

**В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**, д-р. фіз.-мат. наук, проф., ХНТУСГ, Харків;  
**С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**, канд. фіз.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

## ФУНКЦІЯ ЛАМБЕРТА В ЗАДАЧІ КОЛИВАНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Проведено короткий огляд підходів до розв'язання рівняння коливань математичного маятника з квадратичним тертям. Показано, що наближене обчислення амплітуд затухаючих коливань математичного маятника, у середовищі з квадратичним опором рухові, можна проводити за допомогою таблиці функції Ламберта від'ємного аргументу. Запропоновано варіант наближеного розв'язання оберненої задачі ідентифікації коефіцієнта опору середовища.

**Ключові слова:** математичний маятник, коливання, функція Ламберта.

**Вступ.** Вільні коливання *математичного маятника* з квадратичним тертям тривалий час привертала увагу вчених. Точний розв'язок рівняння коливань уже давно одержано у вигляді трансцендентної квадратури [1], [2], яка не виражається через відомі елементарні або спеціальні функції. Тому для спрощення розрахунків запропоновано різні варіанти наближеного розв'язання цієї нелінійної задачі динаміки. Серед них є розв'язки у вигляді простого рекурентного співвідношення між амплітудами коливань [1], [3]. Відомі також наближені формули [4], до яких приводить *асимптотичний метод Лінстедта-Ляпунова*. Для проведення інженерних розрахунків в [4], [5] викладено графічний спосіб розв'язання цієї динамічної задачі.

На відміну від перелічених досліджень, тут запропоновано для обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань маятника використовувати таблицю *функції Ламберта* від'ємного аргументу, що складена в [6]. Цю таблицю уже застосовували для обчислення дальності польоту матеріальної точки у газоподібному середовищі [7], [8] та для проведення ідентифікації коефіцієнта опору рухові [6]. Тут мова йде про використання складеної таблиці у розрахунках нелінійних коливань маятника.

**Постановка задачі Коші та окремі її розв'язки.** Задача полягає у розв'язанні нелінійного рівняння

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta}^2 \operatorname{sign}(\dot{\theta}) + \omega^2 \theta = 0, \quad (1)$$

де  $\alpha = kl/m$ ;  $\omega = \sqrt{g/l}$ ;  $k$  – коефіцієнт опору середовища;  $l$  – довжина маятника;  $m$  – його маса;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\theta$  – кут відхилення маятника від спрямованої донизу вертикальної вісі, що має свій початок у точці підвісу; крапкою позначено похідну за часом  $t$ .

Розв'язок рівняння (1) повинен задовольняти умовам:

$$\theta(0) = \theta_0; \dot{\theta}(0) = 0,$$

де  $\theta_0$  – початкове відхилення маятника від положення стійкої рівноваги.

Коротко розглянемо деякі наближені розв’язки цієї задачі. Так, використовуючи метод Лінстедта-Ляпунова, в [4] одержано залежність між амплітудами  $n$ -го і  $n+1$  розмахів  $\theta_n$  і  $\theta_{n+1}$  у вигляді

$$\xi_{n+1} = \xi_n \left( 1 - \frac{2}{3} \xi_n + \frac{4}{9} \xi_n^2 - \dots \right). \quad (2)$$

Тут  $\xi_n = |2\alpha\theta_n|$ ;  $\xi_{n+1} = |2\alpha\theta_{n+1}|$ .

У монографії [1] асимптотичним методом, у першому наближенні, знайдено вираз

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n}{1 + \frac{2}{3} \xi_n}. \quad (3)$$

Цю ж формулу одержав і автор роботи [3], користуючись методом енергетичного балансу.

Як зазначено в [1], першим до наближення (3) прийшов *A. De Caligny* емпіричним шляхом.

Якщо  $\frac{2}{3} \xi_n < 1$ , то, розгорнувши (3) в біноміальний ряд, отримаємо часткову суму (2).

При точному розв’язанні задачі, обчислення амплітуд коливань пов’язано з пошуком коренів трансцендентного рівняння, яке одержав *F. Brasil* [1]:

$$1 - \xi_{n+1} - \ln(1 - \xi_{n+1}) = 1 + \xi_n - \ln(1 + \xi_n). \quad (4)$$

Для цього в [4] побудовано «раз назавжди» графік, щоб розв’язувати (4) графічним способом. Саме цей спосіб рекомендують для інженерних розрахунків і у довіднику [5].

Але рівняння (4) можна розв’язувати аналітично, бо коли [7], [8] виконується

$$f - \ln f = x,$$

то

$$f = -W(-e^{-x}).$$

Тут  $W(-e^{-x})$  – функція Ламберта.

За цієї обставини із (4) одержуємо рекурентне співвідношення

$$\xi_{n+1} = 1 + W_1 \left[ -\frac{1 + \xi_n}{\exp(1 + \xi_n)} \right]. \quad (5)$$

У ньому  $W_1(-\zeta)$  – головна гілка двозначної функції Ламберта від’ємного аргументу, таблиці якої складено в [6]. Використовуючи ці таблиці та лінійну інтерполяцію, за формулою (5) можна з високою точністю обчислити амплітуди коливань маятника. Щоб переконатися в цьому, розглянемо результати обчислень.

**Аналіз результатів розрахунків.** В табл. 1 вони записані для випадку, коли  $\xi_0 = 1$ . Числа у другому стовпці одержано за формулою (3), у третьому – за формулою (5), а в четвертому наведено точні результати, запозичені з монографії [1], де їх отримали числовим розв’язанням рівняння (4) на комп’ютері.

Таблиця 1 – Одержані різними способами значення  $\xi_n$

$n$	Значення $\xi_n$		
	форм. (3)	форм. (5)	із [1]
0	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,6000	0,5936	0,5936
2	0,4286	0,4239	0,4240
3	0,3333	0,3300	0,3301
4	0,2727	0,2703	0,2704
5	0,2308	0,2289	0,2290
6	0,2000	0,1984	0,1986

Результати обчислень по формулі (5) досить близькі до точних значень.

У табл. 2 записано значення амплітуд коливань, одержаних двома способами при  $\xi_0 = 2$ .

Таблиця 2 – Обчислені двома способами  $\xi_n$

$n$	Значення $\xi_n$		$n$	Значення $\xi_n$	
	фор. (3)	фор. (5)		фор. (3)	фор. (5)
0	2,000	2,000	4	0,3158	0,3087
1	0,8571	0,8215	5	0,2609	0,2557
2	0,5455	0,5271	6	0,2222	0,2183
3	0,4000	0,3891	7	0,1935	0,1904

Аналіз показує, що при збільшенні  $\xi_0$  зросли похибки формули (3), але вони менші 5%. Отже, компактна наближена формула (3) може бути альтернативою графічному способу визначення амплітуд коливань маятника в інженерних розрахунках.

Цінність формули (3) полягає ще і в тому, що її можна використовувати для наближеного розв’язання оберненої задачі ідентифікації коефіцієнта опору середовища. Дійсно, розв’язавши залежність (3) відносно  $\alpha$ , знаходимо

$$\alpha = \frac{3}{4|\theta_n|} \left( \left| \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} \right| - 1 \right).$$

Тоді, приймаючи до уваги введені вище позначення, одержуємо

$$k = \frac{3m}{4l|\theta_n|} \left( \left| \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} \right| - 1 \right). \quad (6)$$

Ця формула дозволяє обчислити  $k$  за результатами вимірів  $\theta_n$  і  $\theta_{n+1}$ .

Розглянемо приклад. Нехай маятник має параметри  $m = 2$  кг;  $l = 3$  м і за результатами вимірювань, при  $\theta_0 = 0,3$ , одержано  $|\theta_1| = 0,24$ . Підставивши ці числа в формулу (6), знаходимо  $k = 0,4167$  кг/м. Для перевірки результатів ідентифікації по формулі (6), розв'яжемо пряму задачу. Для одержаного  $k$  маємо:

$$\alpha = 0,6251; \xi_0 = 0,3750; (1 + \xi_0) \exp(-1 - \xi_0) = 0,34765.$$

У таблиці значень функції Ламберта [6]:

$$W_1(-0,347) = 0,6959; W_1(-0,348) = 0,7026.$$

Провівши інтерполяцію, знаходимо  $W_1(-0,34765) = -0,7070$ . Тоді за формулою (5):  $\xi_1 = 0,2930$ . При цьому амплітуда коливань становить

$$|\theta_1| = \xi_1 / (2\alpha) = 0,234.$$

Одержане амплітудне відхилення мало відрізняється від числа 0,24, яке використали для проведення ідентифікації  $k$ . Отже, перевірка підтвердила прийнятність формули (6) для розв'язання зворотної задачі.

**Висновки.** Аналіз числових результатів підтвердив, що, користуючись таблицею функції Ламберта від'ємного аргументу (основна гілка), можна з високою точністю обчислювати амплітуди затухаючих коливань математичного маятника, при дії сили опору, пропорційної квадрату швидкості руху.

**Список літератури:** 1. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский – М.: Наука, 1974. – 504 с. 2. Бутенин Н.В. Элементы теории нелинейных колебаний и удара / Н.В. Бутенин – Л.: Судпромгиз, 1962 – 193 с. 3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с. 4. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. В 2 т. Т.2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье – М.: Дрофа, 2006 – 720 с. 5. Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 т. Т. 3 / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко и др. – М.: Машиностроение, 1968 – 568 с. 6. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский – Х.: Изд. Савчук А.О., 2013 – 204 с. 7. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задаче баллистики материальной точки / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПИ»: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2013, № 5(979). – С. 220-224. 8. Ольшанський В.П. Інверсія розв'язку Діодона в задачі балістики матеріальної точки / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Наукові вісті НТУУ «КПІ»: Теоретичні та прикладні проблеми фізики, 2013, № 4. – С. 145-147.

**Bibliography (transliterated):** 1. Bogoljubov, N. N., and Ju. A. Mitropol'skij. *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij*. Moscow: Nauka, 1974. Print. 2. Butenin, N. V. *Jelementy teorii nelinejnyh kolebanij*. Leningrad: Sudpromgiz, 1962. Print. 3. Panovko, Ja. G. *Osnovy prikladnoj teorii kolebanij i udara*. Leningrad: Mashinostroenie, 1976. Print. 4. Lojczjanskij, L. G., and A. I. Lur'e. *Kurs teoreticheskoy mehaniki*. Vol. 2. No. 2. Moscow: Drofa, 2006 Print. 5. Birger, I. A., et al. *Prochnost', ustojchivost', kolebanija*. Spravochnik. Vol. 3. No. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1968 Print. 6. Ol'shanskij, V. P., and S. V. Ol'shanskij. *Funkcija Lambert'a v zadachah ballistiki material'noj tochki*. Kharkov: Izd. Savchuk A. O., 2013. Print. 7. Ol'shanskij, V. P., and S. V. Ol'shanskij. "Funkcija Lambert'a v zadache ballistiki material'noj tochki." *Visnik NTU «KhPI». Ser.: Matematichne modeljuvannja v tehnicі ta tehnologijah*. No. 5 (979). 2013. 220–224. Print. 8. Ol'shanskij, V. P., and S. V. Ol'shanskij. "Inversija rozv'jazku Didiona v zadachi balistiki material'noї tochki." *Naukovi visti NTUU «KPI». Ser.: Teoretichni ta prikladni problemy fizyky*. No. 4. 2013. 145–147. Print.

Надійшла (received) 06.05.2014