

Ю.А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

ДВОЧАСТОТНА КВАТЕРНІОННА ЕТАЛОННА МОДЕЛЬ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА КОНІЧНОГО ТИПУ

Запропонована аналітична еталонна модель обертання твердого тіла на основі мультиплікативного представлення кватерніона орієнтації. Побудовані траєкторії в конфігураційному просторі, які різняться по вигляду від траєкторій для моделей конічного руху і регулярної прецесії.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати.

Вступ і постановка задачі. В безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) відтворення цифрового образу інерціального триєдра осей відбувається в автономному обчислювачі за допомогою алгоритмів визначення параметрів орієнтації, які відіграють роль *аналітичної платформи* [1]. Для коректного оцінювання похибок цих алгоритмів на етапі проектування системи зазвичай використовують еталонні моделі обертання твердого тіла, які дозволяють представити в належному вигляді первинну інформацію про обертання рухомого об'єкта, що знімається з гіроскопів, та отримати відповідні еталонні значення кватерніона орієнтації (або інших параметрів) на такті обчислень.

Вибір еталонної моделі обертання і її параметрів зрештою залежить від специфіки основної технічної задачі, що покладена на рухомий об'єкт, і повинен враховувати всі можливі режими обертання об'єкта. Кількість існуючих аналітичних еталонних моделей обертання твердого тіла достатньо обмежена. Найбільше поширення в теперішній час отримали еталонні *моделі конічного руху* [2, 3] та *регулярної прецесії* [4, 5], які засновані на існуючих точних розв'язках в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла. В цих умовах розширення класу аналітичних неперервних моделей обертання, в тому числі на основі узагальнення існуючих моделей, є актуальною задачею.

Двочастотна аналітична еталонна модель обертання твердого тіла. Задамо кватерніон орієнтації у вигляді мультиплікативної моделі:

$$\Lambda(t) = \Lambda_1(t) \circ \Lambda_2(t). \quad (1)$$

Представимо кватерніони $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ в правій частині (1) неперервними функціями часу:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= \cos(\varphi_1(t)/2) + \vec{b}_1 \sin(\varphi_1(t)/2), \\ \Lambda_2(t) &= \cos(\varphi_2(t)/2) + \vec{b}_2 \sin(\varphi_2(t)/2), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – опорні функції; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – постійні вектори одиничної довжини, $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$. З урахуванням (2) отримаємо з (1), що

$$\begin{aligned} \Lambda(t) = & \cos(\varphi_1(t)/2)\cos(\varphi_2(t)/2) - \vec{b}_1 \sin(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2) + \\ & + \vec{b}_2 \cos(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2) - (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)\sin(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2) + \\ & + (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\sin(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2). \end{aligned} \quad (3)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$, що відповідає кватерніону орієнтації (3), згідно з оберненим кінематичним рівнянням має вигляд:

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}_1(t)(\vec{b}_1 \cos \varphi_2(t) + (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\sin \varphi_2(t) + \vec{b}_2(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)(1 - \cos \varphi_2(t))) + \dot{\varphi}_2(t)\vec{b}_2. \quad (4)$$

Кінематична опорна модель у вигляді (3), (4) запропонована в [6] для розв'язання задач гіросилового управління орієнтацією космічного апарату і названа там *конічною*, бо в умовах $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$, $\dot{\varphi}_1 = const$, $\dot{\varphi}_2 = const$ вектор модельної кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ має постійну довжину $|\vec{\omega}(t)| = const$ і утворює бокову поверхню конуса. Таким чином, можна вважати, що кінематична модель (3), (4) є, в цьому сенсі, узагальненням моделі конічного руху. Параметри опорних функцій $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ і вектори \vec{b}_1 , \vec{b}_2 визначаються з урахуванням умов початкової і кінцевої орієнтації та заданих початкового і кінцевого вектора кутової швидкості об'єкта.

Щоб отримати еталонну модель обертання твердого тіла на основі опорної кінематичної моделі (3), (4) у випадку, коли первинною інформацією про обертання є квазікоординати [7], доповнимо кінематичну модель виразом для вектора позірного повороту

$$\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt.$$

Для цього задамо опорні функції у вигляді

$$\varphi_i(t) = p_i t + \psi_i, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

де $p_i = const$; $\psi_i = const$, і проінтегруємо (4) з урахуванням (5). Отримаємо в результаті:

$$\begin{aligned} \vec{\theta}(t) = & p_1(\vec{b}_1(\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin \psi_2) / p_2 - (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)(\cos(p_2 t + \psi_2) - \cos \psi_2) / p_2 + \\ & + \vec{b}_2(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)(t - (\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin \psi_2) / p_2)) + \vec{b}_2 p_2 t. \end{aligned} \quad (6)$$

Квазікоординати $\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt$ ($i = 1, 2, 3$) модельного руху при цьому

визначаються аналітично згідно формули:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

де $\theta_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – компоненти вектора позірного повороту $\vec{\theta}(t)$.

Якщо належним чином задати параметри $p_1, p_2, \psi_1, \psi_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$, то отримаємо еталонну модель обертання, яка задається формулами (3), (6), (7).

Розглянемо окремо випадок *ортогональної моделі*, коли $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$. З формул (3), (6) отримуємо, що кватерніон орієнтації та вектор позірного повороту ортогональної моделі задаються формулами:

$$\Lambda(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2) \cos((p_2 t + \psi_2)/2) - \vec{b}_1 \sin((p_1 t + \psi_1)/2) \times \\ \times \sin((p_2 t + \psi_2)/2) + \vec{b}_2 \cos((p_1 t + \psi_1)/2) \sin((p_2 t + \psi_2)/2) + \\ + (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \sin((p_1 t + \psi_1)/2) \sin((p_2 t + \psi_2)/2), \quad (8)$$

$$\vec{\theta}(t) = p_1 (\vec{b}_1 (\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin \psi_2) / p_2 - (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) (\cos(p_2 t + \psi_2) - \\ - \cos \psi_2) / p_2) + \vec{b}_2 p_2 t. \quad (9)$$

Конкретизуємо формули (8), (9) для ситуації, коли вектори \vec{b}_1, \vec{b}_2 направлені по координатним осям. Якщо при цьому вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ утворюють праву трійку ортів, то будемо мати однотипні вирази для компонент кватерніона орієнтації з урахуванням відповідних перестановок індексів для компонент векторної частини кватерніона. Наприклад, при $\vec{b}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{b}_2 = (0, 1, 0)^T$ отримуємо з (8) наступне двочастотне представлення для компонент модельного кватерніона:

$$\lambda_0(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2) \cos((p_2 t + \psi_2)/2); \\ \lambda_1(t) = \sin((p_1 t + \psi_1)/2) \cos((p_2 t + \psi_2)/2); \\ \lambda_2(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2) \sin((p_2 t + \psi_2)/2); \\ \lambda_3(t) = \sin((p_1 t + \psi_1)/2) \sin((p_2 t + \psi_2)/2). \quad (10)$$

Для компонент вектора позірного повороту з (9) отримуємо, що

$$\theta_1(t) = (p_1 / p_2) (\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin \psi_2); \\ \theta_2(t) = p_2 t; \\ \theta_3(t) = -(p_1 / p_2) (\cos(p_2 t + \psi_2) - \cos \psi_2). \quad (11)$$

Якщо вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ утворюють ліву трійку ортів, будемо мати інший ряд однотипних модельних кватерніонів орієнтації, які відрізняються відповідними перестановками індексів компонент у векторній частині. Наприклад, при $\vec{b}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{b}_2 = (0, 0, 1)^T$ отримуємо модельний кватерніон з компонентами:

$$\lambda_0(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2) \cos((p_2 t + \psi_2)/2); \\ \lambda_1(t) = \sin((p_1 t + \psi_1)/2) \cos((p_2 t + \psi_2)/2); \\ \lambda_2(t) = -\sin((p_1 t + \psi_1)/2) \sin((p_2 t + \psi_2)/2); \\ \lambda_3(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2) \sin((p_2 t + \psi_2)/2). \quad (12)$$

Компоненти вектора позірного повороту при цьому задаються формулами:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= (p_1/p_2)(\sin(p_2t + \psi_2) - \sin\psi_2); \\ \theta_2(t) &= (p_1/p_2)(\cos(p_2t + \psi_2) - \cos\psi_2); \\ \theta_3(t) &= p_2t.\end{aligned}\tag{13}$$

Чисельне моделювання. Реалізуємо запропоновану двочастотну еталонну модель обертання для деяких наборів параметрів p_1 , p_2 , ψ_1 , ψ_2 , \vec{b}_1 , \vec{b}_2 . На рис. 1 показана графічна інтерпретація ортогональної моделі (10), (11), (7) при $p_1 = 0,025$, $p_2 = 0,034$, $\psi_1 = \pi/4$, $\psi_2 = \pi/3$ у вигляді побудованих траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ в конфігураційному просторі. Залежності отримані на інтервалі часу $t \in [0, 1200]$ с.

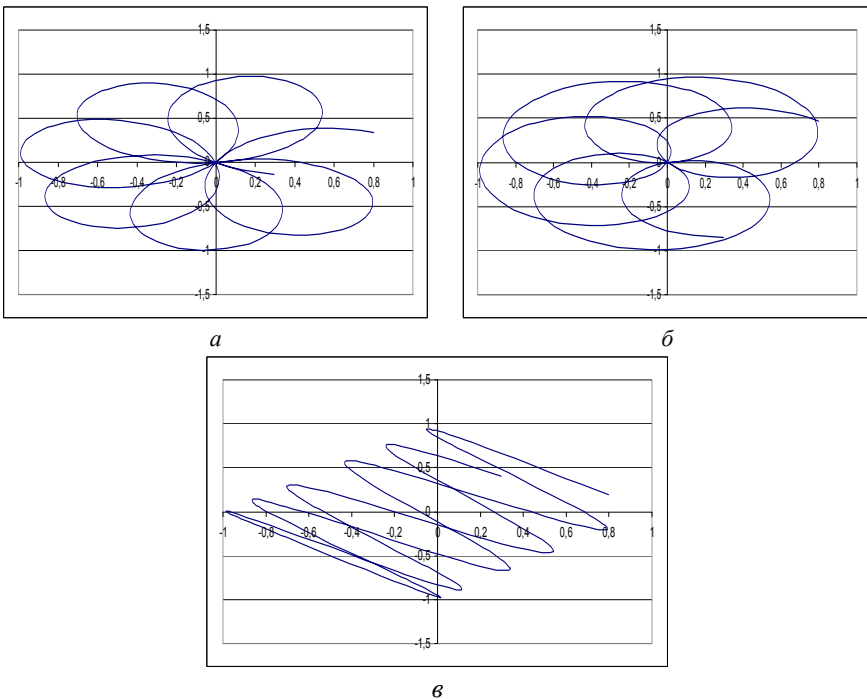


Рис. 1 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (10), (11), (7):
 а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Отримані в результаті чисельного моделювання траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для ортогональної моделі (12), (13), (7) при значеннях параметрів $p_1 = 0,045$, $p_2 = 0,0345$, $\psi_1 = \pi/3$, $\psi_2 = -\pi/4$ на інтерва-

лі часу $t \in [0, 1200]$ с представлені на рис. 2.

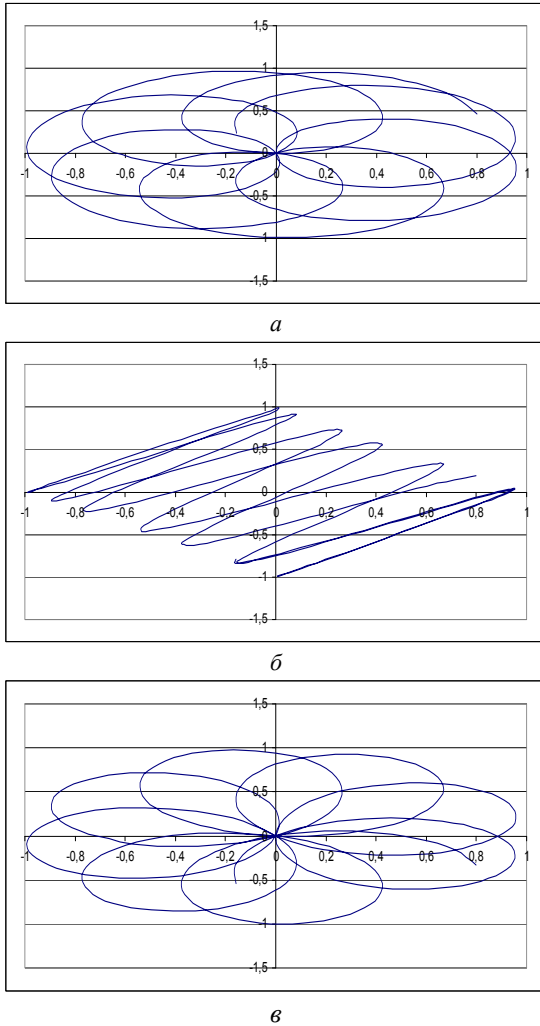


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (13), (7):
a – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Розглянемо загальний випадок неортогональної моделі. Для цієї моделі, реалізованої при значеннях параметрів

$$p_1 = 0,025, \quad p_2 = 0,034, \quad \psi_1 = \pi/2, \quad \psi_2 = \pi/4, \quad \vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T,$$

$$\vec{b}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$$

на інтервалі часу $t \in [0, 1200]$ с, траєкторії $\lambda_t(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показані на рис. 3.

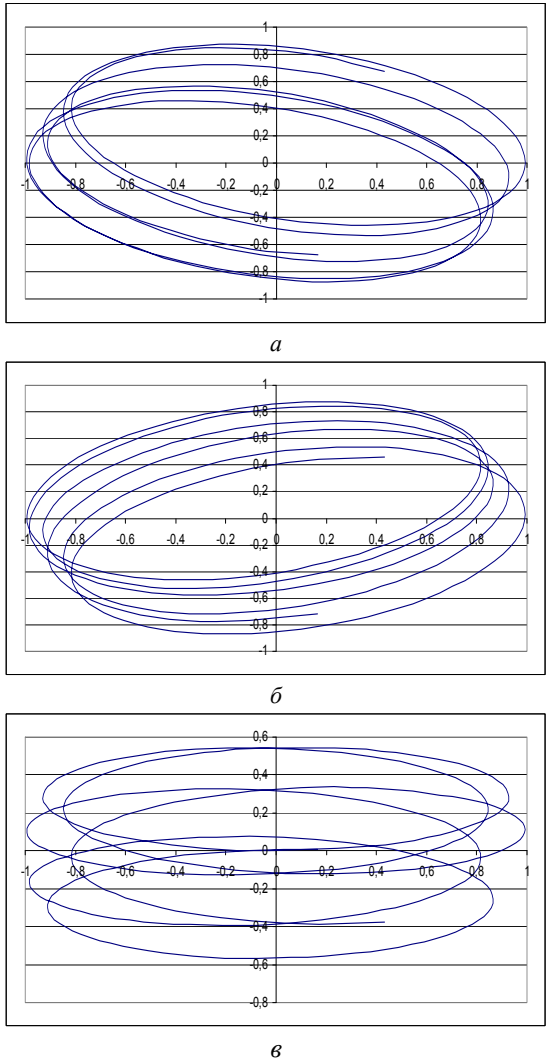


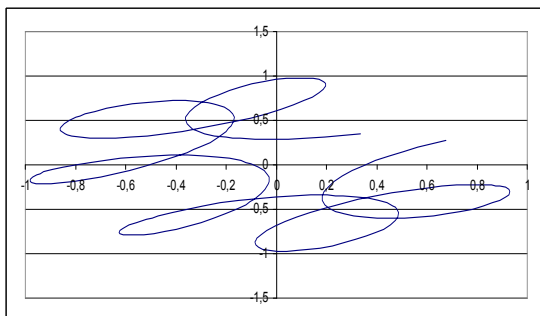
Рис. 3 – Траєкторії в конфігураційному просторі для неортогональної моделі (випадок першого набору параметрів): а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

На рис.4 представлені побудовані в конфігураційному просторі траєкторії $\lambda_t(\lambda_0)$ для неортогональної еталонної моделі (3), (6), (7) при значеннях параметрів

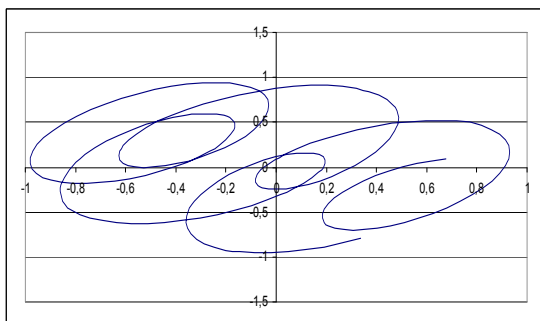
$$p_1 = 0,025, \quad p_2 = 0,034, \quad \psi_1 = \pi/2, \quad \psi_2 = \pi/3, \quad \vec{b}_1 = (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})^T,$$

$$\vec{b}_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^T$$

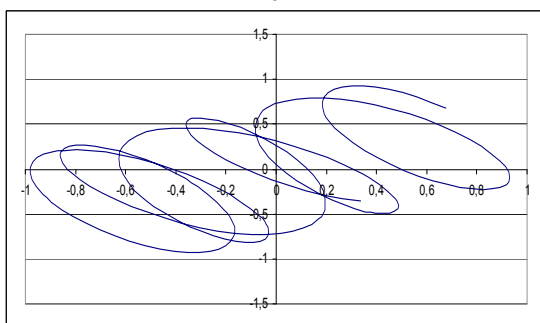
на інтервалі часу $t \in [0, 1200]$ с.



a



б



в

Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (3), (6), (7) (випадок другого набору параметрів): *a* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$;

в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Аналіз результатів моделювання. Порівняємо отримані графічні результати реалізації запропонованої двочастотної мультиплікативної моделі обертання твердого тіла з результатами реалізації деяких відомих еталонних моделей обертання твердого тіла.

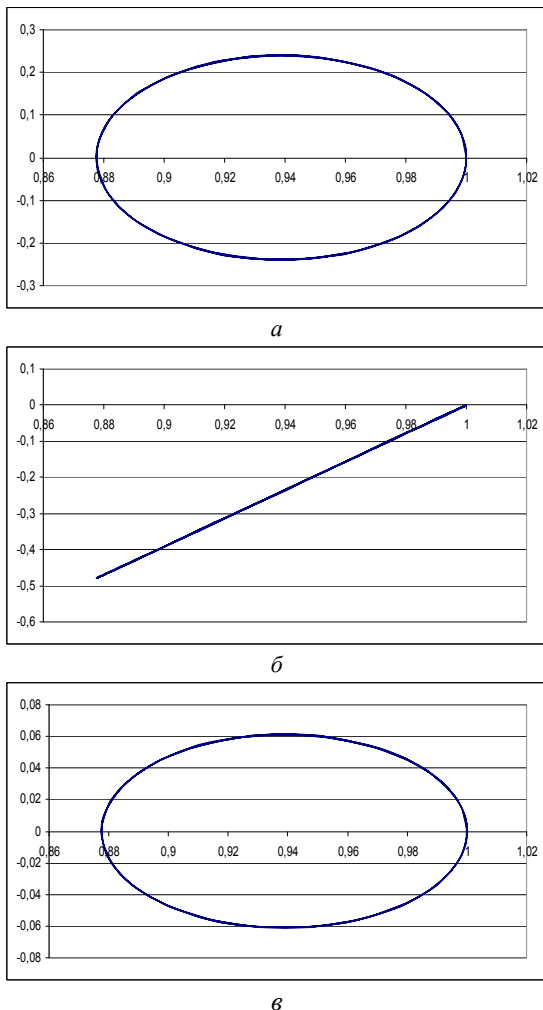
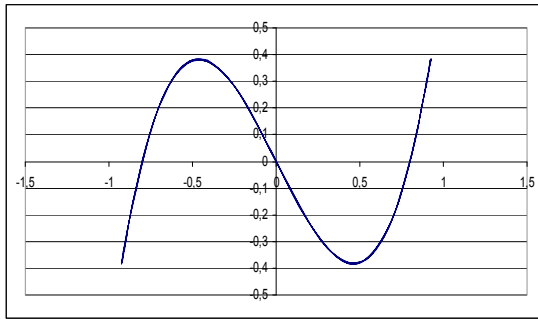


Рис. 5 – Траєкторії в конфігураційному просторі для кінчної моделі:
a – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

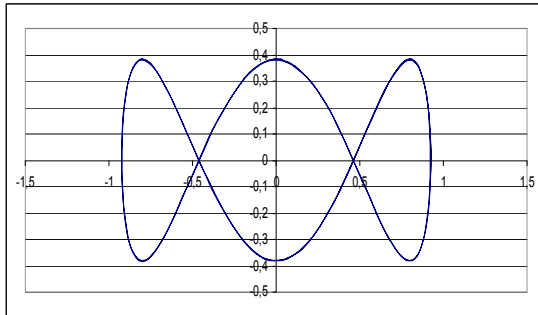
На рис. 5 зображені траєкторії в конфігураційному просторі для моделі кінчного руху, що наведена в [3], з вектором кутової швидкості

$$\vec{\omega}(t) = (\nu \sin \varphi \cos \nu t; -\nu \sin \varphi \sin \nu t; \nu(1 - \cos \varphi))^T$$

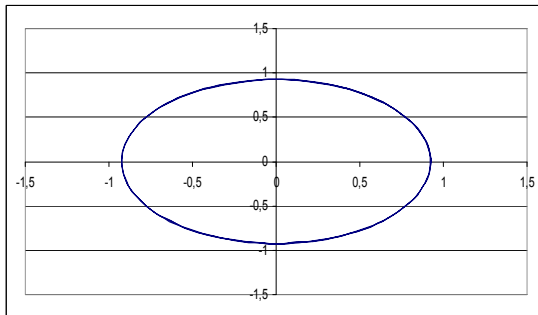
при $\nu = 0,03$, $\varphi = 0,5$. Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с.



a



б



в

Рис. 6 – Траекторії в конфігураційному просторі для моделі регулярної прецесії:
 а – траекторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траекторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траекторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

В роботі [4] приведена модель регулярної прецесії з вектором кутової швидкості

$$\vec{\omega}(t) = (\mu \sin \mathcal{G} \sin \nu t; \mu \sin \mathcal{G} \cos \nu t; \nu + \mu \cos \mathcal{G})^T.$$

Траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для цієї моделі представлені на рис. 6. Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с при значеннях параметрів $\nu = -0,02$, $\mu = 0,04$, $\mathcal{G} = \pi/4$. Відзначимо, що траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ на рис. 5 – 6 мають вигляд форм, в той час як траєкторії для двочастотної моделі (3), (6), (7) формам не відповідають.

Висновки. Запропонована аналітична двочастотна квазікоординатна еталонна модель обертання твердого тіла, що основана на мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації. В результаті побудови траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показано, що при належному виборі параметрів цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, які відрізняються від класичних випадків кінцевого руху і регулярної прецесії. Отриману еталонну модель можна застосовувати для оцінювання похибок алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

Список літератури: 1. Mortensen R.E. Strapdown Guidance Error Analysis. – IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst., 1974, vol.10, No 4, pp. 451 – 458. 2. Ткаченко А.И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 3. Панов А.П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Механика гироскоп. систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112. 4. Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С. 47 – 52. 5. Плаксий Ю.А. Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2. – 1992, вып. 11. – С.79 – 83. 6. Успенский В.Б. Теоретические основы гиросилового управления ориентацией космического летательного аппарата/ В.Б.Успенский. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 328 с. 7. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию безплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с.

Bibliography (transliterated): 1. Mortensen, R. E. "Strapdown Guidance Error Analysis." *IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst.* Vol. 10. No. 4. 1974. 451–458. Print. 2. Tkachenko, A. I. "O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmah opredelenija orientacii ob'ekta." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 5. Kiev, 1970. 20–22. Print. 3. Panov, A. P. "Optimizacija metodov vychislenija kvaternionov pri konicheskikh kolebanijah tverdogo tela." *Mehanika giroskop. sistem.* No. 3. Kiev, 1984. 105–112. Print. 4. Panov, A. P. "Adaptivnye precessionnye algoritmy vychislenija kvaternionov vrashhenija tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 77. Kiev, 1988. 47–52. Print. 5. Plaksiy, Yu. A. "Analiticheskie ocenki tochnosti algoritmov opredelenija orientacii v kvaternionah dlja sluchaja regul'arnoj precessii ob'ekta." *Vestnik Har'k. politehn. in-ta.* Vol. 2. No. 11. Kharkov, 1992. 79–83. Print. 6. Uspenskij, V. B. *Teoreticheskie osnovy girusilovogo upravlenija orientaciej kosmicheskogo letatel'nogo apparata.* Kharkov: NTU «HPI», 2006. Print. 7. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem.* Moscow: Nauka, 1992. Print.

Надійшла (received) 03.03.2014