$ такое, что $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$.*

В работе [2] были получены следующие результаты.

Предложение 5. [2] *Любая L – почти периодическая функция $f(x)$ непрерывна на группе G в топологии \mathfrak{T}_f , определенной множествами $B_{N,f,\varepsilon}$.*

Дана характеристика непрерывных функций в топологии \mathfrak{T}_f .

Предложение 6. [2] *Пусть задана L – почти периодическая функция $f(t): G \rightarrow Y$ и по ней введена топология \mathfrak{T}_f множествами $B_{N,f,\varepsilon}$ на группе G . Любая непрерывная функция $g(x): G \rightarrow Y$, которая непрерывна в топологии \mathfrak{T}_f , является L – почти периодической функцией.*

Если L – п.п. функция не одна, а их целое множество, то используется следующая характеристика.

Предложение 7. [2] *Если на группе G задано семейство L – почти периодических функций $f_\lambda(t)$, $\lambda \in A$ со значениями в пространстве Фреше Y , то существует топология \mathfrak{T}_f на группе G , в которой непрерывны все функции этого семейства и любая функция $g(x)$, которая непрерывна в этой топологии, является L – почти периодической на группе G .*

Если на группе задана топология \mathfrak{T} , то будем рассматривать непрерывные функции в этой топологии. Тогда введенная топология \mathfrak{T}_f слабее заданной топологии \mathfrak{T} . Почти автоморфные (п.а.) функции [10], [4] можно рассматривать как компактные и непрерывные в топологии \mathfrak{T} L – п.п. функции, что видно из следующего результата.

Предложение 8.[4] *В пространствах Фреше класс компактных L – почти периодических функций совпадает с классом непрерывных почти автоморфных функций.*

Если L – почти периодические функции компактны и равномерно непрерывны в топологии \mathfrak{T} , то они называются *равномерными почти автоморфными функциями*.

Основные результаты.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{f_n\}$ L -почти периодических функций сходится поточечно к функции $f(t)$,

$$(f(t) = \lim_n f_n(t), \forall t \in G).$$

Для L -почти периодичности предельной функции $f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы сходимость была квазиравномерной по Александрову.

Доказательство. Применим предложение 4 и получим, что предельная функция является непрерывной. По последовательности $\{f_n\}$ на группе G при помощи множеств

$$B_{N,f,\varepsilon,n} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho[f_n(a\tau b); f_n(ab)] < \varepsilon \right\}$$

введем топологию \mathfrak{T}_f как в работе [2]. В этой топологии непрерывны все функции последовательности $\{f_n\}$ (предложение 7). Применим к ним предложение 4. Получим, что предел является непрерывной функцией в этой топологии тогда и только тогда, если сходимость квазиравномерная по Александрову. Тогда, согласно предложению 7, предельная функция является L -почти периодической функцией.

Следствие 1. Квазиравномерный предел по Александрову последовательности L -почти периодических функций $\{f_n\}$, сходящейся к функции $f(t)$ с относительно компактным множеством значений, является почти автоморфной функцией.

Доказательство. По теореме 1, предельная функция $f(t)$ является L -почти периодической функцией. Используя компактность и предложение 8, получим, что предельная функция является почти автоморфной функцией.

Теорема 2. Квазиравномерный предел последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти автоморфных функций является почти автоморфной функцией $f(t)$.

Доказательство. По последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на группе G введем топологию \mathfrak{T}_f как в теореме 1. Все функции непрерывны в этой топологии. По предложению 1, предел является непрерывной функцией и согласно предложению 7, является L -почти периодической функцией. Используя предложение 2, получим, что предел является компактной функцией. Тогда по предложению 8 предел является почти автоморфной функцией.

Следствие 2. Квазиравномерный предел по всем подпоследовательностям последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерных почти автоморфных функций является равномерной почти автоморфной функцией $f(t)$.

Доказательство. По теореме 2, предел является непрерывной почти автоморфной функцией. Из предложения 3 следует, что предел является равномерно непрерывной функцией в первоначальной топологии \mathfrak{T} группы G .

Теорема 3. Пусть задано множество G , и последовательность функций $f_n(t): G \rightarrow Y$, $n=1, 2, 3, \dots$, $t \in G$ сходится поточечно к функции $f_0(t): G \rightarrow Y$. Пусть также множества значений $K_n = \{y \in Y : y = f_n(t), t \in G\}$ каждой функции $f_n(t)$, $n=1, 2, 3, \dots$ и предельной функции $f_0(t)$ $K_0 = \{y \in Y : y = f_0(t), t \in G\}$ являются относительно компактными. Вместе с каждой функцией $f_n(t)$, рассмотрим функцию $f_{h,n}(t)$ ($f_{h,n}(t) = \lim_k f_n(th_k)$) и потребуем выполнения условия

$$\lim_n f_{h,n}(e) = f_{h,0}(e), \quad \forall h = \{h_k\}.$$

Тогда последовательность $f_n(t)$, $n=1, 2, 3, \dots$, $t \in G$ сходится квазиравномерно по всем подпоследовательностям.

Доказательство. Пусть задана произвольная последовательность $\{t_m\}_{m=1}^\infty \in G$. Рассмотрим последовательность $\{f_n(t_m)\}_{m=1}^\infty \in Y$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$. Используя относительную компактность множества значений и диагональный процесс выбора, можно найти подпоследовательность $\{h_m\}_{m=1}^\infty \subset \{t_m\}_{m=1}^\infty$ такую, чтобы существовали все пределы

$$\lim_m f_n(h_m) = F_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

или

$$f_{h,n}(e) = F_n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

По условию теоремы

$$\lim_n \rho(F_n; F_0) = 0.$$

Тогда, по числу $\varepsilon > 0$ найдем число K такое, что при $n_0 > K$

$$\rho(F_{n_0}; F_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По числу $\varepsilon/4$ выберем L так, чтобы при $m > L$ выполнялись условия

$$\rho(f_{n_0}(h_m); F_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ и } \rho(f_0(h_m); F_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда

$$\rho(f_{n_0}(h_m); F_{n_0}) + \rho(F_{n_0}; F_0) + \rho(f_0(h_m); F_0) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ най-

ден номер n_0 и последовательность $h_{L+1}, h_{L+2}, h_{L+3}, \dots$ такие, что выполнены условия определения 1, и последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ сходится квазиравномерно. Легко видеть, что это верно и для любой подпоследовательности функций.

Теорема 4. Пусть дана последовательность почти автоморфных функций $f_n(t): G \rightarrow Y$, $n=0,1,2,3,\dots$. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ сходилась квазиравномерно по подпоследовательностям к функции $f_0(t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_n f_{h,n}(e) = f_{h,0}(e), \quad \forall h = \{h_k\} \in G.$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ сходится квазиравномерно по всем подпоследовательностям. Если для некоторой последовательности $h' = \{h'_k\} \in G$, для которой существуют все пределы

$$f_{h',n}(e) = \lim_k f_n(h'_k), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

не выполняется равенство

$$\lim_n f_{h',n}(e) = f_{h',0}(e), \quad h' = \{h'_k\} \in G,$$

то тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность номеров n_1, n_2, n_3, \dots , такие что

$$\rho(f_{h',n_k}(e); f_{h',0}(e)) > \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

С другой стороны, последовательность функций $\{f_{n_k}(t)\}_{k=1}^\infty$ сходится квазиравномерно, и согласно определению 1 для числа $\varepsilon_0/4$ существуют номер p , $p \in \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ и подпоследовательность $\{h_m\}_{m=1}^\infty \subset \{h'_m\}_{m=1}^\infty$ такие, что

$$\rho(f_p(h_m); f_0(h_m)) < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \forall m,$$

где $p = n_k$ для некоторого k . Это противоречит неравенству

$$\rho(f_{h',p}(e); f_{h',0}(e)) > \varepsilon_0,$$

так как существует число M , что при

$$m > M \quad \rho(f_p(h'_m); f_{h',p}(e)) < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \rho(f_0(h'_m); f_{h',0}(e)) < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{2} &\leq \rho(f_{h',p}(e); f_{h',0}(e)) - \rho(f_p(h'_m); f_{h',p}(e)) - \\ &- \rho(f_0(h'_m); f_{h',0}(e)) \leq \rho(f_p(h'_m); f_0(h'_m)), \end{aligned}$$

а для достаточно больших m $h_m \in \{h'_m\}_{m=M+1}^\infty$ и правая часть меньше $\varepsilon_0/4$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия теоремы.

Для доказательства достаточности заметим, что все функции имеют относительно компактные множества значений. Далее применим теорему 3.

Выводы. Найден условия, в некоторых случаях необходимые и достаточные, при которых предел различных видов L -почти периодических функций является L -почти периодической функцией. Таким условием является квазиравномерная сходимость в различных ее разновидностях. Это требование слабее равномерной сходимости.

Список литературы: 1. Александров П. С. Введение в общую топологию множеств и функций – М.: ОГИЗ, – 1948. 2. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Представление L -почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 68'2010, Харків, – С. 65 – 75. 3. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Необходимые и достаточные условия сходимости почти периодических функций. Сборник статей по результатам международной конференции Тараповские чтения 2012: «Современные проблемы математики, механики и информатики». – ХНУ имени В. Н. Каразина. Механико-математический факультет: Изд-во «Апостроф», – 2012, – С. 332 – 338. 4. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на группе. // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 27'2012, Харків, – С. 82 – 85. 5. Левин Б.Я. О почти периодических функциях Левитана // УМЖ. – Т.1, № 1. – 1949, – С. 49 – 101. 6. Левитан Б. М. Новое обобщение почти периодических функций Н. Вольфа // Зап. Харьк. ин-та матем. и матем. о-ва, XV, №2, 1938. 7. Левитан Б. М. Некоторые вопросы теории почти периодических функций // УМЖ. – II, В.6, – 1947, – С.174 – 214. 8. Марченко В. А. Обобщенные почти-периодические функции. // ДАН СССР, – 1950, – Т.XXIV, – №4, – С. 893. 9. Reich A. Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität // Math. Z., – 116, – P. 216 – 234. 10. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math., 87. – №3. – 1965. – P. 719 – 751.

Поступила в редколлегию 26.10.2013

УДК 513.88

Квазиравномерный предел левитановских почти периодических функций / С. Д. Димитрова-Бурлаенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 111 – 117. Бібліогр.: 10 назв.

Знайдено умови, в деяких випадках необхідні і достатні, при яких границя послідовності певного виду L -майже періодичних функцій є того ж виду L -майже періодичною функцією. Такою умовою є квазірівномірна збіжність в різних її визначеннях.

Ключові слова: майже періодичні функції, L -майже періодичні функції, майже автоморфні функції, квазірівномірна збіжність.

The conditions, that are necessary and sufficient in some cases, are found at which the limit of a sequence of a certain type of L -almost periodic functions is the same kind of L -almost periodic function. That condition is a quasi-uniform convergence defined in different ways.

Key words: almost periodic functions, L -almost periodic functions, almost automorphic functions, quasi-uniform convergence.