Д.С., Шантир С.В. Дворівневий структурний аналіз вібродіагностичних сигналів // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – №1. С. 171 – 175. **8.** *Мигущенко Р.П., Валуйская О.Ю.* Методика идентификации процессов рабочей зоны ДГУ // Системы обработки информации. 2003. – Вып. 3. С.75 – 80. **9.** *Дж. Бендат, Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 610 с.

Надійшла до редколегії 05.10.2013

УДК 519.254

Оцінка стаціонарності вібраційних процесів паливної системи дизельних двигунів / Р. П. Мигущенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 155 – 162. Бібліогр.: 9 назв.

Рассмотрены вопросы оценки стационарности вибрационных сигналов, полученных с трубки топливного насоса высокого давления. Проверка на стационарность производилась с помощью медианного критерия, критерия восходящих и нисходящих серий, критерия инверсий. Результаты оценки могут быть использованы для разработки алгоритмов диагностики топливной системы дизельных двигателей.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, дизельный двигатель, топливная аппаратура, вибрационный сигнал.

The questions of estimation of stationarity of oscillation signals, got from the tube of petrolift high pressure are considered in the article. Checking for a stationarity was produced by a median criterion, criterion of ascending and descending series, criterion of inversions. Can be drawn on the results of estimation for development of algorithms of diagnostics of the fuel system of diesel engines.

Key words: non-destructive testing, diesel engine, fuel injection equipment, vibrating alarm.

УДК 17.27

Т.А. НЕМЧЕНКО, асист., НТУ «ХПІ»

НЕОДНОРІДНЕ РІВНЯННЯ $Aw' + f(z) = w$ І ЙОГО ГОЛОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Запропоновано елементарне доведення існування і єдиності розв'язку рівняння $Aw' + f(z) = w$ у випадку, коли $f(z)$ голоморфна в околі нуля, а оператор A задовольняє умові І. В. Тихонова $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} = 0$. Вивчені деякі загальні властивості голоморфних розв'язків цього рівняння.

Ключові слова: голоморфний розв'язок, лінійний оператор, квазінільпотентний оператор, нільпотентний оператор, поліном, степеневий ряд, банахів простір, експоненціальний тип.

Вступ. Задача Коші на півосі для лінійного рівняння з операторним коефіцієнтом при похідній

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t) \tag{1}$$

відіграє важливу роль у теорії диференціальних рівнянь і була докладно вивчена в роботі *А. Г. Руткаса* (див. [1]).

І. В. Тихонов у 2004 році знайшов просту достатню умову єдиності розв'язку рівняння (1) (див. [2, теорема 5]).

У публікації [3] було досліджено однорідне рівняння

$$Aw' = w, \tag{2}$$

як окремий випадок рівняння (1), й наведено приклад, який показує, що умова І. В. Тихонова не є необхідною для єдиності голоморфного розв'язку рівняння (2), але є істотною.

Продовжуючи публікацію [3], ми вивчимо питання про існування голоморфного розв'язку неоднорідного рівняння

$$Aw' + f(z) = w, \tag{3}$$

де A – обмежений оператор у банаховому просторі, рівняння розглядається в комплексній області, $f(z)$ – голоморфна в околі нуля вектор-функція. Під розв'язком рівняння будемо розуміти вектор-функцію комплексної змінної $w = w(z)$, яка є голоморфною в околі нуля й задовольняє в цьому околі рівнянню (3).

Випадок, коли $f(z)$ – поліном або формальний степеневий ряд. Нехай E – банахів простір і $A: E \to E$ – обмежений лінійний оператор. Будемо розглядати диференціальне рівняння (3) у двох алгебраїчних ситуаціях: а) $f(z)$ є поліномом, б) $f(z)$ є формальним степеневим рядом.

Теорема 1.1. *Нехай $A: E \to E$ – довільний лінійний обмежений оператор і $f(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n z^n$ – поліном степеня p з коефіцієнтами із $E\left(f_n \in E\right)$. Тоді рівняння $Aw' + f(z) = w$ має єдиний розв'язок у вигляді поліному $w(z) = \sum_{n=0}^{p} w_n z^n$.*

Доведення. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді поліному степеня p

$$w(z) = \sum_{n=0}^{p} w_n z^n, \text{ де } w_n \in E.$$

Тоді $w'(z) = \sum_{n=1}^{p} n w_n z^{n-1}$ і $Aw'(z) = \sum_{n=1}^{p} A n w_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{p-1} \left(n+1\right) A w_{n+1} z^n$.

Підставляючи ці вирази в рівняння $Aw' + f(z) = w$, одержуємо:

$$\sum_{n=0}^{p-1}(n+1)Aw_{n+1}z^n+\sum_{n=0}^{p}f_nz^n=\sum_{n=0}^{p}w_nz^n.$$

Розглянемо відповідні коефіцієнти при z^n :

$n=p: w_p=f_p;$

$n=p-1: pAw_p+f_{p-1}=w_{p-1}, w_{p-1}=f_{p-1}+pAf_p;$

$n=p-2: (p-1)Aw_{p-1}+f_{p-2}=w_{p-2}, w_{p-2}=f_{p-2}+(p-1)Af_{p-1}+p(p-1)A^2f_p;$

$n=p-3: (p-2)Aw_{p-2}+f_{p-3}=w_{p-3},$

$$w_{p-3}=\frac{1}{(p-3)!}\Big((p-3)!f_{p-3}+(p-2)!Af_{p-2}+(p-1)!A^2f_{p-1}+p!A^3f_p\Big);$$

…

$\mathrm{n}=\mathrm{k}: w_{p-k}=\dfrac{1}{(p-k)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}(p-k+j)!\mathrm{A}^j f_{p-k+j}$, де $\mathrm{k}=0,\ldots,p.$

Поклавши $p-k=n$ і $k=p-n$, знаходимо в явному вигляді коефіцієнти w_n :

$$w_n=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{p-n}(n+j)!A^jf_{n+j}=\begin{vmatrix}n+j=s\\ j=s-n\end{vmatrix}=\frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{p}s!A^{s-n}f_s.$$

Теорема доведена.

Теорема 1.2. *Нехай $A:E\to E$ – обмежений нільпотентний оператор, тобто $A^m=0$ для деякого $m\in\mathbb{N}$, і $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nz^n$ – формальний степеневий ряд з коефіцієнтами із $E\ (f_n\in E)$. Тоді рівняння $Aw'+f(z)=w$ має єдиний формальний розв'язок (тобто розв'язок у просторі формальних степеневих рядів) $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n$, причому $w_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{s=n}^{n+m-1}s!A^{s-n}f_s$.*

Доведення. Перевіримо, що $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n$, де $w_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{s=n}^{n+m-1}s!A^{s-n}f_s$, дійсно задовольняє рівняння. Отже,

$$w'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nw_nz^{n-1}\ \text{ і }\ Aw'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nAw_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)Aw_{n+1}z^n.$$

Підставимо ці вирази в рівняння $Aw'+f(z)=w$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)Aw_{n+1}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}f_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}w_nz^n,$$

звідси $(n+1)Aw_{n+1}+f_n=w_n$.

Покажемо, що послідовність $w_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=n}^{n+m-1} s!\, A^{s-n} f_s$ задовольняє останнє співвідношення:

$$(n+1)\, A w_{n+1} + f_n = (n+1)\, A \frac{1}{(n+1)!} \sum_{s=n+1}^{n+m} s!\, A^{s-(n+1)} f_s + f_n =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{s=n+1}^{n+m} s!\, A^{s-n} f_s + f_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=n}^{n+m-1} s!\, A^{s-n} f_s = w_n.$$

Таким чином, ми довели існування розв'язку.

Єдиність доводиться за допомогою очевидних міркувань (див. [3, теорема 2.1]).

Випадок, коли $f(z)$ голоморфна в деякому околі нуля. У цьому пункті ми розглянемо основну аналітичну ситуацію, коли $f(z)$ голоморфна в деякому околі нуля (зокрема, є цілою функцією).

Теорема 2.1. *Нехай $A: E \to E$ – обмежений лінійний оператор, причому $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} = 0$, і $f(z)$ – голоморфна функція в деякому околі нуля. Тоді рівняння $Aw' + f(z) = w$ має єдиний голоморфний розв'язок, який визначений в тому ж околі нуля, що й $f(z)$.*

Доведення. Нехай $f(z)$ голоморфна в крузі $|z| < R$ і $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $|z| < R.$ Покажемо, що розв'язок рівняння можна знайти у вигляді, аналогічному до отриманого в теоремі 1.1:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \text{ де } w_n = \frac{1}{n!} \sum_{s=n}^{\infty} s!\, A^{s-n} f_s.$$

Розглянемо радіус $r < R.$ Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ збігається абсолютно в крузі $|z| \le r,$ тому $\exists M > 0: \left\|f_n z^n\right\| \le M, |z| \le r,$ тобто $\left\|f_n\right\| \le \frac{M}{|z|^n}, n = 0,1,2,\ldots.$

Доведемо, що коефіцієнти w_n визначені коректно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ збігається в крузі $|z| < R$ і задовольняє рівняння. Оскільки $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} = 0,$ то це означає, що $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N: \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} < \varepsilon.$

Звідси

$$n!\left\|A^n\right\| < \varepsilon^n \text{ і } \left\|A^n\right\| < \frac{\varepsilon^n}{n!}, \text{ причому можна вважати, що } \varepsilon < r.$$

Оцінимо ряд із норм, що відповідає ряду для w_n:

$$\frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\left\|A^{s-n}\right\|\left\|f_s\right\| \le \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\left\|A^{s-n}\right\|\frac{M}{|z|^s} \le \frac{M}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\frac{\varepsilon^{s-n}}{(s-n)!}\frac{1}{|z|^s} = \left| s-n=k \right| =$$

$$= \frac{M}{n!|z|^n}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k)!\frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{1}{|z|^k} = \frac{M}{n!|z|^n}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n)\frac{\varepsilon^k}{|z|^k}.$$

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+n}$. Тоді

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+n)(k+n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)x^k.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n)x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+n}\right)^{(n)} = \left(x^n\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} =$$

$$= \left(\frac{x^n-1+1}{1-x}\right)^{(n)} = \left(\frac{x^n-1}{1-x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Покладемо $x := \varepsilon/|z|$, отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n)\frac{\varepsilon^k}{|z|^k} = \frac{n!}{\left(1-\varepsilon/|z|\right)^{n+1}}, \quad \frac{\varepsilon}{|z|} < 1.$$

Таким чином,

$$\frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\left\|A^{s-n}\right\|\left\|f_s\right\| \le \frac{M}{n!|z|^n}\frac{n!}{\left(1-\varepsilon/|z|\right)^{n+1}} = \frac{M|z|}{\left(|z|-\varepsilon\right)^{n+1}}, \quad n > N.$$

При умові $|z| = r$ отримуємо:

$$\frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\left\|A^{s-n}\right\|\left\|f_s\right\| \le \frac{Mr}{(r-\varepsilon)^{n+1}}, \quad n > N.$$

Отже, коефіцієнти w_n визначені коректно, починаючи з $n = N+1$. Покладемо тепер

$$w_N = (N+1)Aw_{N+1} + f_N,\ w_{N-1} = NAw_N + f_{N-1}, \ldots, w_0 = Aw_1 + f_0.$$

Тоді

$$w_N = (N+1)A\frac{1}{(N+1)!}\sum_{s=N+1}^{\infty} s!A^{s-(N+1)}f_s + f_N = \frac{1}{N!}\sum_{s=N+1}^{\infty} s!A^{s-N}f_s + f_N =$$

$$=\frac{1}{N!}\sum_{s=N}^{\infty} s!A^{s-N} f_s, \ldots, w_0 = A\sum_{s=1}^{\infty} s!A^{s-1} f_s + f_0 = \sum_{s=1}^{\infty} s!A^s f_s + f_0 = \sum_{s=0}^{\infty} s!A^s f_s.$$

Ми отримуємо, що коефіцієнти w_n визначені рівністю

$$w_n = \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!A^{s-n} f_s \text{ для всіх } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тепер оцінимо радіус збіжності R_0 ряду $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$:

$$\frac{1}{R_0} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|w_n\|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{Mr}}{(r-\varepsilon)\sqrt[n]{r-\varepsilon}} = \frac{1}{r-\varepsilon} < +\infty,$$

отже, $R_0 > 0.$ Крім цього, так як $r \in (0, R)$ і $\varepsilon \in (0, r)$ довільні, то $R_0 \ge R.$

Таким чином, ми показали, що ряд $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ збіжний в крузі $|z| < R.$ Тепер міркування, проведені при доведенні теореми 1.2, показують, що коефіцієнти w_n і f_n пов'язані співвідношенням:

$$(n+1)Aw_{n+1} + f_n = w_n$$

і, значить, $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ задовольняє рівнянню $Aw' + f(z) = w.$

І в цьому випадку єдиність розв'язку доводиться за допомогою очевидних міркувань (див. [3, теорема 3.1]).

Коли $f(z)$ голоморфна у всій площині, тобто є цілою функцією, твердження теореми 2.1 можна посилити.

Теорема 2.2. *Нехай $A: E \to E$ – обмежений лінійний оператор, причому послідовність $\left\{\sqrt[n]{n!\|A^n\|}\right\}$ обмежена, і $f(z)$ – ціла функція. Тоді рівняння $Aw' + f(z) = w$ має єдиний цілий розв'язок*

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \text{ де } w_n = \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!A^{s-n} f_s.$$

Доведення. Послідовність $\left\{\sqrt[n]{n!\|A^n\|}\right\}$ обмежена, тобто

$$\exists M > 0: \sqrt[n]{n!\|A^n\|} \le M,$$

звідси $\|A^n\| \le \frac{M^n}{n!}, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$

За умовою теореми $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ – ціла функція, тобто ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ збіжний у всій площині, тому $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f_n\|}=0.$ Таким чином,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \ \forall n>N:\ \sqrt[n]{\|f_n\|}<\varepsilon,\ \text{звідки}\ \|f_n\|<\varepsilon^n.$$

Повторюючи міркування, проведені при доведенні теореми 2.1, можна показати, що коефіцієнти $w_n=\dfrac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\,A^{s-n} f_s,\ n=0,1,2,\ldots,$ коректно визначені і

$$\|w_n\|\le \frac{1}{n!}\varepsilon^n \frac{n!}{\left(1-M\varepsilon\right)^{n+1}}=\frac{\varepsilon^n}{\left(1-M\varepsilon\right)^{n+1}},\ \ n>N$$

(ми вважаємо, що $\varepsilon<1/M$).

Тепер оцінимо радіус збіжності нашого розв'язку:

$$\frac{1}{R_{розв}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|w_n\|}\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\varepsilon}{\left(1-M\varepsilon\right)\sqrt[n]{1-M\varepsilon}}=\frac{\varepsilon}{1-M\varepsilon},$$

тобто $R_{розв}\ge\dfrac{1-M\varepsilon}{\varepsilon}.$ Спрямовуючи ε до нуля, отримуємо, що $R_{розв}=+\infty.$

Єдиність розв'язку доводиться за допомогою очевидних міркувань (див. [3, теорема 2.5]).

Випадок, коли $f(z)$ – ціла функція експоненціального типу. У цьому пункті теорема 2.2 уточнюється до наступного твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $A:E\to E$ – обмежений лінійний квазінільпотентний оператор і $f(z)$ – ціла функція експоненціального типу. Тоді рівняння $Aw'+f(z)=w$ має єдиний цілий розв'язок експоненціального типу, причому його експоненціальний тип не перевищує типу функції $f(z)$.*

Доведення. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}=0,$ то це означає, що

$$\forall \varepsilon_1>0\ \exists N_1\ \ \forall n>N_1:\ \sqrt[n]{\|A^n\|}<\varepsilon_1,$$

тобто $\|A^n\|<\varepsilon_1^n$, n $>N_{1.}$

Нехай $f(z)$ – ціла функція експоненціального типу $\sigma.$ Тоді

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \ \exists N_2 \ \ \forall n > N_2 : \sqrt[n]{n!\|f_n\|} < \sigma + \varepsilon_2 ,$$

тобто $\|f_n\| < \dfrac{(\sigma+\varepsilon_2)^n}{n!}$, n $> N_2$.

Так само, як у теоремі 2.1, покажемо, що коефіцієнти w_n можна визначити рівністю $w_n = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{s=n}^{\infty} s!\,A^{s-n} f_s$, і оцінимо $\|w_n\|$.

Отже, для $n > \max\{N_1, N_2\}$ маємо:

$$\|w_n\| \le \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\|A^{s-n}\|\|f_s\| \le \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\,\varepsilon_1^{s-n}\frac{(\sigma+\varepsilon_2)^s}{s!} = \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty}\varepsilon_1^{s-n}(\sigma+\varepsilon_2)^s =$$

$$= |\,s-n=k\,| = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_1^{k}(\sigma+\varepsilon_2)^{n+k} = \frac{(\sigma+\varepsilon_2)^n}{\text{n!}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_1^{k}(\sigma+\varepsilon_2)^{k} = \frac{(\sigma+\varepsilon_2)^n}{\text{n!}}\times$$

$$\times\frac{1}{1-\varepsilon_1(\sigma+\varepsilon_2)}$$

(оскільки можна вважати, що $\varepsilon_1 < 1/(\sigma+\varepsilon_2)$). Це означає, що w_n визначені при

$$n > \max\{N_1, N_2\} \ \text{ і } \ \|w_n\| \le \frac{1}{\text{n!}}\cdot\frac{(\sigma+\varepsilon_2)^n}{1-\varepsilon_1(\sigma+\varepsilon_2)}.$$

При $n \le \max\{N_1, N_2\}$ коефіцієнти w_n можна визначити за допомогою рекурентного співвідношення $w_n = (n+1)Aw_{n+1} + f_n$ (див. доведення теореми 2.1). Із оцінки для $\|w_n\|$ при $n > \max\{N_1, N_2\}$ випливає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|w_n\|z^n$ збіжний для всіх z. Таким чином, $R_{розв} = +\infty$ і $w(z)$ – ціла функція.

Покажемо тепер, що її експоненціальний тип не перевищує σ :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\|w_n\|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\frac{1}{n!}\frac{(\sigma+\varepsilon_2)^n}{1-\varepsilon_1(\sigma+\varepsilon_2)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sigma+\varepsilon_2}{\sqrt[n]{1-\varepsilon_1(\sigma+\varepsilon_2)}} = \sigma+\varepsilon_2$$

для всіх $\varepsilon_2 > 0.$ Тому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\|w_n\|} \le \sigma,$ тобто експоненціальний тип розв'язку не перевищує $\sigma.$

Єдиність розв'язку доводиться за допомогою очевидних міркувань (див. [3, теорема 2.1]).

Теорема 3.2. *Нехай* $A: E \to E$ *– обмежений лінійний оператор і* $f(z)$ –

ціла функція нульового експоненціального типу. Тоді рівняння $Aw' + f(z) = w$ *має єдиний цілий розв'язок нульового експоненціального типу.*

Доведення. За умовою $f(z)$ – ціла функція нульового експоненціального типу, тобто $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\|f_n\|} = 0,$ а значить,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N: \ \sqrt[n]{n!\|f_n\|} < \varepsilon,$$

звідки $\|f_n\| < \dfrac{\varepsilon^n}{n!}.$

Так само, як і при доведенні теореми 2.1, оцінимо суму:

$$\frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\left\|A^{s-n}\right\|\|f_s\| \le \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!\|A\|^{s-n}\frac{\varepsilon^s}{s!} = \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty}\|A\|^{s-n}\varepsilon^s = \left|\, s-n=k \,\right| =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k\varepsilon^{n+k} = \frac{\varepsilon^n}{\text{n!}}\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k\varepsilon^k = \frac{\varepsilon^n}{\text{n!}}\frac{1}{1-\varepsilon\|A\|}$$

(оскільки можна вважати, що $\varepsilon < 1/\|A\|$).

Тепер міркування, наведені при доведенні теореми 2.1, показують, що розв'язок рівняння $Aw' + f(z) = w$ можна шукати у вигляді $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n,$ де

$$w_n = \frac{1}{n!}\sum_{s=n}^{\infty} s!A^{s-n}f_s \ \text{ і } \ \|w_n\| \le \frac{1}{\text{n!}}\cdot\frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon\|A\|}, \ \ n > N.$$

Знайдемо радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$:

$$\frac{1}{R_{розв}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|w_n\|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\varepsilon}{\sqrt[n]{n!}\cdot\sqrt[n]{1-\varepsilon\|A\|}} = 0.$$

Таким чином, $R_{розв} = +\infty,$ тобто $w(z)$ – ціла функція.

Покажемо, що її експоненціальний тип дорівнює нулю, тобто $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\|w_n\|} = 0$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\|w_n\|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\frac{1}{n!}\frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon^n\|A\|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\varepsilon}{\sqrt[n]{1-\varepsilon^n\|A\|}} = \varepsilon, \ \ \varepsilon < \frac{1}{\|A\|}.$$

Тому $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\|w_n\|} = 0.$

Єдиність розв'язку доводиться за допомогою очевидних міркувань (див. [3, теорема 1.2]).

Висновки. Основним результатом цієї роботи є елементарне доведення існування і єдиності розв'язку рівняння (3) у випадку, коли $f(z)$ голоморфна в околі нуля, а оператор A задовольняє умові І.В. Тихонова $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}=0$ (див. теорему 2.1). Якщо $f(z)$ – ціла функція, то цей результат уточнюється в теоремах 2.2, 3.1 і 3.2.

Відмітимо, що при доведенні існування розв'язку рівняння (3) було використано ідею з §2 глави VI книги Ю. Л. Далецького і М. Г. Крейна (див. [4]), де розглядалось рівняння $dx/dz = Ax + f(z)$ з обмеженим оборотним оператором A.

Список літератури: **1.** *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. // Дифференциальные уравнения, 1975. – Т. 11, – № 11, – С. 1996-2010. **2.** *Тихонов И. В.* Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения. Функциональный анализ и его приложения, 2004, т.38, вып. 2, с. 65-70. **3.** *Немченко Т. А.* Деякі властивості голоморфних розв'язків рівняння $Aw'=w$ // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 105 – 118. **4.** *Далецкий Ю. А., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

Надійшла до редколегії 17.09.2013

УДК 17.27

Неоднорідне рівняння $Aw'+f(z)=w$ **і його голоморфні розв'язки / Т. А. Немченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 162 – 171. Бібліогр.: 4 назви.

Предложено элементарное доказательство существования и единственности решения уравнения $Aw'+f(z)=w$ в случае, когда $f(z)$ голоморфна в окрестности нуля, а оператор A удовлетворяет условию И. В. Тихонова $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}=0$. Изучены некоторые общие свойства голоморфных решений этого уравнения.

Ключевые слова: голоморфное решение, линейный оператор, квазинильпотентный оператор, нильпотентный оператор, полином, степенной ряд, банахово пространство, экспоненциальный тип.

Proposed elementary proof of the existence and uniqueness of solutions of the equation $Aw'+f(z)=w$ in the case where $f(z)$ is holomorphic in a neighborhood of zero, and the operator A satisfies I.V. Tikhonov $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}=0$. In this work the study of some general properties of holomorphic solutions of this equation.

Key words: holomorphic solution, the linear operator, quasinilpotent operator, nilpotent operator, polynomial, power series, Banach space, the exponential type.