

В.Н. ТКАЧЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОЛЕСА ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Напряжения от изгиба колеса волновой передачи генератором волн можно определить решением задачи об изгибе кольца. Для выяснения влияния длины колеса на его радиальную жёсткость и на напряжения в нормальных к оси плоскостях необходимо применять теории оболочек. Проведенный сравнительный анализ различных теорий даёт предпочтение технической моментной теории оболочек, позволяющей решить поставленную задачу и получить рекомендации для выбора оптимального соотношения длины колеса к его диаметру.

Ключевые слова: волновая передача, напряжения, гибкое колесо, теория оболочек.

Введение и постановка задачи. Гибкое колесо волновой зубчатой передачи – цилиндрическая оболочка, закрученная вращающим моментом и изогнутая генератором волн упругой деформации (рис. 1). Возможное разрушение гибкого колеса начинается с возникновения трещин на торце, во впадинах между зубьями венца, где преобладают нормальные напряжения изгиба σ_θ , так как деформации кручения здесь пренебрежимо малы.

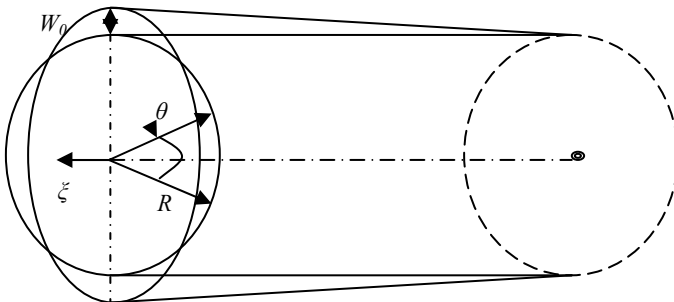


Рис. 1 – Гибкое колесо волновой зубчатой передачи.

Различные исходные теории, используемые для анализа напряженно-деформированного состояния, характеризуются теми или иными допущениями, вносящими определенные погрешности в окончательные результаты расчетов.

Целесообразно сопоставить результаты расчетов напряжений изгиба, вычисленные с использованием различных исходных теорий, с определенными экспериментально, а также оценить возможные погрешности вычисления напряжений в линейной постановке, поскольку величина деформаций гибкого колеса переводит задачу в категорию геометрически нелинейных.

Модель для оценки прочности и выносливости. Наибольший практический интерес для оценки прочности и выносливости гибкого колеса представляют напряжения от изгиба в сечениях плоскостями, содержащими и перпендикулярными оси оболочки – σ_θ и σ_ξ соответственно.

Где θ и $\xi = L/R$ – угловая и относительная осевая координаты R, L и h – радиус, длина и толщина оболочки.

Если смоделировать гибкое колесо тонким кольцом, то напряжения изгиба σ_θ можно вычислить по формуле

$$\sigma_\theta = \frac{E \cdot h}{2R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (1)$$

где w – функция радиальных перемещений от аргумента θ .

Те же напряжения по формуле Тимошенко-Рейлея из [1] определяются так:

$$\sigma_\theta = \frac{E \cdot h}{2R^2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right). \quad (2)$$

Применяя математический аппарат теории пологих оболочек [1], получим:

$$\sigma_\theta = \frac{E \cdot h}{2R^2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \quad (3)$$

ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

Результаты расчета с использованием *технической моментной теории цилиндрических оболочек* приводят к формуле

$$\sigma_\theta = \frac{E \cdot h}{2R^2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

где V – касательные перемещения.

Отсутствие осесимметричной составляющей в спектре нагрузки на гибкое колесо волновой зубчатой передачи позволяет использовать допущение о нерастяжимости срединной поверхности оболочки в окружном направлении, что эквивалентно соотношению $w = \partial V / \partial \theta$.

Предположение об отсутствии на торце колеса внешнего изгибающего момента M_ξ приводит к равенству $\partial w^2 / \partial \xi^2 = 0$.

В этом случае формулы (4) и (3) совпадают и отличаются от уравнения (1) множителем $1/(1-\nu^2)$.

Напряжения σ_θ , вычисленные с учетом вышеуказанного предположения по всем приведенным формулам, отличаются незначительно (до 5%) и хорошо подтверждаются результатами тензометрирования указанных напряжений. Использование математического аппарата технической моментной теории оболочек позволяет, в отличие от других случаев, учесть меридиональный изгибающий момент M_ξ , а это в свою очередь позволяет решить

задачу оптимизации длины гибкого колеса и задачу о совместной деформации оболочки (гибкого колеса) и круглой пластины (днища гибкого колеса).

Решение задачи оптимизации. Рассмотрим решение первой из этих двух задач.

Если обозначить $a^2 = h^2 / 12R^2$, то уравнения равновесия для элемента цилиндрической оболочки примут вид [2]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{(1-\nu^2)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} + R^2 \frac{1-\nu^2}{E \cdot h} \cdot X = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a^2 \left(2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right) V + \\ & + \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left((2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) \right) w + R \frac{1-\nu^2}{E \cdot h} Y = 0, \\ & -\nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left((2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right) \right) V + \\ & + (1+a^2 \Delta^2 \Delta^2) w - R \frac{1-\nu^2}{E \cdot h} Z = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где Δ^2 – оператор Лапласа, u – смещение в осевом направлении; X, Y и Z – проекции внешней нагрузки.

Задача определения напряжений в круговой цилиндрической оболочке сведена, таким образом, к решению приведенной системы дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях. Для замкнутой цилиндрической оболочки усилия, изгибающие моменты, перемещения и углы поворота должны удовлетворять условиям периодичности по угловой координате θ .

Изгибающие моменты находятся по перемещениям:

$$\begin{aligned} M_\theta &= \frac{E \cdot ha^2}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + V \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \\ M_\xi &= \frac{E \cdot ha^2}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + V \right) \right), \\ M_{\xi\theta} &= \frac{E \cdot ha^2}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + V \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы уравнений ищется *методом разделения переменных* с наложением условий периодичности по угловой координате θ и возможности представления искомым перемещений тригонометрическим рядом, например:

$$W = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} [\tilde{W}_m(\xi)\cos m\theta + \bar{W}_m(\xi)\sin m\theta], \quad (7)$$

где функция $\tilde{W}_m(\xi)$ соответствует напряженно-деформированному состоянию, симметричному относительно оси $\theta = 0$, а $\bar{W}_m(\xi)$ – обратно симметричному состоянию.

Если нагрузки на оболочку – гибкое колесо волновой зубчатой передачи – действуют по ее торцам, то решение неоднородной системы дифференциальных уравнений можно свести к решению однородной, но с неоднородными граничными условиями.

Например, для случая, когда гибкое колесо соединяется с выходным валом с помощью шлицевого соединения, неоднородные граничные условия запишутся в виде:

при $\xi = L/R$, в области зубчатого венца гибкого колеса, $W = W(\theta)$ – функция, заданная формой генератора волн деформации;

$M_\xi = 0$ и нормальное усилие в осевом направлении $T_1 = 0$.

Из условия нерастяжимости срединной поверхности гибкого колеса следует равенство

$$V = \int W(\theta) d\theta.$$

Граничные условия для торца со шлицевым соединением, при $\xi = 0$ имеют следующий вид:

$$W = V = T_1 = M_\xi = 0.$$

Результаты моделирования. Для определения оптимальной длины гибкого колеса рассмотрим задачу изгиба оболочки генератора волн в сечении $\xi = L/R$ при свободном, незакрепленном противоположном ее торце с $\xi = 0$, где в этом случае отсутствуют поперечные, сдвигающие и нормальные усилия и отсутствует изгибающий момент соответственно.

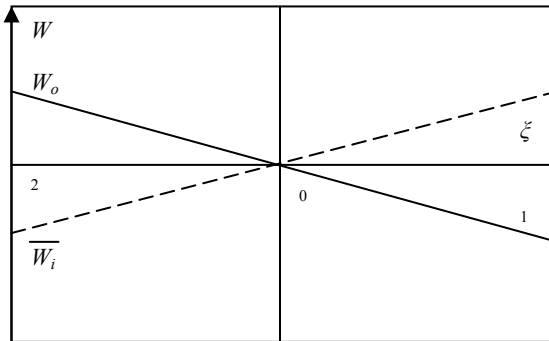


Рис. 2 – Распределение радиальных перемещений W по образующей.

При решении указанной задачи соотношение L/R варьировалось от 0,2 до 3 с шагом 0,05 L/R , при изменении $W_0/R(\theta=0)$ от 0,01 до 0,1 для каждого шага L/R .

Анализ результатов проведенные расчетов показал, что независимо от соотношения W_0/R в сечении $\xi=0$ при $L=2R$ перемещения $W=0$, а при $L>2R$ меняют знак, причем убывание (возрастание) перемещений W при удалении от деформированного сечения происходит по линейной зависимости (рис. 2).

Такой результат хорошо объясняет существующие рекомендации по выбору длины гибкого колеса – $L \cong D$.

Выводы. Отметим, что, как показали расчеты, уменьшение L до $(0,7...0,8)D$, даже при шлицевом соединении гибкого колеса с валом, приводит к возрастанию нагрузки на гибкий подшипник генератора волн деформации и значительному (до 20 – 30%) росту напряжений изгиба σ_ξ в области перехода зубчатого венца гибкого колеса к самой его оболочке.

Список литературы: 1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. «Наукова думка», Киев, 1972 г. 2. Власов В.З. Избранные труды, Т.1, II. Изд-во АН СССР, 1963 г.

Bibliography (transliterated): 1. Timoshenko, S. P. *Kurs teorii uprugosti*. Kiev: Naukova dumka, 1972. Print. 2. Vlasov, V. Z. *Izbrannyye trudy*. Vol. 1, 2. Izd-vo AN SSSR, 1963. Print.

Поступила (received) 31.03.2014

УДК 621.646.42

С.А. ШЕВЧЕНКО, вед. инженер-конструктор, ГКБ «Южное»,
Днепропетровск;

С.А. ВАЛИВАХИН, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., ГКБ «Южное»,
Днепропетровск

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГУЛЯТОРА ДАВЛЕНИЯ ГАЗА

Представлена математическая модель, описывающая динамику регулятора давления газа с учётом разрыва связей между элементами его подвижной системы. Дискретная модель включает уравнения движения поршней и сжатия газа в полостях регулятора. Модель предназначена для выбора конструктивных параметров системы управления пусковой турбиной жидкостного ракетного двигателя, а также пневматических и гидравлических агрегатов автоматики для аналогичных устройств.

Ключевые слова: регулятор давления газа, отрыв элементов подвижной системы, нелинейная математическая модель, динамические характеристики.