

умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 10 (19). – Рівне: РДГУ, 2013. – С. 5 – 19. 7. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, – 1983. – 616 с.

Надійшла до редколегії 18.10.2013

УДК 519.876.5:530.182:553.98

**Комплексний аналіз поведінки системи «свердловини-тріщин-пласт» в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №54 (1027). – С. 4 – 15. Бібліогр.: 7 назв.**

С использованием теории Баклея-Лeverетта модифицирован комплексный подход моделирования нелинейных процессов двухфазной фильтрации в элементах площадного заводнения на случай интенсификации притока пластовой жидкости в скважину с помощью трещин гидравлического разрыва. Проведен анализ числовых расчетов перераспределения соответствующих фильтрационных характеристик: поля насыщенности, фильтрационных расходов, квазипотенциала скорости и т.д., установлены особенности протекания процесса вытеснения при управлении им путем изменения параметров трещин гидравлического разрыва пласта.

**Ключевые слова:** квазиконформное отображение, модель Баклея-Лeverетта, трещины гидроразрыва, площадное заводнение.

With the use the theory of Buckley-Leverett modified integrated approach of modeling of nonlinear processes two-phase filtration in the elements of pattern flooding in case of authentication of influx of stratal liquid in a mining hole at indignation of lauter flow the cracks of hydraulic break. The analysis of the numerical calculations of the corresponding redistribution of filtration characteristics: saturation field, lauter expenses, of quasi-potential the velocity et cetera, the specific features of the process in the management of their displacement by changing the parameters of cracks of hydraulic break.

**Key words:** quasi-conformal mapping, Buckley-Leverett model, cracks of hydraulic break, pattern flooding.

УДК 517.85

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., ИПМаш НАНУ, Харьков

## **МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СО СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

Предлагаются алгоритмы построения разностных схем, слабо аппроксимирующие с повышенным порядком нелинейные законы сохранения. Их основой является интегральное представление разностных схем и соответствующие им интегральные приближения различных порядков.

**Ключевые слова:** разностная схема, порядок схемы, слабая аппроксимация, интегральные представления, законы сохранения.

© В. А. Ванин, 2013

**Введение и постановка задачи.** В статье рассматриваются следующие вопросы:

- методы построения разностных схем со слабой аппроксимацией;
- исследование устойчивости разностных схем;
- многомерные нестационарные задачи;
- результаты численных исследований.

Универсальность вычислительного алгоритма, как правило, связана с общей информативностью получаемого решения. С его помощью нет возможности исследовать локальные особенности решения каждой задачи. Выход из такой ситуации предоставляется возможностью придания универсальному вычислительному алгоритму адаптивных свойств на разностной сетке (геометрия задачи) и/или аппроксимативному шаблону (физика задачи).

Развитие разностных схем повышенного порядка аппроксимации происходило, в основном, с использованием понятия *классической аппроксимации*. Для определения ее порядка используется разложение в *ряды Тейлора*, что обуславливает наличие повышенной гладкости у решения задачи, отсутствующей в ее исходной постановке. Более того, в нелинейных нестационарных уравнениях в частных производных гиперболического типа из гладкого начального распределения решения часто образуются области высокоградиентного или разрывного поведения решения (*обобщенное решение*). Количество разрывов в решении не фиксировано, все они могут перемещаться, взаимодействуя между собой и геометрическими границами области определения. Для их расчета разрабатываются схемы *сквозного счета* [1 – 4] и проводится анализ *слабой* и *классической аппроксимации*. Однако сами исходные уравнения уже записывались в нескольких эквивалентных формах (*интегральная, с искусственной вязкостью, Гамильтона – Якоби*), имеющих обобщенные решения. В [5] показана эквивалентность этих форм записи на некотором классе функций.

На определенном этапе развития теории численных методов предполагалось, что в области гладкости решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям, а на разрыве выполняются интегральные соотношения, вытекающие из определения *слабого решения*. Позже выяснилось, что определению слабого решения необходимо пользоваться и в той части расчетной области, где побывала подвижная ударная волна, то есть практически всюду. Однако при построении разностных схем повышенного порядка аппроксимации продолжают использоваться подходы, основанные на учете дифференциальных следствий исходной системы дифференциальных уравнений. Теоретический и численный анализ некоторых характерных отличий в конструкциях разностных схем классической и слабой аппроксимации проведен в [6 – 8].

В [9] показано, что для симметричных компактных разностных схем из [10 – 14] порядки ее классической аппроксимации на гладких решениях и слабой аппроксимации на разрывных совпадают. Однако в силу своей сим-

метричности по времени и пространству они неустойчивы на разрывных решениях. Для их стабилизации вводится *искусственная вязкость*, которая может снизить порядок слабой аппроксимации. Однако формальное определение обобщенного решения как гладкой функции, удовлетворяющей уравнению с вязкостью (иногда говорят, удовлетворяет *уравнению Гамильтона – Якоби*) не совсем корректно. Известны примеры, в которых существует бесконечно много функций удовлетворяющих уравнению Гамильтона – Якоби почти всюду [15]. Возникшая проблема потребовала определения обобщенного (слабого) решения уравнений Гамильтона – Якоби единственным образом. Изучение «слабых» решений проводилось, в основном, с использованием интегральных представлений задач с обобщенными решениями.

Поиск конструктивного определения слабого решения, которое порождало бы эффективный метод его численного исследования, продолжается и в настоящее время. Одним из них является *метод компактных аппроксимаций*. Однако основным недостатком компактных аппроксимаций является то, что они обеспечивают высокий порядок точности для разностной схемы только лишь на достаточно гладких решениях задачи. Малый размер фиксированного шаблона разностной аппроксимации производных в дифференциальном уравнении задачи – это одно из достоинств таких аппроксимаций. Шаблоны больших размеров весьма эффективны при создании разностных схем с обратной связью, например, через ее *адаптивный шаблон* [16], или с помощью адаптации (укрупнение, измельчение, сгущение, разрежение) разностной сетки [17].

Приведенные примеры расчетов и анализ распределения погрешности в [6] показывают наличие вполне пригодных гибридных разностных схем сквозного счета для **численного исследования решения одного нелинейного уравнения**. Оказалось, что характер распространения погрешности для **системы уравнений** зависит от точности вычисления инвариантов в зоне разрыва [6].

**Методы построения разностных схем со слабой аппроксимацией.** В теоретическом плане развитие понятия слабой аппроксимации разностной схемой исходной системы *интегральных законов сохранения* базируется на определении слабого (обобщенного) решения для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + q(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в виде

$$\iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right) dx dt = \iint_D u g_t + F(u) g_x dx dt = 0 \text{ или } \oint_{\partial D} u dx - F(u) dt = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} u dx + F(u_2) - F(u_1) = 0 , \quad u_i = u(t, x_i), i = 1, 2; \quad F(u) = \int q(u) du .$$

Дифференцируя последнее интегральное соотношение по  $x_2$  и полагая после  $x_2 = x$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + q(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Использование понятия слабого решения удобно для описания разрывных решений, так как позволяет автоматически получать и учитывать в вычислительном алгоритме условия на разрывах.

Пусть  $D = D_1 \cup L \cup D_2$  с линией разрыва  $L$ , тогда

$$\iint_{D_1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right) dxdt + \iint_{D_2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right) dxdt + \oint_L \{ [u]dx - [F(u)]dt \} = 0,$$

где  $[f] = f_2 - f_1$  – разность значений по обе стороны разрыва.

Однозначные практические рекомендации по алгоритмам построения таких схем в настоящее время отсутствуют. Для повышения классической аппроксимации используют дифференциальные следствия исходной системы дифференциальных уравнений. Аналогично, при построении разностных схем с повышенным порядком слабой аппроксимации следует разрабатывать алгоритмы с использованием интегральных следствий исходной системы, записанной в интегральной форме. Более обоснованным выглядит подход, аналогичный построению разностных схем повышенного порядка классической аппроксимации, с использованием следствий из ее дифференциального представления. Схемы повышенного порядка слабой аппроксимации для обобщенных решений строятся с использованием интегральных следствий исходной задачи. Такой подход дал положительные результаты при теоретическом рассмотрении известных разностных схем и сравнении порядков их классической и слабой аппроксимации [8, 18 – 19].

В настоящее время получили распространение *нецентрированные компактные аппроксимации* в двух реализациях. Одна из них на основе формул компактного дифференцирования развита в работах [10 – 14]. Другая реализация, известная как идеология ENO (TVD) схем, приводится в [20 – 23].

Еще один способ построения эффективных разностных схем повышенного порядка аппроксимации рассматривается в [24].

Так, для линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in R^1$$

строится аппроксимирующая разностная схема первого порядка аппроксимации

$$u^{n+1}(x) = S_h u^n(x)$$

с дифференциальным представлением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \tau R_1 u + \tau^2 R_2 u + \tau^3 R_3 u + \dots$$

Если  $f^n(x)$  аппроксимирует  $R_1 u(n\tau, x)$  с порядком  $O(\tau)$ , то разностная схема

$$u^{n+1}(x) = S_h u^n(x) - \tau^2 f^n(x)$$

аппроксимирует исходное уравнение с повышенным порядком  $O(\tau^2)$ . Учтивая, что исходное уравнение линейное, то

$$\frac{\partial r^j}{\partial t} = Lr^j, \quad r^j = \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j},$$

и в задаче для нахождения  $f^n(x)$  можно использовать исходную разностную схему

$$\{ f^{n+1}(x) = S_h f^n(x), \quad f^0(x) = \delta u^0(x),$$

где  $\delta$  – некоторая разностная аппроксимация порядка  $O(\tau)$  оператора  $R_1$ .

Аналогичный подход используется и для нелинейных уравнений. В этом случае разностные уравнения для производных неизвестной функции получаются путем построения дифференциальных следствий (продолжений) исходных уравнений и соответствующих для них аппроксимирующих разностных схем.

Использование дифференциальных следствий для построения разностных схем, имеющих повышенный порядок аппроксимации, не ограничивается только линейными уравнениями. В [24] показано использование дифференциальных приближений в конструкциях разностных схем, имеющих повышенный порядок классической аппроксимации для нелинейных эволюционных уравнений.

Отметим, что при указанных подходах к построению и исследованию порядка аппроксимации разностных схем широко используется разложение в ряды Тейлора.

Построенные разностные схемы с необходимым порядком аппроксимации и устойчивые в линейном приближении при их использовании для исследования реальных нелинейных задач оказывались неустойчивыми в счете на **разрывных (локально высокоградиентных) решениях** или порождали сильные осцилляции численного решения.

Используемый ENO-подход, как попытка распорядиться возможностью выбора шаблона вблизи разрывов в решении, не позволяет провести локально равномерное повышение точности разностного решения. Такие шаблоны можно интерпретировать как односторонние или предпочтительные, с точки зрения «гладкости» дискретной функции. Отношение предпочтения задается некоторыми *минимаксными функциями*. В теоретических исследованиях [9, 25] получено, что все схемы, использующие в разностном операторе задачи минимаксные функции в реконструкционных процедурах, имеют в окрестности разрывов не более чем первый порядок слабой аппроксимации. Это связано с требованием повышенной *дивергентности* в рассматриваемом разностном операторе и гладкостью его *производящей функции*. Для решений за-

дач с такими разностными операторами показано несовпадение порядков классической и слабой аппроксимации.

Консервативные конечно-разностные ENO и WENO схемы высоких порядков (выше третьего) могут быть построены лишь для равномерной или почти равномерной сетки. Требование *почти равномерности сетки* связано с наличием гладкого преобразования, порождающего эту сетку. Отметим, что пока имеются лишь некоторые фундаментальные результаты относительно сходимости этих схем. При практическом использовании эти схемы оказались надежными в вычислительных алгоритмах, применяемых для задач аэрогидродинамики.

Отношение предпочтения может задаваться не только на основе анализа «гладкости» с помощью модуля непрерывности, но и с использованием вариации функции на последовательности шаблонов, растущих в размере.

Первоначально *процедура реконструкции* (восполнения) функции применялась непосредственно к физическим переменным, вычисляя их значения на гранях ячеек. В дальнейшем эти значения используются в *задаче распада произвольного разрыва* в качестве начального постоянного распределения параметров в ячейках [26]. Поскольку при вычислении значений на границе ячейки использовалось нелинейное распределение параметров, то и при решении задачи распада необходимо рассматривать движение разрывов по неравномерному распределению. Такой подход порождает почти невыполнимые требования к точности решения *задачи Римана*. Возможны методы, в которых реконструкция производится для функций потоков или «больших величин».

Применение процесса реконструкции непосредственно к потоковым функциям позволяет избежать необходимости решать задачу Римана. О монотонности и энтропийном условии при таком подходе необходимо позаботиться отдельно при алгоритмической реализации [26]. Повышение порядка классической аппроксимации достигается в [27, 28] использованием отрезков *рядов Фурье* и специальных *алгоритмов монотонизации*. Одно из решений проблемы повышения точности аппроксимации разностной схемы и монотонизации разностного решения предложено в [29] на основе разложения функций в *ряды Лагранжа – Бюрмана*.

Разностные схемы для уравнений газовой динамики, в которых используется процедура реконструкции распределения «больших» величин, полученных в результате распада разрыва, рассматриваются в [30 – 32].

Поиск схем с внутренними механизмами монотонизации после выхода работы [33] приобрел математическую основу. Однако конкретная реализация предложенных идей оказалась неоднозначной. В указанной работе приведен один из возможных вариантов построения монотонизированных разностных схем.

Введение в анализ проблем монотонизации разностных схем решений функциональных уравнений [34 – 37] позволяет взглянуть на них с точки зрения свойств  $L$  – функций. Включив их в структуру *интерполяционного поли-*

нома Ньютона и варьируя структурными элементами L-функций, можно получить все известные ограничители, широко используемые при конструировании разностных схем для уравнений газовой динамики, и добиться необходимых качеств используемых разностных схем.

Рассмотрим построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации (классической и слабой) для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Классическое решение этой задачи удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию. Слабое решение для этой задачи находится из соотношения

$$\iint_D (ug_t + f(u)g_x) dxdt = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

Разностная схема  $k$ -того порядка классической аппроксимации для (1) имеет вид:

$$\Lambda_h(u_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + L_h[f(u_h)] = 0, \quad (3)$$

$$L_h[f(u)] = \sum_{i=1}^k \frac{(-\tau)^{i-1}}{i!} \cdot \frac{L_{ik}}{h^i} \varphi_i(u), \quad \frac{L_{ik}}{h^i} = \sum_{l \in SH_i} \alpha_{ikl} T_{hl} \approx \frac{\partial^i}{\partial x^i} + O(h^{k-i-1}).$$

Здесь,  $SH_i$  – точечный шаблон  $(i-L, \dots, i, \dots, i+R)$  размера  $L+R+1$ ,

$$\varphi_i(u) = \int (f_u)^i du.$$

Из дифференциального представления разностной схемы (3), аналогично [9],

$$\Lambda_h(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \sum_{i=1}^k \frac{\tau^{i-1}}{i!} \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} - (-1)^i \frac{\partial^i f(u)}{\partial x^i} \right] + O(h^k)$$

и дифференциальных следствий для (1)

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = (-1)^i \frac{\partial^i \varphi_i(u)}{\partial x^i} \quad (4)$$

получим, что на решениях (1)

$$\Lambda_h(u) = O(h^k). \quad (5)$$

**Определение 1.** Слабая аппроксимация разностного оператора  $\Lambda_h$   $k$ -того порядка на решениях (2), определяется условием

$$\iint_D \Lambda_h[u]g dxdt = \iint_D (ug_t + f(u)g_x) dxdt + O(h^k). \quad (6)$$

Оценка порядка слабой аппроксимации производится на предельном решении  $u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$ , удовлетворяющем интегральному закону сохранения

$$\iint_D (ug_t + f(u)g_x) dxdt = 0,$$

с использованием интегральных следствий этого закона сохранения.

**Определение 2.** Слабая аппроксимация разностного оператора  $\Lambda_h$   $k$ -того порядка на решениях (3) определяется из соотношения

$$0 = \iint_D \Lambda_h[u_h]g dxdt = \iint_D (u_h g_t + f(u_h)g_x) dxdt + O(h^k). \quad (7)$$

В этом случае оценка порядка слабой аппроксимации производится на разностном решении  $u_h$ , при этом используются следствия интегрального представления (7) для разностной схемы.

Тогда на решениях (2) разностный оператор (3) имеет слабую аппроксимацию, определяемую следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_D \Lambda_h[u]g dxdt &= \iint_D \left[ \frac{\delta_t^+ u}{\tau} g + \left( \sum_{i=1}^k \frac{(-\tau)^{i-1}}{i!} \cdot \frac{L_{ik}}{h^i} f(u) \right) g \right] dxdt = \\ &= \iint_D \left( u \frac{\partial g}{\partial t} + f(u) \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdt + \frac{\tau}{2} J_2 + \tau^2 J_3 + O(h^k), \end{aligned}$$

где  $J_2 = \iint_D \left( u \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \varphi(u) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dxdt$ .

Выражение  $J_2 = 0$  на гладких решениях (2), что соответствует интегральному аналогу дифференциального следствия для (1).

Для уравнения (2) его интегральные следствия на разрывных решениях имеют вид

$$\iint_D \left( u \frac{\partial^i g}{\partial t^i} + f(u) \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdt = 0 \quad (8)$$

$$\text{и } J_2 \neq 0, \quad J_3 = \sum_{i=3}^k \iint_D \frac{(-\tau)^{i-3}}{i!} \left[ (-1)^i \varphi_i \frac{\partial^i g}{\partial x^i} - u \frac{\partial^i g}{\partial t^i} \right] dxdt \neq 0$$

по двум причинам:

- в конструкции разностного оператора (3) использованы дифференциальные следствия для гладких решений (1) и функции  $\varphi_i(u)$ ;
- для оценки слабого решения используются вместо интегральных аналогов дифференциальных следствий для (1) интегральные следствия (8) для уравнения (2).

Рассмотрим следующую разностную схему для (1):

$$\begin{aligned} \Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \varphi(u_h) = 0, \quad (9) \\ \varphi(u) &= \int f_u^2 du, \end{aligned}$$

которая, как легко проверить, на гладких решениях (1) имеет второй порядок классической аппроксимации



$$\Lambda_h(u) = O(h^2),$$

и первый порядок слабой аппроксимации на негладких решениях (1) удовлетворяющих (2), то есть

$$\iint_D \Lambda_h[u] g dx dt = O(h).$$

Изменим схему (9) на такую:

$$\begin{aligned} S\Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(u_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(u_h) - u_h) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} S\Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} [f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} (f(u_h) - u_h)] - \\ &- \frac{\tau}{2} \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(u_h) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Явный вариант этой разностной схемы получим, заменив разностные производные по времени в правой части на их значения с нижнего временного слоя:

$$\begin{aligned} S\Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} [f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} (f(u_h) - u_h)] - \\ &- \frac{\tau}{2} \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(u_h) = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить (с учетом дифференциальных следствий), что схема (10) имеет второй порядок классической аппроксимации на решениях (1)

$$\begin{aligned} S\Lambda(u) &= \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (f(u) - u) - \\ &- \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u) + O(h^2) = O(h^2) \end{aligned}$$

и (в силу интегральных следствий, полученных заменой в (2)  $g \rightarrow \partial g / \partial t$ ,  $g \rightarrow \partial g / \partial x$  и последующим вычитанием их друг из друга) такой же порядок слабой аппроксимации на решениях (2)

$$\begin{aligned} \iint_D S\Lambda_h(u) g(x, t) dx dt &= - \iint_D u \frac{\delta_t^- g}{\tau} + f(u) \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} g + \frac{\tau}{2} f(u) \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} g - \\ &- (f(u) - u) \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} g dx dt = \iint_D u \left( \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g + O(\tau^2) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f(u) \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\tau}{2} f(u) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} (f(u) - u) \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} dxdt + O(h^2) = \\
& = \iint_D \left( u \frac{\partial g}{\partial t} + f(u) \frac{\partial}{\partial x} g \right) + \frac{\tau}{2} \left( u \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - f(u) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \right. \\
& \quad \left. + (f(u) - u) \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \right) dxdt + O(h^2) = O(h^2).
\end{aligned}$$

Однако чтобы учесть эффекты численного размывания разностного решения необходимо проверять слабую аппроксимацию разностной схемы на решениях (10) по соотношению (7).

**Теорема.** Разностная схема (10) на своих решениях имеет 2-й порядок слабой аппроксимации

$$0 = \iint_D S\Lambda_h[u_h]g dxdt = \iint_D (u_h g_t + f(u_h)g_x) dxdt + O(h^k).$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
0 & = \iint_D S\Lambda_h(u_h)g(x,t) dxdt = \iint_D \left( \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(u_h) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(u_h) - u_h) \right) g(x,t) dxdt = \\
& = \iint_D \left( u_h \frac{\delta_t^- g}{\tau} + f(u_h) \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} g - f(u_h) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} g + \right. \\
& \quad \left. + (f(u_h) - u_h) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} g \right) dxdt = \\
& = \iint_D \left( u_h [\partial_t g - \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 g - \frac{\tau^3}{4!} \partial_t^4 g + \dots] + f(u_h) [\partial_x g + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 g + \frac{h^4}{5!} \partial_x^5 g + \dots] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau}{2} f(u) {}_h[\partial_x^2 g + 2 \frac{h^2}{4!} \partial_x^4 g + 2 \frac{h^4}{6!} \partial_x^6 g + \dots] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau}{2} [f(u_h) - u_h] [\partial_t \partial_x g + \frac{h^2}{3!} \partial_t \partial_x^3 g + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 \partial_x g + \dots] \right) dxdt = \\
& = \left( \iint_D (u_h \partial_t g + f(u_h) \partial_x g) dxdt - \frac{\tau}{2} \iint_D (u_h \partial_t^2 g + f(u_h) \partial_t \partial_x g) dxdt + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau}{2} \iint_D (u_h \partial_t \partial_x g + f(u_h) \partial_x^2 g) dxdt + \frac{h^2}{3!} \iint_D \left( \frac{\tau^2}{h^2} u_h \partial_t^3 g + f(u_h) \partial_x^3 g \right) dxdt + \right. \\
& \quad \left. + \frac{h^3}{12} \iint_D \left( -\frac{\tau^3}{2h^3} u_h \partial_t^4 g + \frac{\tau}{2h} f(u_h) \partial_x^4 g - \frac{\tau}{h} [f(u_h) - u_h] \partial_t \partial_x^3 g - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{\tau^3}{h^3}[f(u_h) - u_h]\partial_t^3\partial_x g dxdt) + \dots \quad (12)$$

Полученное выражение назовем *интегральным представлением разностной схемы* (10) на ее решениях, оно является аналогом дифференциального представления разностной схемы на гладких решениях (1).

Интегральное представление разностной схемы для разрывных решений, следуя аналогии дифференциального представления для гладких решений, занимает промежуточное по информативности положение между исходной интегральной (дифференциальной) математической моделью процесса и аппроксимирующей слабо (классически) ее разностной схемой. Можно утверждать, что по своим свойствам интегральное представление разностной схемы на негладких решениях разностного уравнения позволит исследовать более полно разрывные решения.

Аналогично вводятся интегральные приближения различных порядков для разностной схемы. Так, *первое интегральное приближение*  $ППП\_S\Lambda_h$  для разностной схемы (10) получим из (12), оставляя в нем слагаемые до первого порядка малости включительно:

$$\begin{aligned} ППП\_S\Lambda_h[u_h] = & -\left(\iint_D (u_h\partial_t g + f(u_h)\partial_x g) dxdt - \right. \\ & \left. -\frac{\tau}{2}\iint_D (u_h\partial_t^2 g + f(u_h)\partial_t\partial_x g) dxdt + \right. \\ & \left. +\frac{\tau}{2}\iint_D (u_h\partial_t\partial_x g + f(u_h)\partial_x^2 g) dxdt\right). \end{aligned}$$

Сохраняя в (12) величины до второго порядка малости, получим *второе интегральное приближение* для разностной схемы, и так далее:

$$ВИП\_S\Lambda_h[u_h] = ППП\_S\Lambda_h[u_h] - \frac{h^2}{3!}\iint_D \left(\frac{\tau^2}{h^2}u_h\partial_t^3 g + f(u_h)\partial_x^3 g\right) dxdt.$$

Введём обозначения

$$I_{11}(g) = \iint_D (u_h\partial_t g + f(u_h)\partial_x g) dxdt$$

и перепишем полученное соотношение (12) в виде

$$0 = -I_{11}(g) + \frac{\tau}{2}[I_{22}(g) - I_{21}(g)] - \frac{h^2}{3!}I_3(g) + O(h^3).$$

Откуда

$$I_{11}(g) = \frac{\tau}{2}[I_{22}(g) - I_{21}(g)] - \frac{h^2}{3!}I_3(g) + h^3 I_4(g) + O(h^4). \quad (13)$$

Учитывая, что

$$I_{22}(g) = I_{11}(\partial_t g) = \frac{\tau}{2}[I_{22}(\partial_t g) + I_{21}(\partial_t g)] + \frac{h^2}{3!}I_{33}(\partial_t g) + O(h^3),$$

$$I_{21}(g) = I_{11}(\partial_x g) = \frac{\tau}{2}[I_{22}(\partial_x g) + I_{21}(\partial_x g)] + \frac{h^2}{3!}I_3(\partial_x g) + O(h^3)$$

получим выражение для  $I_{11}(g)$

$$I_{11}(g) = \frac{\tau^2}{4}[I_{22}(\partial_t g) - I_{22}(\partial_x g) + I_{21}(\partial_t g) - I_{21}(\partial_x g)] + \frac{h^2}{3!}I_3(g) + O(h^3),$$

которое перепишем в виде

$$I_{11}(g) = O(h^2, \tau^2). \quad (14)$$

Можно воспользоваться *леммой об эквивалентности интегральных соотношений* [7]

$$I_{11}(f, \varphi, g) = \iint_D (f(u)\partial_t g + \varphi(u)\partial_x g) dxdt, \text{ и } I_{11}(f, \varphi, \partial_t g) = \iint_D (f(u)\partial_t \partial_x g + \\ + \varphi(u)\partial_x^2 g) dxdt,$$

тогда выбрав  $f(u) = u$  и  $\varphi(u) = f(u)$ , получим

$$I_{22}(g) = I_{11}(\partial_t g) = I_{11}(g), \quad I_{21}(g) = I_{11}(\partial_x g) = I_{11}(g).$$

Из соотношения

$$I_{11}(g) = \frac{\tau^2}{4}[I_{22}(\partial_t g) - I_{22}(\partial_x g) + I_{21}(\partial_t g) - I_{21}(\partial_x g)] + \frac{h^2}{3!}I_3(g) + O(h^3)$$

непосредственно следует оценка (14).

Дальнейшее последовательное исключение выражения  $I_3(g)$  по изложенному алгоритму из-за его структуры не представляется возможным.

Таким образом, разностный оператор схемы (10) слабо аппроксимирует со вторым порядком интегральный оператор (3) на собственных решениях. При этом сходимость  $u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$  следует понимать в смысле *слабой сходимости*:

$$\iint_D (u_h \partial_t g + f(u_h) \partial_x g) dxdt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \iint_D (u \partial_t g + f(u) \partial_x g) dxdt.$$

Чтобы повысить порядок слабой аппроксимации необходимо в разностной схеме (13) ввести слагаемые, преобразующие выражение для  $I_{33}(g)$  в ее интегральном представлении к виду, необходимому для исключения.

Учитывая, что

$$I_3(g) = \iint_D \left( \frac{\tau^2}{h^2} u_h \partial_t^3 g + f(u_h) \partial_x^3 g \right) dxdt$$

видно, что его можно преобразовать к виду

$$\bar{I}_{33}(g) = \frac{\tau^2}{h^2} \iint_D (u_h \partial_t^3 g + f(u_h) \partial_t^2 \partial_x g) dxdt.$$

Тогда модифицированный разностный оператор запишется в виде соотношения

$$M1S\Lambda_h(u_h) = S\Lambda_h[u_h] - \left[ \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} - \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ \delta_t^-}{\tau^2} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \right] f(u_h). \quad (15)$$

При этом

$$0 = \iint_D M1S\Lambda_h[u_h] g dx dt = \iint_D (u_h g_t + f(u_h) g_x) dx dt + O(h^3).$$

Это вариант замены одного слагаемого (в данном случае слагаемого с  $f(u_h)$ ) на другое с  $f(u_h)$ . Аналогично можно поступить и по отношению к слагаемому с  $u_h$  в выражении

$$\iint_D \left( \frac{\tau^2}{3!} u_h \partial_t^3 g + \frac{h^2}{3!} f(u_h) \partial_x^3 g \right) dx dt,$$

модифицировав разностный оператор так, чтобы это слагаемое в его интегральном представлении заменилось на следующее:

$$\frac{h^2}{3!} \iint_D (u_h \partial_x^2 \partial_t g + f(u_h) \partial_x^3 g) dx dt = \frac{h^2}{3!} I_{11}(\partial_x^2 g).$$

Тогда соответствующая модификация разностного оператора получим вид

$$M1\_1S\Lambda_h(u_h) = S\Lambda_h[u_h] - \left[ \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_t^+ \delta_t^-}{\tau^2} - \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \right] u_h. \quad (16)$$

Модификация с использованием центрированных (симметричных) разностей выглядит следующим образом

$$M2S\Lambda_h(u_h) = S\Lambda_h[u_h] + \left[ \frac{h^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} u_h + \frac{\tau^2}{3!} \cdot \frac{\delta_t^+ \delta_t^-}{\tau^2} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) \right]. \quad (17)$$

Для него справедлива оценка

$$\iint_D M2S\Lambda_h[u_h] g dx dt = \iint_D (u_h g_t + f(u_h) g_x) dx dt + O(h^3).$$

Здесь реализовано одновременное дополнение слагаемых, содержащих  $u_h$  и  $f(u_h)$ , до выражений необходимого вида.

Действуя аналогичным образом, можно получить разностную схему необходимого порядка слабой аппроксимации. Так пусть для разностной схемы

$$\Lambda_h[u_h] = 0$$

имеется ее интегральное представление

$$0 = \iint_D \Lambda_h[u_h] g dx dt = I_{11}(g, u_h) - \sum_{l=2}^k h^{l-1} I_l(g, u_h) + O(h^k),$$

где  $I_l(g, u_h) = \sum_{m=1}^l A_{lm} I_{lm}(g, u_h) + O(h^k)$ .

Учитывая, что с одной стороны, по определению мы имеем

$$I_{lm}(g, u_h) = I_{11}(\partial_t^{l-m} \partial_x^{m-1} g),$$

а с другой, из интегрального представления, получим

$$\begin{aligned} I_{lm}(g, u_h) &= I_{11}(\partial_t^{l-m} \partial_x^m g, u_h) = \sum_{l=2}^k h^{l-1} I_l(\partial_t^{l-m} \partial_x^{m-1} g, u_h) + O(h^k) = \\ &= \sum_{l=2}^k h^{l-1} \sum_{m=1}^l A_{lm} I_{lm}(\partial_t^{l-m} \partial_x^{m-1} g, u_h) + O(h^k), \end{aligned}$$

после подстановки этих выражений в интегральное представление запишем

$$I_{11}(g, u_h) = \sum_{l=2}^k h^{l-1} \sum_{m=1}^l A_{lm} \left[ \sum_{l=2}^k h^{l-1} \sum_{p=1}^l A_{lp} I_{lp}(\partial_t^{l-p} \partial_x^{p-1} g, u_h) \right] + O(h^k).$$

Продолжая дальнейшие исключения, которые приведут к переходу слагаемых, содержащих  $I_{lm}(\partial_t^{l-m} \partial_x^m g, u_h)$ , в группу с более высоким порядком малости, придем к соотношению

$$I_{11}(g, u_h) = O(h^k),$$

что и определяет необходимый порядок аппроксимации.

**Следствие.** В работе [9] приводится достаточное условие, обеспечивающее  $k$ -тый порядок слабой аппроксимации разностной схемы, связанное с представимостью разностного оператора в виде

$$S\Lambda_h[u_h] = S\Lambda_{k,h}^*[u_h, f(u_h)] + S\bar{\Lambda}_{k+1,h}[u_h], \quad (18)$$

где  $S\Lambda_{k,h}^*[u_h, f(u_h)]$  – разностный оператор с  $k$ -тым порядком классической аппроксимации;  $S\bar{\Lambda}_{k+1,h}[u_h]$  – разностный оператор  $k+1$  порядка дивергентности.

Это условие порождает разностные схемы, являющиеся частным случаем рассмотренной выше теоремы. Они получаются при использовании дивергентной добавки соответствующего порядка в изложенном алгоритме повышения порядка слабой аппроксимации.

Возможно использование и несимметричных вариантов разностных выражений, например, после замены

$$\frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \Rightarrow \frac{\delta_x^\pm}{h} = \left( \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \pm h \frac{\delta^+ \delta^-}{2h^2} \right).$$

Неоднозначность построения разностной схемы с заданным порядком слабой аппроксимации позволяет сформулировать некоторые важные дополнительные требования к разностному оператору, такие как монотонность, инвариантность и так далее. Такой подход предоставляет возможность строить адаптивные вычислительные алгоритмы с использованием теории *функций-ограничителей* ( $L$ -*функций*).

Рассмотрим разностную схему для (1) в виде

$$\Lambda_h(u_h) = \frac{\delta_\tau^+ u}{\tau} + \frac{\delta_x^- \bar{f}(u_h)}{h} = 0,$$

где  $\bar{f}(u_h) = f(u_h) + h \cdot \psi(u_h)$ .

Оценим порядок слабой аппроксимации по определению 2. Запишем

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D \Lambda_h(u_h) \cdot g(x, t) dx dt = - \iint_D [u_h \frac{\delta_\tau^-}{\tau} g + \bar{f}(u_h) \frac{\delta_x^+}{h} g] dx dt = \\ &= - \iint_D [u_h \partial_t g + f(u_h) \partial_x g] dx dt - \iint_D [-\frac{\tau}{2} u_h \cdot \partial_t^2 g + h \cdot \psi(u_h) \cdot \partial_x g + \\ &\quad + \frac{h}{2} f(u_h) \cdot \partial_x^2 g] dx dt + O(h^2). \end{aligned}$$

Откуда находим

$$\iint_D [u_h \partial_t g + f(u_h) \partial_x g] dx dt = O(\tau).$$

Специальный выбор функции

$$\psi(u_h) = \frac{1}{4h} (\delta_x^+ + \delta_x^- + \delta_t^+ + \delta_t^-) f(u_h)$$

позволяет получить разностную схему, обладающую вторым порядком слабой аппроксимации:

$$\iint_D [u_h \partial_t g + f(u_h) \partial_x g] dx dt = O(h^2).$$

Проанализируем следующие две реализации разностных схем для уравнения (1) в виде

$$\Lambda 1_h(u_h) = \frac{\delta_\tau^+ u(+1) + \delta_\tau^+ u}{2\tau} + \frac{\delta_h^+ (f(\hat{u}_h) + f(u_h))}{2h} = 0,$$

$$\Lambda 2_h(u_h) = \frac{\delta_\tau^+ u(+1) + \delta_\tau^+ u}{2\tau} + \frac{\delta_h^+ f((\hat{u}_h + u_h)/2)}{h} = 0.$$

Представленные схемы, как легко проверить разложением в ряды Тейлора, имеют второй порядок классической аппроксимации:

$$\Lambda 1_h(u) = O(h^2), \quad \Lambda 2_h(u) = O(h^2).$$

Оценим порядок слабой аппроксимации первой схемы по определению 2, переписав ее в виде

$$\begin{aligned} \Lambda 1_h(u_h) &= \frac{\delta_\tau^+ u(+1) + \delta_\tau^+ u}{2\tau} + \frac{\delta_h^+ (f(\hat{u}_h) + f(u_h))}{2h} = \\ &= \frac{\delta_\tau^+}{\tau} (u_h + \frac{h}{2} \frac{\delta_h^+ u_h}{h}) + \frac{\delta_h^+}{h} (f(u_h) + \frac{\tau}{2} \frac{\delta_\tau^+}{\tau} f(u_h)) = 0. \end{aligned}$$

Данную разностную схему можно записать в форме

$$\Lambda 1_h(u_h) = \frac{\delta_\tau^+}{\tau} (A_h u_h) + \frac{\delta_h^+}{h} (B_\tau f(u_h)) = 0$$

с соответствующими операторами  $A_h$  и  $B_\tau$ .

Тогда, действуя аналогично (12), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D \Lambda 1_h(u_h) \cdot g(x, t) dx dt = - \iint_D [u_h \frac{\delta_t^-}{\tau} g + \bar{f}(u_h) \frac{\delta_x^-}{h} g] dx dt + \\ &+ \iint_D [u_h \frac{h}{2} \frac{\delta_\tau^-}{\tau} \frac{\delta_h^-}{h} g + f(u_h) \frac{\tau}{2} \frac{\delta_h^-}{h} \frac{\delta_\tau^-}{\tau} g] dx dt = - \iint_D (u_h \partial_t g + f(u_h) \partial_x g) dx dt + \\ &+ \frac{\tau}{2} \iint_D (u_h \partial_t^2 g + f(u_h) \partial_t \partial_x g) dx dt + \frac{h}{2} \iint_D (u_h \partial_t \partial_x g + f(u_h) \partial_x^2 g) dx dt + \\ &+ \frac{h^2}{3!} \iint_D (\frac{\tau^2}{h^2} u_h \partial_t^3 g + f(u_h) \partial_x^3 g) dx dt + \frac{h^2}{4} \iint_D (u_h \partial_t \partial_x^2 g + \frac{\tau}{h} f(u_h) \partial_t \partial_x^2 g - \\ &\quad - \frac{\tau}{h} u_h \partial_t^2 \partial_x g - \frac{\tau^2}{h^2} f(u_h) \partial_t^2 \partial_x g) dx dt + O(h^3). \end{aligned}$$

Откуда

$$0 = -I_{11}(g) + \frac{\tau}{2} I_{22}(g) + \frac{h}{2} I_{21}(g) + h^2 I_3(g) + O(h^3).$$

После преобразований с использованием полученного интегрального представления разностной схемы получим

$$I_{11}(g) = \frac{1}{4} [\tau^2 I_{22}(\partial_t g) + \tau h I_{22}(\partial_x g) + \tau h I_{21}(\partial_t g) + h^2 I_{21}(\partial_x g)] + O(h^3) = O(h^2),$$

что означает: разностная схема имеет второй порядок слабой аппроксимации на своих разностных решениях.

Аналогичные выкладки для второй разностной схемы показывают, что

$$I_0(g) = O(h, \tau).$$

В работе [9] показано, что явная разностная двухслойная схема

$$\frac{\delta_t^+}{\tau} u_h + \frac{\delta_x^-}{h} \bar{f} = 0, \quad \bar{f} = f(u_h) + h\psi(u_h) \quad (18)$$

не может иметь второй порядок слабой аппроксимации по определению 2. Из выше изложенного для разностной схемы (10) легко показать, что, выбирая

$$\bar{f} = \frac{f(u_h(+1)) + f(u_h)}{2} - \frac{\tau}{2} \frac{\delta_h^+}{h} f(u_h) + \frac{\tau}{2} \frac{\delta_\tau^-}{\tau} \frac{f(u_h(+1)) - u_h(+1) + f(u_h) - u_h}{2},$$

получим явную трехслойную разностную схему 2-го порядка слабой аппроксимации, у которой

$$\psi(u_h) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_h^+}{h} f(u_h) - \frac{\tau}{h} \frac{\delta_h^+}{h} f(u_h) + \tau \frac{\delta_\tau^-}{\tau} \frac{f(u_h(+1)) - u_h(+1) + f(u_h) - u_h}{2h} \right].$$



Неявная двухслойная схема получится, если выбрать

$$\psi(u_h) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_h^+}{h} f(u_h) - \frac{\tau}{h} \frac{\delta_h^+}{h} f(u_h) + \tau \frac{\delta_\tau^+}{\tau} \frac{f(u_h(+1)) - u_h(+1) + f(u_h) - u_h}{2h} \right].$$

Тогда можно утверждать, что разностную схему вида (18) со вторым порядком слабой аппроксимации можно построить в классе явных трехслойных или неявных двухслойных разностных схем по времени.

Перспективным выглядит развитие теоретических основ построения монотонизированных разностных схем повышенного порядка аппроксимации на основе интегральной формы исходных нестационарных систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Конструктивной основой их построения будут служить процедуры компактного интегрирования (аналоги компактного численного дифференцирования), интегральные следствия исходной системы уравнений и средства монотонизации разностных схем в виде восстановительных полиномов с  $L$ -функциями.

**Исследование устойчивости разностных схем.** Исследуем условия устойчивости численного решения разностной схемы (9)

$$\begin{aligned} S\Lambda_h(u_h) &= \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(u_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(u_h) - u_h) = 0, \end{aligned}$$

имеющей повышенный (2-й) порядок классической и слабой аппроксимации.

Проверку устойчивости данной разностной схемы проведем при ее применении для аппроксимации линейного уравнения переноса, у которого  $f(u) = au$ . Тогда для оценки модуля разностного оператора шага

$$\hat{u}_h = Tu_h$$

на гармониках  $e^{iam}$  получим для множителя  $\hat{u}_h = \lambda e^{iam}$  квадратное уравнение

$$\left[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha\right] \lambda^2 + \left[-1 - \frac{v^2}{a} (\cos \alpha - 1) + iv \sin \alpha\right] \lambda - iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha = 0$$

из которого найдем

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1 + \frac{v^2}{a} (1 - \cos \alpha) - iv \sin \alpha}{2 \left[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha\right]} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{\left[1 + \frac{v^2}{a} (1 - \cos \alpha) - iv \sin \alpha\right]^2 + 4 \left[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha\right] iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha}}{2 \left[1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha\right]}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для сравнения рассмотрим разностную схему, предложенную в [40]:

$$OS\Lambda_h(u_h) = [1 + \frac{1}{6} \delta_x^+ \delta_x^-] \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} u_h + [1 + \frac{1}{6} \delta_t^+ \delta_t^-] \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + [C_{-1} T^{-\tau} + C_0 E + C_{+1} T^\tau] \delta_x^{+2} \delta_x^{-2} u_h = 0,$$

имеющую третий порядок классической и слабой аппроксимации. У нее искусственная вязкость представлена разностным оператором четвертого порядка дивергентности, что, по утверждению [38], приводит к снижению четвертого порядка классической и слабой аппроксимации исходного разностного оператора схемы до третьего. При ее применении для аппроксимации линейного уравнения переноса, получим разностную схему, которую будем исследовать на устойчивость ее решений. Заметим, что использование искусственной вязкости в разностном уравнении может существенно изменить решение [39].

Соответствующее квадратное уравнение для множителя  $\lambda$  оператора перехода разностной схемы  $\hat{u}_h = Tu_h$  на  $u_h = e^{i\alpha m}$ , и  $\hat{u} = \lambda u_h$ , имеет вид

$$[2 + \cos \alpha + iv \sin \alpha + 2C_{+1}d] \lambda^2 + [2C_0d + i4v \sin \alpha] \lambda - [2 + \cos \alpha - iv \sin \alpha - 2C_{-1}d] = 0,$$

где  $d = 6(\cos 2\alpha - \cos \alpha + 3)$ , и следующие корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[C_0d + 2ic] + \sqrt{[C_0d + 2ic]^2 + [w + 2iC_{+1}d][\bar{w} - 2C_{-1}d]}}{[w + 2C_1d]}. \quad (20)$$

Здесь  $c = v \sin \alpha$ ,  $w = b + ic$ ,  $b = 2 + \cos \alpha$ . Коэффициенты  $C_{-1}$ ,  $C_0$ ,  $C_{+1}$  служат для достижения условия  $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ .

Заметим, что построенная выше схема  $S\Lambda_h(u_h) = 0$ , при численном исследовании спектра (19) оператора перехода оказалась неустойчива в линейном приближении с  $f(u) = au$ , где  $a < 0$ , при любом  $v$ .

Варианты разностных схем, имеющих второй порядок слабой аппроксимации, предлагаются в виде

$$V2S\Lambda_h(u_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) = 0,$$

$$V3S\Lambda_h(u_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(u_h) + \frac{h^3}{\tau} \sum_{j=-1}^{j=1} C_j T^{j\tau} \delta_x^{+2} \delta_x^{-2} u_h = 0.$$

Соответствующее уравнение для множителя перехода разностного оператора  $V3S\Lambda_h(u_h)$  запишется так:

$$[A_1 + iA_2] \lambda^2 + [B_1 + iB_2] \lambda + [G_1 + iG_2] = 0, \quad (21)$$

где  $D_1 = 4 \cos \alpha - 3 - \cos 2\alpha$ ,  $D_2 = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha$ ,  $A_1 = 1 + C_{+1}D_1$ ,

$$A_2 = \frac{\nu}{4} \sin \alpha + C_{+1}D_2, \quad B_1 = -1 + C_0D_1, \quad B_2 = \nu \sin \alpha + C_0D_2, \quad G_1 = C_{-1}D_1,$$

$$G_2 = -\frac{\nu}{4} \sin \alpha + C_{-1}D_2.$$

Выражения для корней уравнения (21) запишутся в форме

$$\lambda_k(\alpha) = \operatorname{Re} \lambda_k(\alpha) + i \operatorname{Im} \lambda_k(\alpha).$$

$$\lambda_k(\alpha, C_{-1}, C_0, C_{+1}) =$$

$$= \frac{-(A_1B_1 + A_2B_2) + |z|^{1/2} (A_1 \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{2} + A_2 \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{2})}{2(A_1^2 + A_2^2)} +$$

$$+ i \frac{-(A_1B_2 - A_2B_1) + |z|^{1/2} (-A_2 \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{2} + A_1 \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{2})}{2(A_1^2 + A_2^2)},$$

где  $z = B_1^2 - B_2^2 - 4(A_1G_1 - A_2G_2) + i(2B_1B_2 - 4(A_1G_2 + A_2G_1))$ ,  $k = 1, 2$ .

При нулевых значениях коэффициентов искусственной вязкости получим характеристическое уравнение для схемы  $V2S\Lambda_h(u_h) = 0$ .

На приведенных ниже графиках горизонтальная ось –  $\operatorname{Re} \lambda_k(\alpha)$ , вертикальная ось –  $\operatorname{Im} \lambda_k(\alpha)$ . Сплошной линией обозначена единичная окружность.

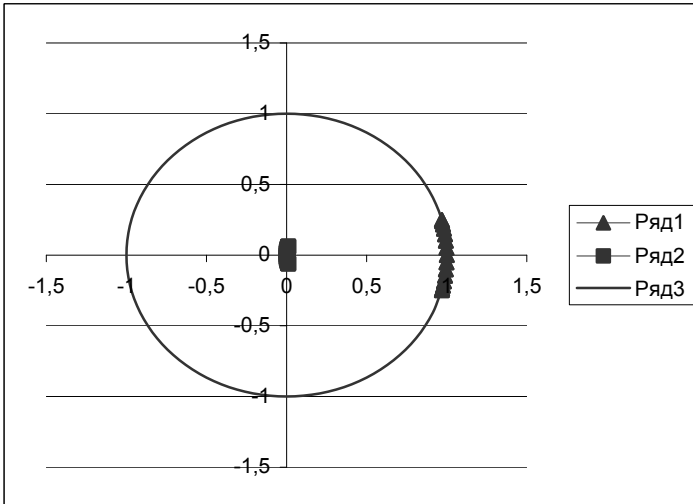


Рис. 1 – Схема  $V2S\Lambda_h(u_h) = 0$ . Зависимость  $\lambda_k(\alpha) = \operatorname{Re} \lambda_k(\alpha) + i \operatorname{Im} \lambda_k(\alpha)$  ( $k = 1$  – треугольник,  $k = 2$  – прямоугольник), от  $\alpha \in [0, 2\pi]$  при  $\nu = 0.25$ ,  $a = 1.5$ .

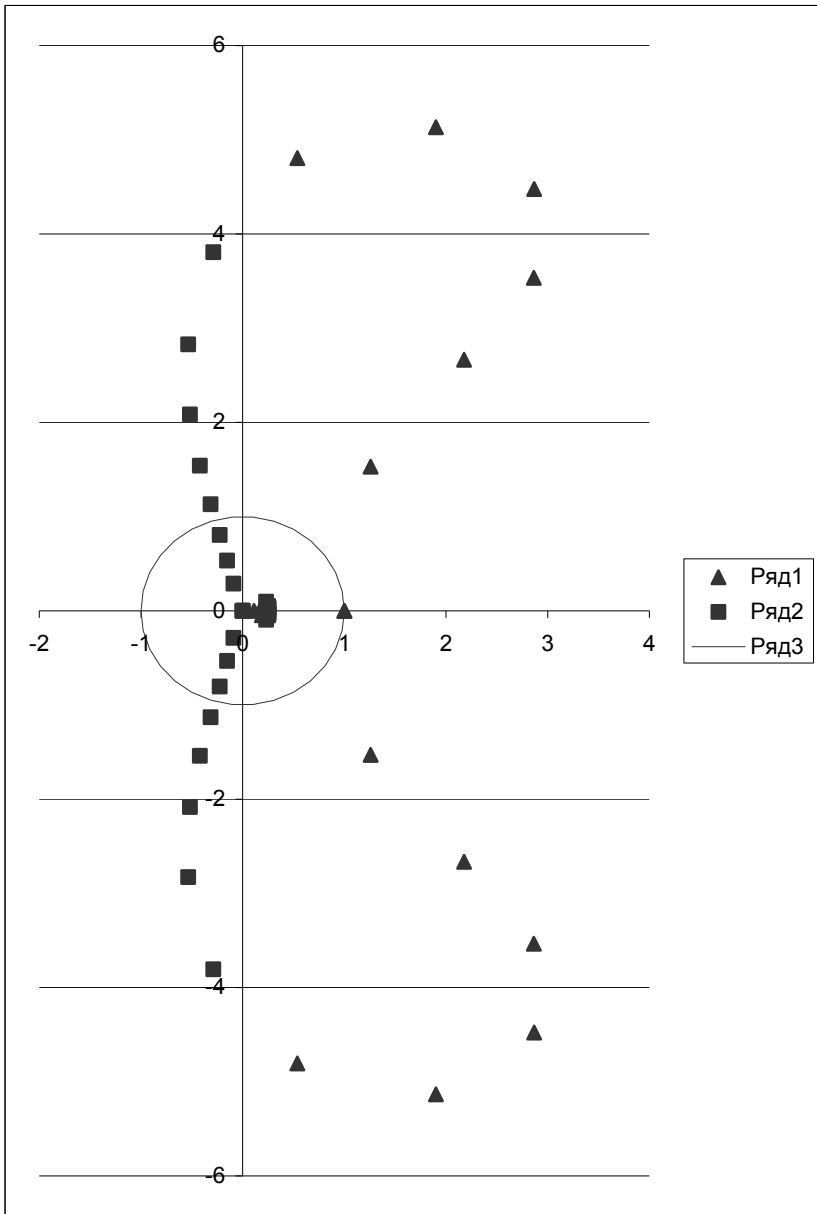


Рис. 2 – Схема  $V3S\Lambda_h(u_h) = 0$ ,  $C_{-1} = 0.0$ ,  $C_0 = 0.0$ ,  $C_{+1} = -1.0$ . Зависимость  $\lambda_k(\alpha) = \text{Re } \lambda_k(\alpha) + i \text{Im } \lambda_k(\alpha)$  ( $k=1$  – треугольник,  $k=2$  – прямоугольник),  $\alpha \in [0, 2\pi]$  при  $\nu = 10.0$ ,  $a = 1.5$ .

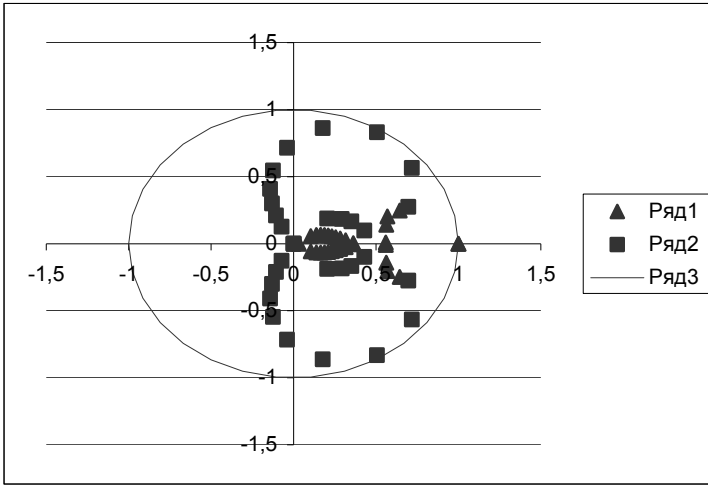


Рис. 3 – Схема  $V3S\Lambda_h(u_h) = 0$ ,  $C_{-1} = 0.0$ ,  $C_0 = 0.0$ .  $C_{+1} = -3.7$ . Зависимость  $\lambda_k(\alpha) = \text{Re } \lambda_k(\alpha) + i \text{Im } \lambda_k(\alpha)$  ( $k=1$  – треугольник,  $k=2$  – прямоугольник),  $\alpha \in [0, 2\pi]$  при  $\nu = 10.0$ ,  $a = 1.5$ .

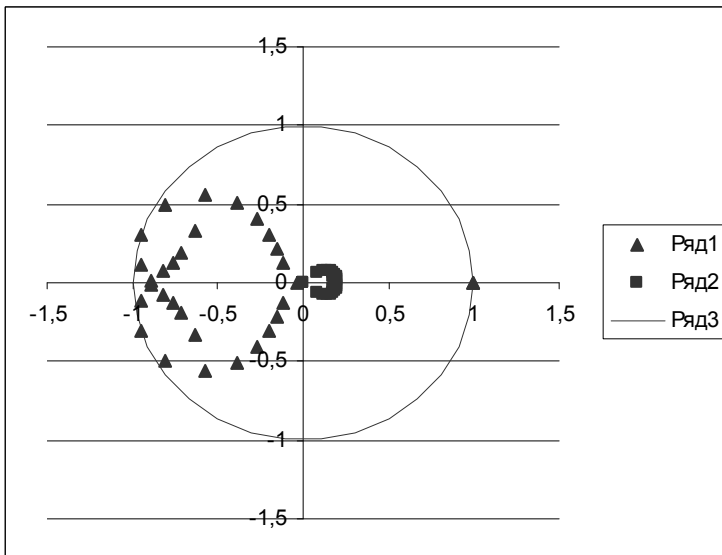


Рис. 4 – Схема  $V3S\Lambda_h(u_h) = 0$ ,  $C_{-1} = 0.0$ ,  $C_0 = 0.0$ .  $C_{+1} = 4.0$ . Зависимость  $\lambda_k(\alpha) = \text{Re } \lambda_k(\alpha) + i \text{Im } \lambda_k(\alpha)$  ( $k=1$  – треугольник,  $k=2$  – прямоугольник),  $\alpha \in [0, 2\pi]$  при  $\nu = 10.0$ ,  $a = 1.5$ .

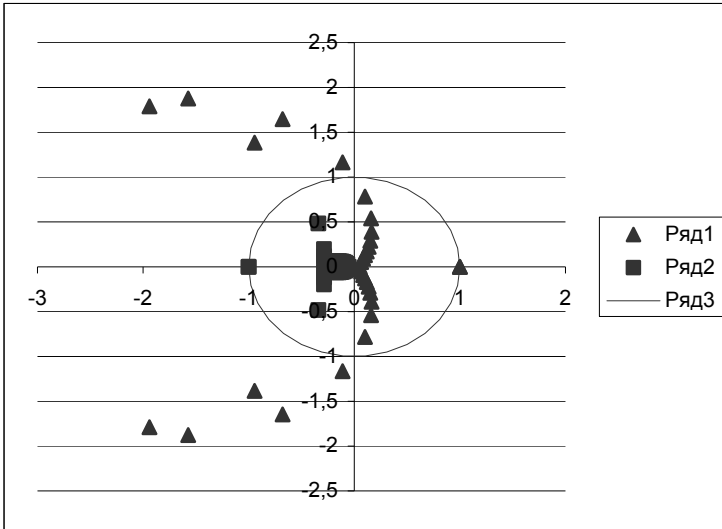


Рис. 5 – Схема  $OS\Lambda_h(u_h)=0$ ,  $C_{-1}=0.0$ ,  $C_0=0.0$ .  $C_{+1}=4.0$ . Зависимость  $\lambda_k(\alpha) = \text{Re } \lambda_k(\alpha) + i \text{Im } \lambda_k(\alpha)$  из (20) ( $k=1$  – треугольник,  $k=2$  – прямоугольник),  $\alpha \in [0, 2\pi]$  при  $\nu=10.0$ ,  $a=1.5$ .

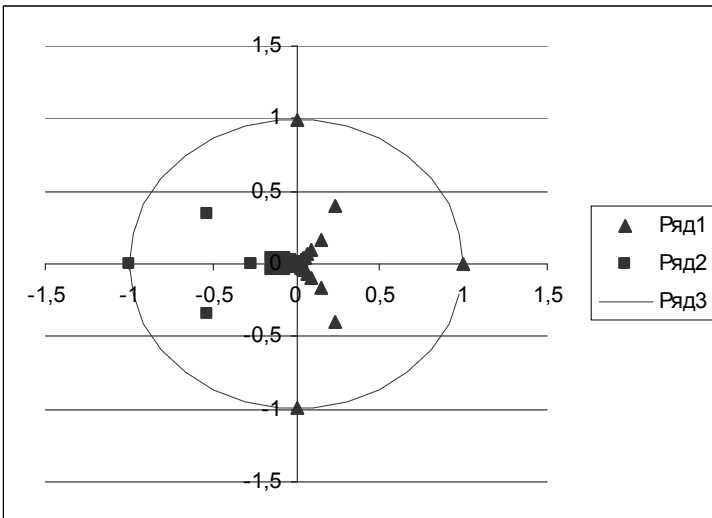


Рис. 6 – Схема  $OS\Lambda_h(u_h)=0$ ,  $C_{-1}=0.0$ ,  $C_0=0.0$ .  $C_{+1}=210.0$ . Зависимость  $\lambda_k(\alpha) = \text{Re } \lambda_k(\alpha) + i \text{Im } \lambda_k(\alpha)$  ( $k=1$  – треугольник,  $k=2$  – прямоугольник),  $\alpha \in [0, 2\pi]$  при  $\nu=10.0$ ,  $a=1.5$ .

При меньших значениях  $C_{+1}$  спектр содержит точки, находящиеся за пределами единичной окружности.

Предложенная новая разностная схема с разностным оператором  $V3\Lambda_h(u_h)$  требует для устойчивости численного решения значительно меньшей величины искусственной вязкости, чем в  $OS\Lambda_h(u_h)$ .

Решения разностной схемы  $V3\Lambda_h(u_h) = 0$ , построенной с использованием ее интегрального представления, стабилизируются искусственной вязкостью со значительно меньшим коэффициентом, чем схемы  $OS\Lambda_h(u_h) = 0$ . Причем, в первой схеме стабилизация осуществляется коэффициентом, малым по модулю, а во второй схеме стабилизирующий коэффициент большой и только положительный.

Можно заметить, что если при построении разностной схемы не используются ее дифференциальные следствия или следствия ее дифференциального представления, то порядки классической и слабой аппроксимации совпадают.

Неоднозначность построения разностной схемы с заданным порядком слабой аппроксимации позволяет сформулировать некоторые важные дополнительные требования к разностному оператору, такие как монотонность, инвариантность, и так далее. Такой подход предоставляет возможность строить адаптивные вычислительные алгоритмы с использованием теории функций-ограничителей ( $L$ -функций).

Приведем полезные в дальнейшем соотношения:

$$\delta_h^+ g = h\partial_x g + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 g + \frac{h^3}{3!}\partial_x^3 g + \dots,$$

$$\delta_h^- g = h\partial_x g - \frac{h^2}{2}\partial_x^2 g + \frac{h^3}{3!}\partial_x^3 g - \dots,$$

$$\frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} g = \partial_x g + \frac{h^2}{3!}\partial_x^3 g + \frac{h^4}{5!}\partial_x^5 g + \dots,$$

$$\frac{\delta_h^+ \delta_h^-}{h^2} g = \partial_x^2 g + 2\frac{h^2}{4!}\partial_x^4 g + 2\frac{h^4}{6!}\partial_x^6 g + \dots.$$

Рассмотрим некоторые разностные схемы и порядки классической и слабой аппроксимации для них.

### **Схема 1.**

$$\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \varphi_2(v_h) = 0.$$

*Аппроксимация классическая.*

$$D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad \partial_t^2 u = \partial_x^2 \varphi_2(u). \quad \Lambda_h(u) = O(h^2)$$

*Слабая аппроксимация.*

- по определению 1:

$$I_{11}(v, g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dx dt = 0,$$

$$\iint_{\Omega} \Lambda_h(v) g(x, t) dx dt = -I_{11}(v, g) + O(h) = O(h).$$

- по определению 2:

$$I_{11}(v_h, g) = \iint_{\Omega} (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dx dt = 0,$$

$$0 = \iint_{\Omega} \Lambda_h(v_h) g(x, t) dx dt = -I_{11}(v_h, g) + O(h).$$

$$I_{11}(v_h, g) = O(h).$$

*Устойчивость:*

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + i \frac{a}{h} \sin \alpha + v \frac{1}{h} (\cos \alpha - 1) = 0, \quad \lambda = 1 + 2 \frac{v^2}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - i v \sin \alpha.$$

## Схема 2.

$$VOS\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_{\tau}^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} f(v_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_h^+ \delta_h^-}{h^2} f(v_h) = 0.$$

*Аппроксимация классическая.*  $D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0$

$$\begin{aligned} VOS\Lambda_h(u) &= \partial_t u + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 u + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 u + \dots + (\partial_x + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 + \dots) f(u) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \cdot (\partial_x^2 + 2 \frac{h^2}{4!} \partial_x^4 + \dots) f(u) = \\ &= \partial_t u + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} (\partial_t^2 u + \partial_x^2 f(u)) + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 u + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 f(u) + O(h^3) = D_{11}(u) + O(h). \end{aligned}$$

$$VOS\Lambda_h(u) = O(h).$$

*Слабая аппроксимация.*

- по определению 1:

$$I_{11}(v, g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dx dt = 0,$$

$$\iint_{\Omega} VOS\Lambda_h(v) g(x, t) dx dt = -I_{11}(v, g) + O(h) = O(h).$$

- по определению 2:

$$I_{11}(v_h, g) = \iint_{\Omega} (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dx dt = 0,$$

$$0 = \iint_{\Omega} VOS\Lambda_h(v_h) g(x, t) dx dt = -I_{11}(v_h, g) + O(h).$$

$$I_{11}(v_h, g) = O(h).$$



*Устойчивость:*

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + i \frac{a}{h} \sin \alpha + v \frac{1}{h} (\cos \alpha - 1) = 0, \quad \lambda = 1 + 2 \frac{v^2}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - iv \sin \alpha.$$

**Схема 3.**

$$\begin{aligned} V1S\Lambda_h(v_h) &= \frac{\delta_\tau^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \frac{\delta_h^+ \delta_h^-}{h^2} f(v_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_\tau^+ + \delta_\tau^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} (f(v_h) - v_h) = 0. \end{aligned}$$

*Аппроксимация классическая.*

$$\begin{aligned} V1S\Lambda_h(u) &= \partial_t u + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 u + \dots + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t \partial_x (f(u) - u) - \\ &- \frac{\tau}{2} \cdot \partial_x^2 f(u) + O(h^2) = \partial_t u + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} (\partial_t^2 u + \partial_x \partial_t f(u)) - \\ &- \frac{\tau}{2} (\partial_t \partial_x u + \partial_x^2 f(u)) + O(h^2) = D_{11}(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t D_{11}(u) - \frac{\tau}{2} \partial_x D_{11}(u) + O(h^2) = O(h^2) \end{aligned}$$

с учетом дифференциальных следствий для  $D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ .

*Слабая аппроксимация.*

- по определению 1:

$$\iint_{\Omega} V1S\Lambda_h(v)g(x,t)dxdt = -I_{11}(v, g) + O(h^2) = O(h^2)$$

с учетом определения слабого решения в форме

$$I_{11}(v, g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dxdt = 0$$

и интегральных следствий из него вида

$$I_{11}(u, \partial_t g) = 0, \quad I_{11}(u, \partial_x g) = 0.$$

- по определению 2 из

$$0 = \iint_{\Omega} V1S\Lambda_h(v_h)g(x,t)dxdt = I_{11}(v_h, g) + O(h^2)$$

получим с учетом интегральных следствий из интегрального представления разностной схемы, что

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

*Устойчивость:* ( $f(u) = au$ ).

Характеристическое уравнение разностного оператора запишется в форме

$$\lambda^2 [1 + iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha] + \lambda [-1 - \frac{v^2}{a} (\cos \alpha - 1) + iv \sin \alpha] - iv \frac{a-1}{4a} \sin \alpha = 0.$$

**Схема 4.**

$$V2S\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_\tau^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} f(v_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_\tau^+ + \delta_\tau^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} f(v_h) = 0.$$

*Аппроксимация классическая.*

$$\begin{aligned} V2S\Lambda_h(u) &= \partial_t u + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 u + \dots + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t \partial_x f(u) + O(h^2) = \\ &= \partial_t u + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} (\partial_t^2 u + \partial_x \partial_t f(u)) + O(h^2) = \\ &= D_{11}(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t D_{11}(u) + O(h^2) = O(h^2) \end{aligned}$$

с учетом дифференциальных следствий для  $D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ .

*Слабая аппроксимация.*

- по определению 1:

$$\iint_{\Omega} V2S\Lambda_h(v) g(x, t) dx dt = I_{11}(v, g) + \frac{\tau}{2} I_{11}(v, \partial_t g) + O(h^2) = O(h^2);$$

- по определению 2:

$$0 = \iint_{\Omega} V2S\Lambda_h(v_h) g(x, t) dx dt = I_{11}(v_h, g) + O(h^2).$$

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

*Устойчивость:*

$$\lambda^2 [1 + i \frac{V}{4} \sin \alpha] + \lambda [-1 + i v \sin \alpha] - i \frac{V}{4} \sin \alpha = 0.$$

### **Схема 5.**

Схема V3S получена для достижения второго порядка слабой аппроксимации. Для устойчивости в схему введена трехслойная искусственная вязкость с коэффициентами  $Cm = C_{-1}$ ,  $Co = C_0$ ,  $Cp = C_{+1}$ :

$$\begin{aligned} V3S\Lambda_h(v_h) &= \frac{\delta_\tau^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} f(v_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_\tau^+ + \delta_\tau^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_h^+ + \delta_h^-}{2h} f(v_h) + \\ &+ \frac{h^3}{\tau} \sum_{j=-1}^{j=1} C_j T^{j\tau} \delta_h^{+2} \delta_h^{-2} v_h = 0. \end{aligned}$$

*Аппроксимация классическая.*

$$\begin{aligned} V3S\Lambda_h(u) &= \partial_t u + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 u + \dots + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t \partial_x f(u) + O(h^2) = \partial_t u + \\ &+ \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} (\partial_t^2 u + \partial_x \partial_t f(u)) + O(h^2) = D_{11}(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t D_{11}(u) + O(h^2) = O(h^2) \end{aligned}$$

с учетом дифференциальных следствий для  $D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ .

*Слабая аппроксимация.*

- по определению 1:

$$\iint_{\Omega} V3S\Lambda_h(v)g(x,t)dxdt = I_{11}(v, g) + \frac{\tau}{2}I_{11}(v, \partial_t g) + O(h^2) = O(h^2);$$

- по определению 2:

$$0 = \iint_{\Omega} V3S\Lambda_h(v_h)g(x,t)dxdt = I_{11}(v_h, g) + O(h^2).$$

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

*Устойчивость:*

Характеристическое уравнение разностного оператора запишется в виде

$$\lambda^2[A_1 + iA_2] + \lambda[B_1 + iB_2] + G_1 + iG_2 = 0,$$

где  $D_1 = 4 \cos \alpha - 3 - \cos 2\alpha$ ,  $D_2 = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha$ ,  $A_1 = 1 + C_{+1}D_1$ ,

$$A_2 = \frac{\nu}{4} \sin \alpha + C_0 D_2, \quad B_1 = -1 + C_0 D_1, \quad B_2 = \nu \sin \alpha + C_0 D_2, \quad G_1 = C_{-1} D_1,$$

$$G_2 = -\frac{\nu}{4} \sin \alpha + C_{-1} D_2.$$

### **Схема 6.**

$$V4S\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_{\tau}^{+} v_h}{\tau} + \frac{\delta_h^{-}}{h} [f(v_h)] + \frac{h}{2} \frac{\delta_h^{+} + \delta_h^{-}}{2h} f(v_h) + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^{+} + \delta_t^{-}}{2\tau} f(v_h) = 0.$$

*Аппроксимация классическая.*

$$\begin{aligned} V4S\Lambda_h(u) &= \partial_t u + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 u + \dots + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t \partial_x f(u) + O(h^2) = \\ &= \partial_t u + \partial_x f(u) + \frac{\tau}{2} (\partial_t^2 u + \partial_x \partial_t f(u)) + O(h^2) = \\ &= D_{11}(u) + \frac{\tau}{2} \partial_t D_{11}(u) + O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

*Слабая аппроксимация.*

- по определению 1:

$$\iint_{\Omega} V4S\Lambda_h(v)g(x,t)dxdt = I_{11}(v, g) + \frac{\tau}{2}I_{11}(v, \partial_t g) + O(h^2) = O(h^2);$$

- по определению 2:

$$0 = \iint_{\Omega} V4S\Lambda_h(v_h)g(x,t)dxdt = I_{11}(v_h, g) + O(h^2).$$

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

*Устойчивость:*

Характеристическое уравнение разностного оператора запишется в форме

$$\lambda^2[A_1 + iA_2] + \lambda[B_1 + iB_2] + G_1 + iG_2 = 0,$$

где  $D_1 = -\nu(4 \cos \alpha - 3 - \cos 2\alpha)$ ,  $D_2 = \nu(6 \sin \alpha + \sin 2\alpha)$ ,  $A_1 = 4 + \nu(1 - \cos \alpha)$ ,  
 $A_2 = \nu \sin \alpha$ ,  $B_1 = -4 + D_1$ ,  $B_2 = D_2$ ,  $G_1 = \nu(\cos \alpha - 1)$ ,  $G_2 = -\nu \sin \alpha$ .

**Схема 7.**

$$V5S\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_\tau^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_h^-}{h} [f(v_h)] - \frac{h}{2} \frac{\delta_\tau^+ + \delta_\tau^-}{2\tau} v_h + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} f(v_h) = 0.$$

Аппроксимация классическая.

$$V5S\Lambda_h(u) = O(h^2).$$

Слабая аппроксимация.

- по определению 1:

$$\iint_{\Omega} V5S\Lambda_h(v) g(x, t) dx dt = O(h^2);$$

- по определению 2:

$$0 = \iint_{\Omega} V5S\Lambda_h(v_h) g(x, t) dx dt = I_{11}(v_h, g) + O(h^2).$$

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

Устойчивость:

Характеристическое уравнение разностного оператора запишется в виде:

$$\lambda^2 [A_1 + iA_2] + \lambda [B_1 + iB_2] + G_1 + iG_2 = 0,$$

где  $A_1 = 4 + \frac{\nu^2 - 1}{\nu} (1 - \cos \alpha)$ ,  $A_2 = \frac{\nu^2 - 1}{\nu} \sin \alpha$ ,  $B_1 = -4 + 4\nu(1 - \cos \alpha)$ ,

$$B_2 = 4\nu \sin \alpha, G_1 = -\frac{\nu^2 - 1}{\nu} (1 - \cos \alpha), G_2 = -\frac{\nu^2 - 1}{\nu} \sin \alpha.$$

**Многомерные нестационарные задачи.** Рассмотрим систему уравнений

$$L(U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} + \frac{\partial H(U)}{\partial z} = 0 \tag{22}$$

и соответствующую ей разностную схему

$$\Lambda_h(U_h) = 0. \tag{23}$$

Слабое решение для (22), аналогично введенным определениям 1 и 2, удовлетворяет следующему интегральному соотношению:

$$\int_{\Omega} L(U) g(x, y, z, t) dx dy dz dt = 0,$$

причём порядок аппроксимации разностного оператора  $\Lambda_h$  на решениях (3) находится из соотношения

$$\int_{\Omega} \Lambda_h(U) g(x, y, z, t) dx dy dz dt = O(h^k),$$

а на решениях (23) из оценки интеграла

$$I_{11}(U_h, g) = \int_{\Omega} [U_h \partial_t g + F(U_h) \partial_x g + G(U_h) \partial_y g + H(U_h) \partial_z g] dx dy dz dt = O(h^k). \quad (24)$$

Одна из разностных схем повышенного (второго) порядка слабой аппроксимации на равномерной сетке по определению (24) имеет вид

$$\begin{aligned} S\Lambda_h(U_h) &= \frac{\delta_t^+ U_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} F(U_h) - \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} + \frac{\delta_x^- \delta_y^-}{h^2} + \frac{\delta_x^- \delta_z^-}{h^2} \right] F(U_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \frac{\delta_t^- \delta_x^-}{\tau h} [F(U_h) - U_h] + \frac{\delta_y^+ + \delta_y^-}{2h} G(U_h) - \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\delta_x^- \delta_y^-}{h^2} + \frac{\delta_y^+ \delta_y^-}{h^2} + \frac{\delta_z^- \delta_y^-}{h^2} \right] G(U_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \frac{\delta_t^- \delta_x^-}{\tau h} [G(U_h) - U_h] + \frac{\delta_z^+ + \delta_z^-}{2h} H(U_h) - \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\delta_x^- \delta_z^-}{h^2} + \frac{\delta_y^- \delta_z^-}{h^2} + \frac{\delta_z^+ \delta_z^-}{h^2} \right] H(U_h) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \frac{\delta_t^- \delta_z^-}{\tau h} [H(U_h) - U_h] = 0. \end{aligned}$$

Оценим порядок слабой аппроксимации этой разностной схемы:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} S\Lambda_h(U_h) g dx dy dz dt = - \int_{\Omega} U_h (\partial_t g - \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 g + \dots) + \\ &+ F(U_h) (\partial_x g + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 g + \dots) + \frac{\tau}{2} F(U_h) [(\partial_x^2 g + 2 \frac{h^2}{4!} \partial_x^4 g + \dots) + \\ &+ \partial_x (\partial_y g + \frac{h}{2} \partial_y^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_y^3 g + \dots] + \frac{h}{2} \partial_x^2 (\partial_y g + \frac{h}{2} \partial_y^2 g + \dots) + \\ &+ \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 (\partial_y g + \dots) + \partial_x (\partial_z g + \frac{h}{2} \partial_z^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_z^3 g + \dots + \frac{h}{2} \partial_x^2 (\partial_z g + \\ &+ \frac{h}{2} \partial_z^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 (\partial_z g + \dots)] - \frac{\tau}{2} [F(U_h) - U_h] [\partial_x (\partial_t g + \\ &+ \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \dots) + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 g + \dots] + \frac{h}{2} \partial_x^2 (\partial_t g + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 (\partial_t g + \dots)] + \\ &+ G(U_h) (\partial_y g + \frac{h^2}{3!} \partial_y^3 g + \dots) + \frac{\tau}{2} G(U_h) [(\partial_y^2 g + 2 \frac{h^2}{4!} \partial_y^4 g + \dots) + \\ &+ \partial_y (\partial_x g + \frac{h}{2} \partial_x^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 g + \dots] + \frac{h}{2} \partial_y^2 (\partial_x g + \frac{h}{2} \partial_x^2 g + \dots) + \\ &+ \frac{h^2}{3!} \partial_y^3 (\partial_x g + \dots) + \partial_y (\partial_z g + \frac{h}{2} \partial_z^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_z^3 g + \dots + \frac{h}{2} \partial_y^2 (\partial_z g + \\ &+ \frac{h}{2} \partial_z^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_y^3 (\partial_z g + \dots)] - \frac{\tau}{2} [G(U_h) - U_h] [\partial_y (\partial_t g + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 g + \dots + \frac{h}{2} \partial_y^2 (\partial_t g + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_y^3 (\partial_t g + \dots) + \\
& + H(U_h) (\partial_z g + \frac{h^2}{3!} \partial_z^3 g + \dots) + \frac{\tau}{2} H(U_h) [(\partial_z^2 g + 2 \frac{h^2}{4!} \partial_z^4 g + \dots) + \\
& + \partial_z (\partial_x g + \frac{h}{2} \partial_x^2 g + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 g + \dots) + \frac{h}{2} \partial_z^2 (\partial_x g + \frac{h}{2} \partial_x^2 g + \dots) + \\
& + \frac{h^2}{3!} \partial_z^3 (\partial_x g + \dots) + \partial_z (\partial_x g + \frac{h}{2} \partial_x^2 g + \frac{h^2}{3!} \partial_x^3 g + \dots) + \frac{h}{2} \partial_z^2 (\partial_y g + \\
& + \frac{h}{2} \partial_y^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_z^3 (\partial_y g + \dots)] - \frac{\tau}{2} [H(U_h) - U_h] [\partial_z (\partial_t g + \\
& + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \frac{\tau^2}{3!} \partial_t^3 g + \dots) + \frac{h}{2} \partial_z^2 (\partial_t g + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 g + \dots) + \frac{h^2}{3!} \partial_z^3 (\partial_t g + \dots)] d\omega = \\
& = \frac{\tau}{2} [-I_{11}(g) + I_{11}(\partial_t g) - I_{11}(\partial_x g) - I_{11}(\partial_y g) - I_{11}(\partial_z g)] + O(h^2),
\end{aligned}$$

где  $I_{11}(g) = \int_{\Omega} [U_h \partial_t g + F(U_h) \partial_x g + G(U_h) \partial_y g + H(U_h) \partial_z g] d\omega$ .

Из полученного интегрального представления для разностной схемы легко вывести оценку порядка ее слабой аппроксимации

$$I_{11}(g) = O(h^2).$$

Соответствующую разностную схему для системы уравнений (22) можно построить в криволинейной системе координат:

$$\tilde{L}(\tilde{U}) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{U})}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}(\tilde{U})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{H}(\tilde{U})}{\partial \zeta} = 0.$$

**Результаты численных исследований.** Часто точное разрывное решение уравнения (1) заранее неизвестно. В этом случае для приближенного определения порядка слабой сходимости применяют *правило Рунге*, выполняя экспериментальную проверку скорости сходимости первых интегралов от получаемого разностного решения, взятых по различным областям, содержащим особенности точного решения.

Ниже приведены результаты анализа расчета по *схеме крест* для (1) ( $f(u) = u^2 / 2$ ) с начальным распределением в виде

$$u(x, 0) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(x/2).$$

Распределение порядков классической и слабой сходимости приведены на рис.7, рис.8.

Из практически одинакового распределения порядков локальной и

сильной сходимости подтверждается экспериментально обнаруженный факт [6] наличия разной погрешности у инвариантов, проходящих через ударную волну и приходящих на нее. В рассмотренной одномерной задаче присутствует только приходящий на разрыв инвариант.

Численное исследование распада произвольного разрыва на неоднородном фоне, заданным соотношением

$$p(x) = r(x)^k,$$

$$r(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(-\frac{\pi}{2} + 10x\right), u(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(-\frac{\pi}{2} + 50x\right),$$

проведено для одномерных нестационарных уравнений газовой динамики на интервале  $[0,1]$ . В расчетах использовалась монотонная разностная схема второго порядка классической и первого слабой точности. Монотонизация схемы осуществлялась на основе реконструкции предраспадных величин с использованием  $L$ -функций [36] в *интерполяционных полиномах Ньютона*.

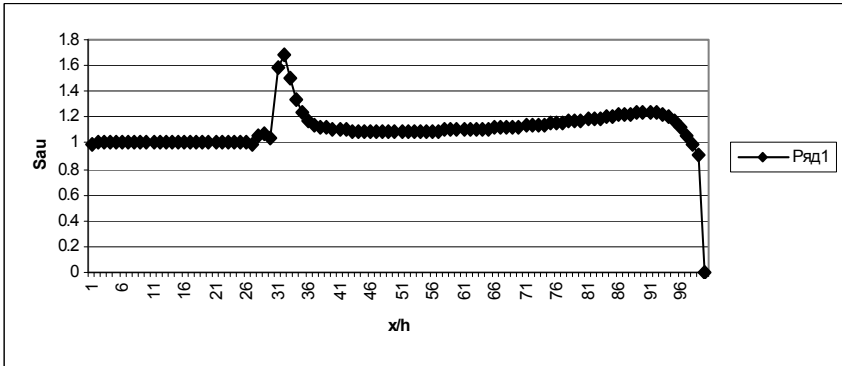


Рис. 7 – Распределение порядка слабой сходимости.

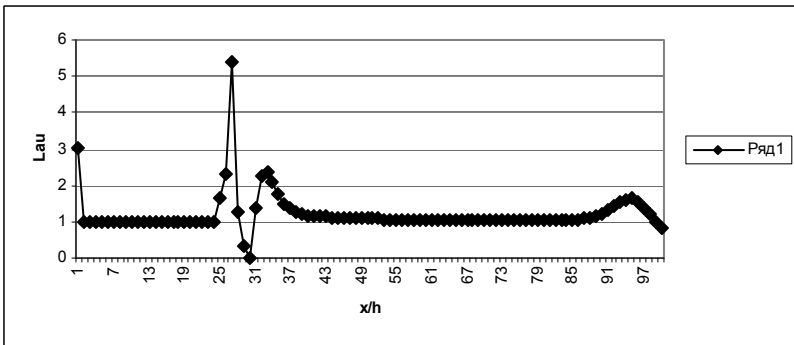


Рис. 8 – Распределение порядка локальной (классической) сходимости.

Анализируемое распределение газодинамических параметров в некоторый момент времени представлено на рис.9 в виде распространяющейся по неоднородному фону ударной волны. Распределения порядков локальной и слабой сходимости для давления, плотности и скорости газа приведены на рис.10 – рис.15. Видно, что порядок слабой сходимости сохраняется в окрестности разрыва и за ним, а порядок классической сходимости не определяется за разрывом.

Аппроксимация «мягкого» граничного условия порождает погрешность первого порядка и нерегулярное поведение порядка локальной сходимости на концах интервала.

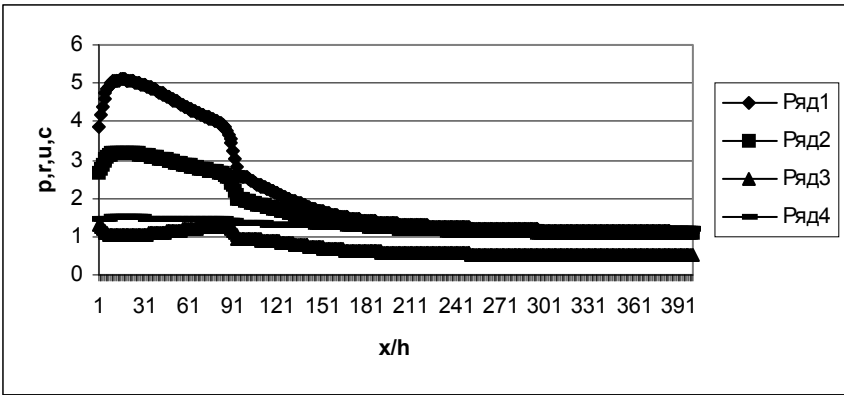


Рис. 9 – Анализируемое распределение газодинамических параметров.

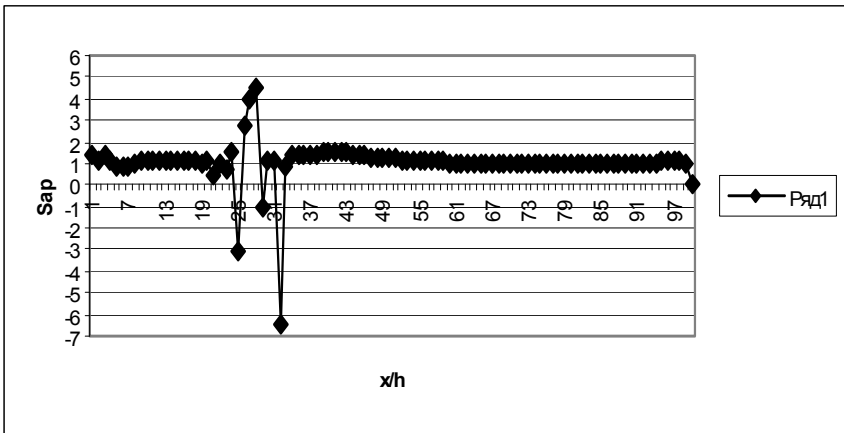


Рис. 10 – Распределение порядка слабой сходимости для давления.



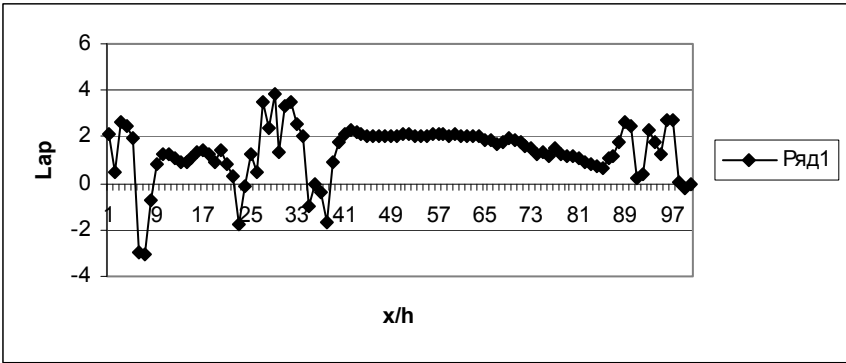


Рис. 11 – Распределение порядка локальной сходимости для давления.

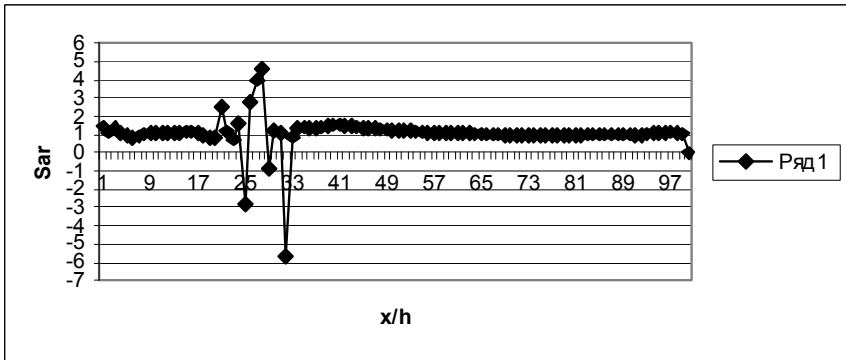


Рис. 12 – Распределение порядка слабой сходимости для плотности.

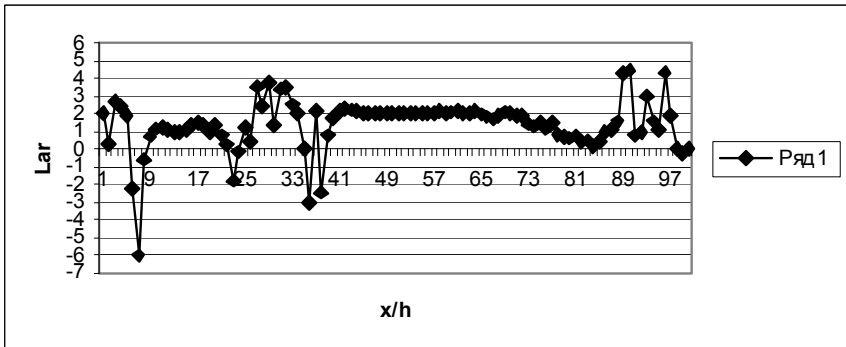


Рис. 13 – Распределение порядка классической сходимости для плотности.

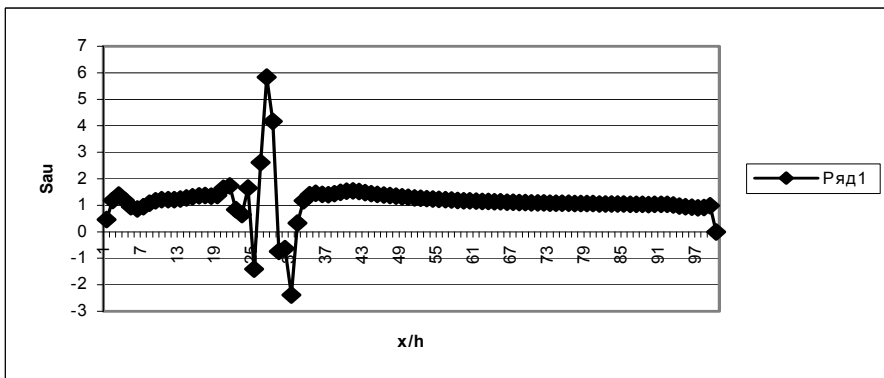


Рис. 14 – Распределение порядка слабой сходимости для скорости.

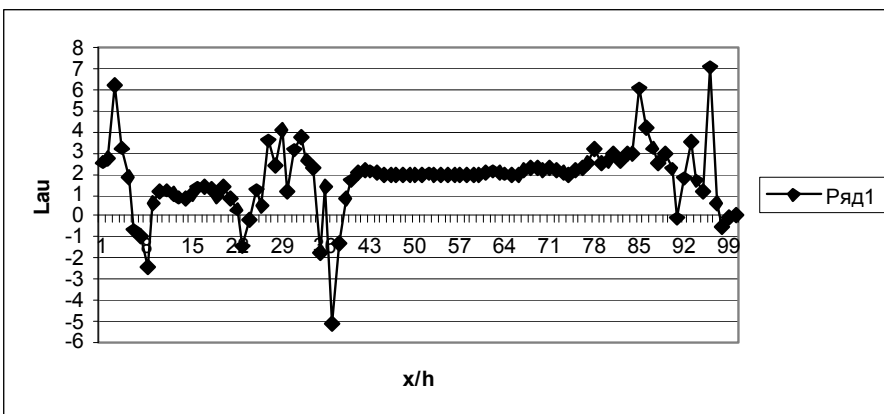


Рис. 15 – Распределение порядка классической сходимости для скорости.

**Выводы.** Интегральное представление разностной схемы, следуя аналогии дифференциального представления для гладких решений, занимает промежуточное по информативности положение между исходной интегральной математической моделью процесса и ее разностной схемой, аппроксимирующей слабо. Использование свойств интегрального представления и интегральных приближений разностных схем на негладких решениях разностного уравнения позволит более полно исследовать разрывные решения.

**Список литературы:** 1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. – 1959. – Т.47(89), – №3. – С.271 – 306. 2. Lax P., Wendroff B. Systems of conservation laws// *Communs Pure and Appl. Math.* – 1960. – V.13. – P.217 – 237. 3. Lax P. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves // Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math. – 1972. 4. Harten A., Hyman J.M., Lax P.D. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks// *Communs Pure and Appl. Math.* – 1976. – V.20. –

P.297 – 322. **5. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит. – 2003. – 416с. **6. Русанов В.В., Безменов И.В., Нажесткина Э.И.** Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений // Численное моделирование в аэрогидродинамике. – М.:Наука. – 1986. – С.174 – 186. **7. Остапенко В.В.** Об аппроксимации законов сохранения разностными схемами сквозного счета // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – Т.30, №9. – С.1405 – 1417. **8. Остапенко В.В.** О повышении порядка слабой аппроксимации законов сохранения на разрывных решениях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1996. – Т.36, №10. – С. 146 – 157. **9. Остапенко В.В.** О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2000. – Т.40, №12. – С. 1857 – 1874. **10. Толстых А.И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.:Наука. – 1990. – 230 с. **11. Лунаевских М.В., Толстых А.И.** О сравнительной эффективности схем с нецентрированными компактными аппроксимациями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1999. – Т.39, №10. – С. 1705 – 1720. **12. Hirsh R.** Higher order accurate difference solution of a fluid mechanics problems by a compact differencing technique// J.Comput.Phys. – 1975. – V.19, N1. – P.90 – 109. **13. Ciment M., Leventhal S.H., Weinberg B.C.** The operator compact implicit method for parabolic equation// J.Comput.Phys. – 1978. – V.28, N2. – P.135 – 166. **14. Berger A.E., Solomon J.M., Ciment M. et al.** Generalized OCI schemes for boundary layer problems // Math.Comput. – 1980. – V.35, N6. – P.695 – 731. **15. Evans L.C.** Partial differential equation/ Grad.Stud.Math.-1980ence, Rhode Island: Amer.Math.Soc. – 1998. – 19 p. **16. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.** Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. – 1987. – V.71. – P.231 – 303. **17. Гильманов А.Н.** Метод адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.:Физматкнига, – 2001. – 230с. **18. Harten A., Zwas G.** Switched numerical Shuman filters for shock calculations // J.Eng.Math. – 1972. – V.6, N2. – P.207 – 216. **19. Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** Построение асимптотики разностного решения на основе неклассических дифференциальных приближений // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 2005. – Т.45, №1. – С. 88 – 109. **20. Борисова Н.М., Остапенко В.В.** О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 2006. – Т.46, №7. – С. 1322 – 1344. **21. Пинчуков В.И.** Трех – и четырехшаговые неявные абсолютно устойчивые схемы Рунге-Кутты четвертого порядка // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 2006. – Т.46, № 1. – С.116 – 130.**22. Bernardo Cockburn, Chi-Wang Shu** Nonlinear stable compact schemes for shock calculations// SIAM J.Numer. Analys. – 1994. – V.31, N3. – P.607 – 632. **23. Adams N.A., Shariff K.** A high resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problem // J.Comput.Phys. – 1996. – V.127. – P.27 – 54. **24. Шокин Ю.И.** Метод дифференциального приближения. М.:Наука. – 1979. – 224с. **25. Остапенко В.В.** О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – Т.37, №10. – С. 1201 – 1212. **26. Пинчуков В.И., Ч.-В. Шу.** Численные методы высоких порядков для задач аэрогидромеханики. Новосибирск: Изд-во СО РАН.-2000.-232с. **27. Choi H., Liu J.-G.** The reconstruction of upwind fluxes for conservation laws: its behavior in dynamic and steady state calculation // J. Comput. Phys.–1998. – V.144, N2. – P.237 – 256. **28. Anderson W.K., Thomas J.L., van B.Leer** Comparison of finite volume flux vector splitting for Euler equations // AIAA Journal. – 1986. – V.24, N9. – P.1453 – 1460. **29. Ворожцов Е.В.** Построение разностных схем для гиперболических законов сохранения с помощью разложений Лагранжа-Бюрмана // Труды Междунар. конф. по вычислит. математике. – Новосибирск. – 2004. – С.443 – 448. **30. Мусеев Н.Я., Силантьева И.Ю.** Разностные схемы произвольного порядка аппроксимации для решения линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами с антидиффузией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, №7. – С.1282 – 1293. **31. Мусеев Н.Я., Силантьева И.Ю.** Разностные схемы повышенной точности для решения уравнений газовой динамики методом Годунова с антидиффузией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, №5. – С.857 – 873. **32. Макотра О.А., Мусеев Н.Я., Силантьева И.Ю., Топчий Т.В., Фролова Н.Л.** Симметричные разностные схемы покомпонентного расщепления и эквивалентные им схемы предиктор-корректор для решения многомерных задач газовой динамики методом Годунова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, №11. – С.1970 – 1987. **33. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.** Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes // J.

Comput. Phys. – 1987. – V.71. – P. 231 – 303. **34.** *Ванин В.А.* Структура общего решения одного функционального уравнения теории разностных схем для краевых задач аэрогидродинамики // Крайові задачі для диференціальних рівнянь Київ, Зб. наук. праць Ін-ту матем. НАНУ. – 1998. – вип.1(17). – С. 44 – 49. **35.** *Ванин В.А.* Монотонизация разностных схем повышенного порядка аппроксимации // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. трудов Ин-та математики НАНУ, Киев. – 1999. – С. 59 – 63. **36.** *Ванин В.А.* Монотонизация разностных схем газовой динамики. Полиномиальный поход // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. трудов НАУ «ХАИ». Вып. 33(2), 2003. – С.102 – 108. **37.** *Ванин В.А.* Применение L-функций в задачах построения разностных схем газовой динамики // Вісник НТУ «ХПІ». – 2004.–Вип.44. – С. 165 – 172. **38.** *Остапенко В.В.* Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, №7. – С. 1019 – 1038. **39.** *Latter R.* Similarity solution for a spherical shock wave // J.Appl. Phys., 1955. – 26, N8. – P. 954 – 960.

*Поступила в редколлегию 14.10.2013*

---

УДК 517.85

**Метод интегрального представления и его применение для построения и исследования разностных схем со слабой аппроксимацией высокого порядка / В. А. Ванин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 15 – 50. Бібліогр.: 39 назв.**

Пропонуються алгоритми побудови різницевих схем слабо апроксимуючі з підвищеним порядком нелінійні закони збереження. Їх основою є інтегральне представлення різницевих схем і відповідні їм інтегральні наближення різних порядків.

**Ключові слова:** різницева схема, порядок схеми, слабка апроксимація, інтегральні уявлення, закони збереження.

Algorithms for the construction of difference schemes approximating weakly with higher order nonlinear conservation laws. Their basis is the integral representation of difference schemes and the corresponding integral approximations of various orders.

**Key words:** difference scheme, the order of the scheme, the weak approximation, integral representations, conservation laws.

УДК 621. 822

*А.В. ГАЙДАМАКА*, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

### **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ МЕЖДУ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ ОДНОРЯДНОГО РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА: УЧЁТ УГЛОВ КОНТАКТА И РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА**

Уточнено распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора. Получены выражения для радиальных и касательных сил на дорожках качения колес.

**Ключевые слова:** подшипник, тела качения, нагрузка, угол контакта, радиальный зазор.

---

© А. В. Гайдамака, 2013