

Comput. Phys. – 1987. – V.71. – P. 231 – 303. **34.** *Ванин В.А.* Структура общего решения одного функционального уравнения теории разностных схем для краевых задач аэрогидродинамики // Крайові задачі для диференціальних рівнянь Київ, Зб. наук. праць Ін-ту матем. НАНУ. – 1998. – вип.1(17). – С. 44 – 49. **35.** *Ванин В.А.* Монотонизация разностных схем повышенного порядка аппроксимации // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. трудов Ин-та математики НАНУ, Киев. – 1999. – С. 59 – 63. **36.** *Ванин В.А.* Монотонизация разностных схем газовой динамики. Полиномиальный поход // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. трудов НАУ «ХАИ». Вып. 33(2), 2003. – С.102 – 108. **37.** *Ванин В.А.* Применение L-функций в задачах построения разностных схем газовой динамики // Вісник НТУ «ХПІ». – 2004.–Вип.44. – С. 165 – 172. **38.** *Остапенко В.В.* Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, №7. – С. 1019 – 1038. **39.** *Latter R.* Similarity solution for a spherical shock wave // J.Appl. Phys., 1955. – 26, N8. – P. 954 – 960.

*Поступила в редколлегию 14.10.2013*

---

УДК 517.85

**Метод интегрального представления и его применение для построения и исследования разностных схем со слабой аппроксимацией высокого порядка / В. А. Ванин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 15 – 50. Бібліогр.: 39 назв.**

Пропонуються алгоритми побудови різницевих схем слабо апроксимуючі з підвищеним порядком нелінійні закони збереження. Їх основою є інтегральне представлення різницевих схем і відповідні їм інтегральні наближення різних порядків.

**Ключові слова:** різницева схема, порядок схеми, слабка апроксимація, інтегральні уявлення, закони збереження.

Algorithms for the construction of difference schemes approximating weakly with higher order nonlinear conservation laws. Their basis is the integral representation of difference schemes and the corresponding integral approximations of various orders.

**Key words:** difference scheme, the order of the scheme, the weak approximation, integral representations, conservation laws.

УДК 621. 822

*А.В. ГАЙДАМАКА*, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

### **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ МЕЖДУ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ ОДНОРЯДНОГО РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА: УЧЁТ УГЛОВ КОНТАКТА И РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА**

Уточнено распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора. Получены выражения для радиальных и касательных сил на дорожках качения колес.

**Ключевые слова:** подшипник, тела качения, нагрузка, угол контакта, радиальный зазор.

---

© А. В. Гайдамака, 2013

**Введение.** В статье [1] о распределении радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта выявлены касательные силы на дорожках качения колец, которые затормаживают движение одних роликов и ускоряют движение других в зоне радиального нагружения. Уточнение распределения радиальной нагрузки между телами качения подшипника с учётом влияния конструктивных параметров, например, радиального зазора, является развитием указанной работы.

**Анализ известных исследований.** Исследования влияния радиального зазора  $g$  на распределение радиальной нагрузки  $F_r$ , действующей на подшипник, между телами качения приведены в публикациях [2 – 5].

В работе [2] из условия равновесия внутреннего кольца получена формула для силы на наиболее нагруженный (центральный) шар:

$$F_0 = \frac{F_r}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \left[ \cos i\gamma + \frac{g}{\mu} (\cos i\gamma - 1) \right]^{3/2} \cos i\gamma}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – коэффициент, зависящий от механических свойств и геометрических параметров, контактирующих тел;  $\gamma$  – угол между соседними телами качения.

Несмотря на сложность расчёта  $\mu$  погрешность вычислений условия равновесия внутреннего кольца по формулам работы [2] не превышает 2%.

В работе [3] сила, действующая на наиболее нагруженный (центральный) шар, определяется формулой

$$F_0 = \frac{\pi(1-k)^t}{\lambda} \cdot \frac{F_r}{z}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – значение табулированной функции, зависящее от радиального зазора, расположения тела качения, типа подшипника;  $k = g/\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  – уменьшение диаметра центрального (наиболее нагруженного) тела качения за счет контактных деформаций с кольцами;  $t$  – постоянная (для шарикоподшипников  $t=1,5$ ; для роликоподшипников  $t=1$ );  $z$  – количество тел качения в подшипнике.

Зависимость расчетов распределения радиальной нагрузки между телами качения в работе [3] от табличных данных для вспомогательных функций и параметров затрудняет получение достоверных результатов и снижает их точность. Погрешность вычислений условия равновесия внутреннего кольца с использованием формул работы [3] достигает 7%.

Сила, действующая на наиболее нагруженный (центральный) шар подшипника, полученная в работе [4], определяется равенством

$$F_0 = \delta_0^{3/2} \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \cos \gamma_i}{C^{3/2} [1 + b(1 + n_0)^{3/2}]}, \quad (3)$$

где  $b, C$  – константы, зависящие от механических свойств материалов деталей и их геометрических параметров;  $n_0$  – отношение центробежной силы, действующей на шар, к силе взаимодействия шара с наружным кольцом;  $\omega_i$  – значение функции, зависящее от углового положения шара, радиального зазора шарикоподшипника, контактной деформации, центробежной силы, механических свойств материалов деталей, геометрических параметров деталей.

Сложный вид формулы для функции  $\omega_i$  обуславливает решение уравнения (3) методом итерации. По оценке авторов работы [4] второе приближение дает погрешность вычислений до 10 %, а третье – до 4 %. Для практических расчетов рекомендуется ограничиваться вторым приближением.

Условие равновесия внутреннего кольца шарикоподшипника с радиальным зазором, полученное в работе [5], имеет вид:

$$F_r = F_0 + 2C_1 \sum_{i=1}^n [2g \left( \frac{\cos \gamma_i}{\cos \gamma_i^*} - 1 \right)]^{3/2} \cos \gamma_i, \quad (4)$$

где  $\gamma^*$  – угловое положение последнего шара зоны нагружения подшипника.

Решение нелинейного уравнения (4) относительно  $\gamma^*$  осуществляется итерационным методом. Несмотря на сложность процедуры вычислений, предложенная в [5] методика обеспечивает достаточно низкую погрешность (до 0,5%) вычислений при проверке условия равновесия внутреннего кольца.

Современные справочники [6 – 8] рекомендуют определять силу  $F_r$  на тело качения подшипника, находящееся в положении  $\gamma_i$  по отношению к линии действия радиальной нагрузки  $F_r$ , по формуле:

$$F_i = F_0 [1 - 1/2\varepsilon(1 - \cos \gamma_i)]^n, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – табулированный параметр, позволяющий найти угол зоны нагружения  $\psi$  подшипника,  $\psi = \arccos(1 - 2\varepsilon)$ ;  $n$  – постоянная величина ( $n = 1,5$  при точечном контакте,  $n = 1,11$  при линейном контакте).

Сила  $F_0$  на наиболее нагруженное тело качения для однорядных радиальных шарико- и роликоподшипников с нормальными радиальными зазорами, согласно [6 – 8], определяется так:

$$F_0 = \frac{5F_r}{z}. \quad (6)$$

Расчеты распределения радиальной нагрузки  $F_r$  между телами качения по формуле (5) не дают возможности оценить влияние величины радиального

зазора на размер зоны радиального нагружения, а также изменение сил  $F_i$  в зависимости от зазора. Погрешность вычислений условия равновесия внутреннего кольца с использованием формул (5) и (6) достигает 10 %.

Общий недостаток работ [2 – 8] состоит в том, что решение задачи о распределении радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника в зависимости от радиального зазора не учитывает различное положение центров внутреннего и наружного колец. Это не позволяет провести более глубокие исследования особенностей взаимодействия деталей подшипника в зоне его радиального нагружения.

На основании вышеизложенного, задача по уточнению распределения радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора является актуальной.

**Постановка задачи.** Задача по уточнению распределения радиальной нагрузки  $F_r$  между телами качения идеального однорядного радиального подшипника состоит в построении геометрических уравнений связи радиального сближения колец  $\delta_0$  в окрестности центрального тела качения и радиальных сближений колец  $\delta_r$  в окрестности остальных тел качения зоны  $\psi$  радиального нагружения подшипника при упругом контактном деформировании с учётом различного положения центров колец и радиального зазора  $g$ .

**Математическая модель.** При решении задачи о распределении радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника приняты следующие допущения:

- детали подшипника имеют идеальную геометрическую форму;
- внутреннее и наружное кольца не изгибаются;
- перекосы колец и повороты роликов не учитываются;
- радиальные сближения наружного и внутреннего колец с телами качения за счёт контактной деформации одинаковы на заданном радиальном направлении;
- динамические эффекты, обусловленные вращением внутреннего кольца при неподвижном наружном, не влияют на работу подшипника.

Начальный радиальный зазор  $g$  радиального подшипника определяется в радиальном направлении и вычисляется по формуле (6):

$$2g = d_n - d_g - 2d_T, \quad (7)$$

где  $d_n$  – диаметр дорожки качения наружного кольца;  $d_g$  – диаметр дорожки качения внутреннего кольца;  $d_T$  – диаметр тела качения.

С появлением контактных деформаций деталей подшипника под действием радиальной нагрузки сближение в произвольном радиальном направле-

нии наружного и внутреннего колец с учётом различного положения их центров и радиального зазора может быть определено, согласно рис.1:

$$[0,5d_n - (0,5d_T - 0,5\delta_{\gamma_i})]^2 = [0,5d_e + (0,5d_T - 0,5\delta_{\gamma_i})]^2 + (\delta_0 + g)^2 + 2(\delta_0 + g)[0,5d_e + (0,5d_T - 0,5\delta_{\gamma_i})]\cos\gamma'_i. \quad (8)$$

После преобразования выражения (8), выполненного без учёта малых высшего порядка по сравнению с  $\delta_0$  и  $g$ , получим:

$$\delta_{\gamma_i} = \delta_0 \cos\gamma'_i + g(\cos\gamma'_i - 1). \quad (9)$$

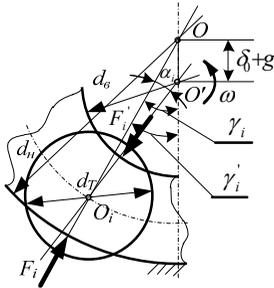


Рис. 1 – Модель сближения колец в произвольном радиальном направлении с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора.

Угол зоны нагружения  $\psi$  подшипника определяется из выражения (9) при условии  $\delta_{\gamma} = 0$ , когда  $\gamma'_i = \psi$ :

$$\psi = \arccos \frac{g}{g + \delta_0}. \quad (10)$$

С учётом физических уравнений связи сближений  $\delta_{\gamma}$  шариков с кольцами и сил  $F_i$ , действующих на шарике [9], а также выражения (9) получим:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= C_u \cdot F_0^{2/3}; \\ \delta_1 &= \delta_0 \cos\gamma'_1 + g(\cos\gamma'_1 - 1) = C_u \cdot F_1^{2/3}; \\ &\dots\dots\dots; \\ \delta_n &= \delta_0 \cos\gamma'_n + g(\cos\gamma'_n - 1) = C_u \cdot F_n^{2/3}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C_u$  – постоянная, зависящая от материалов и геометрии деталей [9].

Отношение левых и правых частей выражений (11) даёт связь  $F_0$  и  $F_i$ :

$$\begin{aligned} \delta_0 / \delta_1 &= \delta_0 / (\delta_0 \cdot \cos\gamma'_1 + g(\cos\gamma'_1 - 1)) = (F_0 / F_1)^{2/3}; \\ &\dots\dots\dots; \\ \delta_0 / \delta_n &= \delta_0 / (\delta_0 \cdot \cos\gamma'_n + g(\cos\gamma'_n - 1)) = (F_0 / F_n)^{2/3}, \end{aligned} \quad (12)$$

откуда

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 \left( \cos\gamma'_1 + \frac{g}{\delta_0} (\cos\gamma'_1 - 1) \right)^{3/2}; \\ &\dots\dots\dots; \\ F_n &= F_0 \left( \cos\gamma'_n + \frac{g}{\delta_0} (\cos\gamma'_n - 1) \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием радиальной нагрузки  $F_r$  и сил  $F_{\gamma_i}$ ,

$$F_r = F_0 + 2F_1 \cdot \cos \gamma'_1 + \dots + 2F_n \cos \gamma'_n,$$

можно определить силу на наиболее нагруженный шар:

$$F_0 = F_r / (1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos \gamma'_i (\cos \gamma'_i + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_i - 1)))^{3/2}. \quad (14)$$

При  $g = 0$  имеем выражение для силы, действующей на наиболее нагруженное тело качения идеального шарикопоподшипника.

Распределение нагрузки  $F_r$  между роликами получено с учётом физических уравнений связи сближений  $\delta_\gamma$  роликов с кольцами и сил  $F_i$ , действующих на ролики [9], а также выражения (9), и имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= C_{p0} \cdot F_0; \\ \delta_1 &= \delta_0 \cos \gamma'_1 + g(\cos \gamma'_1 - 1) = C_{p1} \cdot F_1; \\ &\dots\dots\dots; \\ \delta_n &= \delta_0 \cos \gamma'_n + g(\cos \gamma'_n - 1) = C_{pn} \cdot F_n, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C_{pi}$  – переменная, зависящая от сил  $F_i$ , а также от материалов и геометрии деталей [9],

$$C_{pi} = \frac{0,579}{l \cdot E} \left[ \ln \frac{1,727l \cdot E \cdot (R_1 + R_2)}{F_i} + 0,814 \right].$$

Отношение левых и правых частей выражений (15) даёт связь  $F_0$  и  $F_i$ :

$$\begin{aligned} \delta_0 / \delta_1 &= \delta_0 / (\delta_0 \cdot \cos \gamma'_1 + g(\cos \gamma'_1 - 1)) = C_{p01} (F_0 / F_1); \\ &\dots\dots\dots; \\ \delta_0 / \delta_n &= \delta_0 / (\delta_0 \cdot \cos \gamma'_n + g(\cos \gamma'_n - 1)) = C_{p0n} (F_0 / F_n), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $C_{p01} = C_{p0} / C_{p1}$ , ...,  $C_{p0n} = C_{p0} / C_{pn}$ ; откуда

$$\begin{aligned} F_1 &= C_{p01} \cdot F_0 (\cos \gamma'_1 + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_1 - 1)); \\ &\dots\dots\dots; \\ F_n &= C_{p0n} \cdot F_0 (\cos \gamma'_n + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_n - 1)). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием сил  $F_r$  и  $F_i$ ,

$$F_r = F_0 + 2F_1 \cdot \cos \gamma'_1 + \dots + 2F_n \cos \gamma'_n,$$

можно определить силу на наиболее нагруженный ролик:

$$F_0 = F_r / (1 + 2 \sum_{i=1}^n C_{p0i} \cdot \cos \gamma'_i (\cos \gamma'_i + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_i - 1))). \quad (18)$$

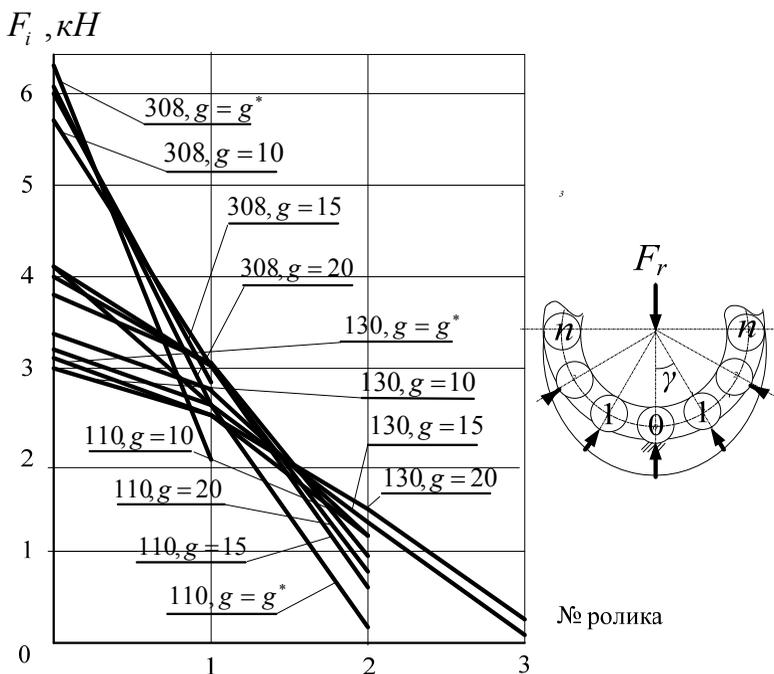


Рис. 2 – Зависимости радиальных сил  $F_i$ , действующих на шарики, от их положения в подшипнике и типа подшипника.

**Конкретный результат моделирования.** Сравнение предлагаемой методики расчёта распределения радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника и методики справочников [6 – 9] проведено на примере расчёта распределения радиальной нагрузки  $F_r = 10$  кН между телами качения для шарикоподшипников типоразмеров 308, 110, 130 (рис. 2).

Результаты расчёта показывают, что:

- известная методика не позволяют в явном виде оценить влияние величины радиального зазора на радиальные силы;
- радиальные силы на центральные шары, рассчитанные по предлагаемой методике, могут быть как больше, так и меньше соответствующих сил, рассчитанных по известной методике;
- радиальные силы, действующие на шары по границе зоны радиального нагружения подшипника, вычисленные по предлагаемой методике, существенно больше (до 6,5 раз) соответствующих сил, рассчитанных по известной методике.

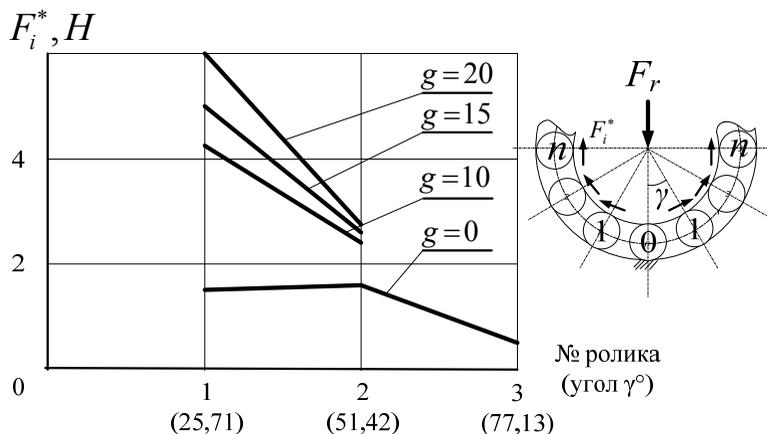


Рис. 3 – Зависимости касательных сил  $F_i^*$  в контакте от углового положения роликов (для подшипника с 14-ю роликами).

Выражение для касательных сил  $F_i^*$  по дорожкам качения колец с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора имеет вид:

$$F_i^* = F_i \sin \left\{ \arccos \frac{0,25[d_n - (d_T - \delta_{\gamma i})]^2 + 0,25[d_e + (d_T - \delta_{\gamma i})]^2 - (g + \delta_0)^2}{0,5[d_n - (d_T - \delta_{\gamma i})][d_e + (d_T - \delta_{\gamma i})]} \right\}. \quad (19)$$

Результаты исследования влияния величины радиального зазора на касательные силы  $F_i^*$  в контакте роликов с беговыми дорожками колец цилиндрического роликоподшипника типа 2726, находящегося под радиальной нагрузкой  $F_r = 50$  кН, приведено в виде графиков на рис. 3 и рис. 4.

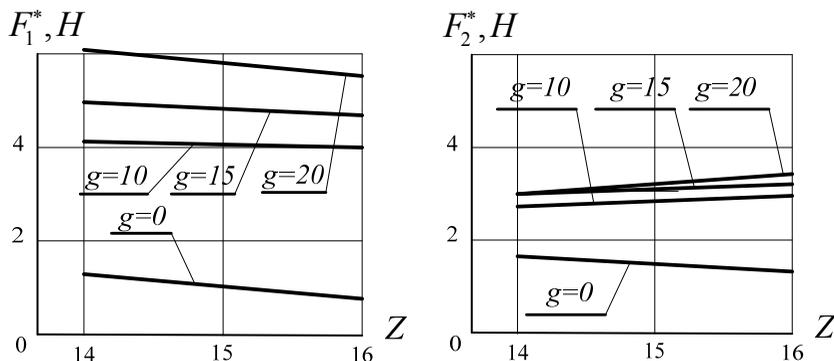


Рис. 4 – Зависимости касательных сил  $F_1^*$  и  $F_2^*$  от числа роликов в подшипнике.

Анализ приведенных зависимостей показывает, что:

- по мере приближения к границам зоны радиального нагружения подшипника касательные силы в контакте роликов с дорожками качения колец уменьшаются;
- с увеличением радиального зазора в подшипнике касательные силы в контакте роликов с дорожками качения колец возрастают;
- увеличение количества роликов в подшипнике способствует снижению касательных сил в контакте у роликов, расположенных ближе к середине зоны радиального нагружения подшипника, и повышению касательных сил для роликов, находящихся по краям зоны радиального нагружения.

**Перспективы дальнейших исследований.** Автор предполагает продолжить исследования по уточнению распределения радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения и радиального зазора, а также деформации наружного кольца при абсолютно жёстком внутреннем.

**Выводы.** Предложенная методика расчёта распределения радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора позволяет исследовать особенности взаимодействия тел качения с поверхностями трения колец.

Увеличение радиального зазора в подшипнике способствует росту касательных сил в контакте роликов с дорожками качения колец.

**Список литературы:** 1. *Гайдамака А. В.* Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта. // Вісник НТУ «ХПИ». – Х.: – 2013. – С. 26 – 34. 2. *Игнатъев Г.А.* Распределение нагрузки по элементам радиального подшипника. // Подшипник. – 1938. – №4. – С. 3 – 7. 3. *Цыпкин Б.В.* Метод расчёта подшипников качения с учётом влияния радиального зазора. // Вестник машиностроения. – 1951. – №5. – С. 15 – 28. 4. *Саверский А.С., Каневский Б.А.* Распределение нагрузки по телам качения в радиальном шарикоподшипнике с учётом радиального зазора и центробежных сил. // Труды ВНИПП. – 1970. – №4. – С. 81 – 91. 5. *Кузьменко А.Г., Криворотенко В.М.* Распределение нагрузки между шариками в радиальном подшипнике качения. // Проблемы трибологии. – 2010. – №1. – С. 29 – 41. 6. *Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я.* Подшипники качения: Справочник. – М.: Машиностроение, 1975. – 572 с. 7. *Перель Л.Я.* Подшипники качения: Расчёт, проектирование и обслуживание опор: Справочник. – М.: Машиностроение, 1983. – 543 с. 8. Подшипниковые узлы современных машин и приборов: Энциклопедический справочник. // *В.Б. Носов, И.М. Карпухин, Н.Н. Федотов, и др.*; Под общ. ред. *В.Б. Носова*. – М.: Машиностроение, 1997. – 640 с. 9. *Макушин В.М.* Деформация и напряжённое состояние деталей в местах контакта. – М.: ГНТИ, 1952. – 62 с.

*Поступила в редколлегию 28.08.2013*

---

УДК 621.822

**Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта и радиального зазора / А. В. Гайдамака // Вісник НТУ**

«ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 50 – 59. Бібліогр.: 9 назв.

Уточнено розподіл радіального навантаження між тілами кочення ідеального однорядного радіального підшипника з урахуванням кутів контакту тіл кочення з кільцями та радіального зазору. Встановлено, що в підшипнику зі збільшеним радіальним зазором підвищуються дотичні сили на доріжках кочення кілець.

**Ключові слова:** підшипник, тіла кочення, навантаження, кут контакту, радіальний зазор.

Clarified the distribution of the radial load between the rolling elements of the ideal single-row radial bearing with account for the contact angle contact between the rolling elements with rings and radial clearance. It is established that in the bearing with an increased radial clearance increased shear forces on the raceways of the rings.

**Key words:** bearing rolling elements, load, contact angle, radial clearance.

УДК 519

**Є.П. ГОМОЗОВ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

**К.М. КУЛАГІНА**, магістр прикладної математики, НТУ «ХПІ»

## **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ КРЕДИТНОГО РИЗИКУ**

Розглянуто задачу аналізу методів оцінки кредитного ризику та знаходження оптимальної методики управління кредитним ризиком.

**Ключові слова:** кредитний ризик, математична модель, оптимізація, кредитний портфель.

**Вступ.** Найскладнішим і найбільш важко прогнозованим з фінансових ризиків банку є кредитний. Його складність пояснюється великою кількістю факторів, що чинять вплив на його формування.

Треба зазначити, що банківська система держави, як і інші сфери економічної діяльності України, перебувають в умовах, які суттєво відрізняються від умов у переважній більшості розвинутих країн своєю складністю. Це зумовлено дією різноманітних факторів: затяжною економічною кризою, незавершеністю нормативно-правової бази, відсутністю стабільних господарських зв'язків, що в свою чергу лише покращує підґрунтя для загострення ризиків. Правильна організація процесу банківського кредитування, розробка ефективної та гнучкої системи управління кредитними операціями є основою фінансової стабільності й ринкової стійкості комерційних банків.

З метою забезпечення організації ефективної кредитної діяльності комерційні банки розробляють власну внутрішню кредитну політику та впроваджують практичні механізми її реалізації. [1, 2, 3].

Кредитна політика створює основу організації банківського кредитуван-