

**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;

**А.И. ДЕРИЕНКО**, канд. техн. наук, доц., КрНУ им. М.Остроградского,  
Кременчуг

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ И РАСЧЁТА ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Описан оригинальный метод расчётного определения частот свободных колебаний цилиндрического винтового стержня. Метод использует операторные уравнения линеаризованной динамической модели стержня, позволяющие с единых позиций рассмотреть различные типы граничных условий, как предусмотренные конструкцией, так и получающиеся из-за технологических погрешностей. Алгоритм метода сводится к последовательной локализации всех точек спектра при поэтапном усложнении граничных условий.

**Ключевые слова:** динамическая модель, дифференциальный оператор, граничные условия, спектр оператора, винтовой стержень, цилиндрическая пружина, симметричные условия закрепления, продольные колебания, поперечные колебания, частота свободных колебаний.

**Введение и постановка задачи.** В работе [1] были заложены основы численно-аналитического метода динамического анализа цилиндрических пружин сжатия. Новый метод реализовывал возможность интегрального представления для зависимости основной динамической характеристики – *силы пружины* – от перемещения опоры. Использовалось ядро Коши или Фредгольма, которое вычислялось предварительно методами операционного исчисления. Для *модели эквивалентного стержня* переход от изображений к оригиналам выполнялся аналитически, что повышало эффективность метода. В частности, была получена удобная формула для расчёта силы пружины с учётом неустановившихся колебаний её витков:

$$F_n(t) = z \cdot \left[ x_0 + 0.5(T_n \dot{x}(t) + \delta_n x(t)) + \sum_{j=1}^{j < t/T_n} (T_n \dot{x}(t - j \cdot T_n) + \delta_n x(t - j \cdot T_n)) e^{-\delta_n \cdot j} \right],$$

где  $z, x_0$  – коэффициент жёсткости и предварительная деформация пружины (при времени  $t \leq 0$ );  $x(t)$  – перемещение опоры при  $t > 0$ ;  $T_n$  – основной период колебаний пружины сжатия,  $T = \sqrt{m/z}$ ;  $m$  – масса её движущихся витков;  $\delta_n$  – логарифмический декремент затухания колебаний,  $\delta_n = 0.05 \dots 0.1$ .

В [2,3] в рамках этого же подхода для пружины сжатия были использованы *модели винтового стержня* [4] и *винтового бруса* [5], которые учитывали реальную геометрию упругой винтовой оси. Это позволило получить аналогичную зависимость для касательного напряжения в витке у неподвижной опоры, что важно для расчёта пружины на прочность. Переход к оригина-

налам выполнялся по *формуле обращения* численным методом, что в силу существования близких полюсов (или *кластеров* из частот свободных колебаний, [6]) увеличивало трудоёмкость и снижало надёжность алгоритма.

Указанные проблемы были преодолены в [7], где для условий жёсткого закрепления крайних витков удалось указать интервалы локализации частот свободных колебаний (или полюсов для изображения ядра).

В [8] удалось отказаться от использования операционного исчисления и построить ядро при помощи частот и форм свободных колебаний. Указанная модернизация первоначальной идеи была реализована в форме комплекса численно-аналитических методов динамического анализа пружины [9]. Комплекс использует описанные в [10 – 12] математические модели и расчётные методы, которые позволили с единых позиций рассмотреть различные типы закрепления пружины сжатия, как предусмотренные конструкцией, так и получающиеся из-за технологических погрешностей. Для чего использованы векторные обозначения для динамических параметров пружины и матричная форма для уравнений математической модели её деформации.

Цилиндрическая пружина сжатия является важнейшим, но не единственным техническим приложением стержней винтовой формы. Напр., в [13] предложили использовать винтовые стержни для передачи энергии ультразвуковых колебаний (рис.1), что уменьшит потери на трение. Поэтому представляется актуальной модернизация комплекса [9] с целью моделирования поперечных (крутильных) и связанных (продольно-поперечных) колебаний, которые возникают в стержнях при больших углах подъёма винтовой оси.

В данной работе представлены результаты первого этапа этой работы – выполнена модернизация *метода последовательной локализации спектра пружины* [10-12], которая позволяет решать аналогичные задачи определения частот и форм для поперечных и связанных колебаний винтового стержня при симметричных или несимметричных условиях закрепления его концов.

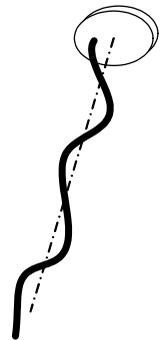


Рис. 1 –  
Винтовой  
сонотрод.

**Скалярная и векторная формы уравнения колебаний винтового стержня.** Будем рассматривать (рис. 2) тонкий пространственный криволинейный стержень с круглым поперечным сечением (однородный упругий континуум). На рис.2 приняты следующие обозначения:  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – орты *трехгранника Френе* в текущей точке  $O$ , находящейся на оси упругой винтовой линии на расстоянии  $s$  от её начала. Подвижная система координат совпадает с нормалью, бинормалью и касательной к винтовой линии,  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  – неподвижная система координат. В рамках принятой модели, аналогичной [6], положение поперечного сечения определяется шестью координатами:

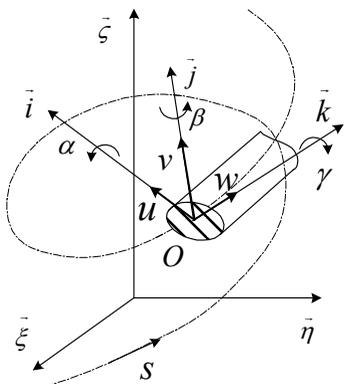


Рис.2 – Координаты сечения.

$u, v, w$  – радиальное, тангенциальное и продольное смещения;  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы изгиба, качания и кручения.

При колебаниях около положения статического равновесия в стержне появляются внутренние силы и моменты, а именно:  $V_x, V_y, V_z$  – радиальная, перерезывающая и тангенциальная силы;  $L_x, L_y, L_z$  – моменты изгиба, качания и кручения.

Тогда система дифференциальных уравнений, описывающая изменения координат сечения круглой формы, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \pi r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial V_x}{\partial s} + \frac{\cos^2 \delta}{R} V_z - \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} V_y; & \rho \pi r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial V_y}{\partial s} + \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} V_x; \\ \rho \pi r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial V_z}{\partial s} - \frac{\cos^2 \delta}{R} V_x; & \rho \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= \frac{\partial L_x}{\partial s} + \frac{\cos^2 \delta}{R} L_z - \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} L_y - V_y; \\ \rho \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \frac{\partial L_y}{\partial s} + \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} L_x + V_x; & \rho \frac{\pi r^4}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \frac{\partial L_z}{\partial s} - \frac{\cos^2 \delta}{R} L_x. \end{aligned}$$

Эта система уравнений содержит 12 неизвестных функций и замыкается соотношениями между углами, перемещениями и кривизнами:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E \pi r^2} V_x &= \frac{\partial u}{\partial s} - \beta + \frac{\cos^2 \delta}{R} w - \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} v; & \frac{1}{E \cdot \pi r^2} V_z &= \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\cos^2 \delta}{R} u; \\ \frac{1+\nu}{E \pi r^2} V_y &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} u + \alpha; & \frac{4}{E \pi r^4} L_x &= \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\cos^2 \delta}{R} \gamma - \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} \beta; \\ \frac{4}{E \pi r^4} L_y &= \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\sin \delta \cos \delta}{R} \alpha; & \frac{2(1+\nu)}{E \pi r^4} L_z &= \frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\cos^2 \delta}{R} \alpha. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала;  $r$  – радиус сечения;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\delta$  – угол подъема винтовой линии.

При составлении этих соотношений принято, что изменение внутреннего упругого момента пропорционально изменению кривизны, а сил сжатия и сдвига – пропорционально соответствующим деформациям. Заметим, что вторая группа уравнений отличается от модели [6] для пружины. В них, как и в [3, 5], учитывается конечная жёсткость витка по отношению к осевому сжатию и поперечным сдвигам, что, напр., важно для пружин с малым индексом.

Векторную форму этой системы уравнений можно найти в [14]:

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot \partial \bar{v} / \partial t &= \partial \bar{Q} / \partial s + \bar{\chi} \times \bar{Q}; & \rho J \cdot \partial \bar{\omega} / \partial t &= \partial \bar{M} / \partial s + \bar{\chi} \times \bar{M} + R^{-1} \bar{e} \times \bar{Q} \\ cQ \cdot \partial \bar{Q} / \partial t &= \partial \bar{v} / \partial s + \bar{\chi} \times \bar{v} + R^{-1} \bar{e} \times \bar{\omega}; & cM \cdot \partial \bar{M} / \partial t &= \partial \bar{\omega} / \partial s + \bar{\chi} \times \bar{\omega} \end{aligned} \right\}$$

где  $cQ, cM$  – диагональные матрицы, составленные из коэффициентов податливости сечения при осевом сжатии, сдвиге и изгибе в двух плоскостях, кручении;  $\rho I, \rho J$  – диагональные матрицы коэффициентов инерции сечения;  $\bar{v}, \bar{\omega}$  – линейная и угловая скорость поперечного сечения;  $\bar{Q}, \bar{M}$  – векторы упругих сил и моментов;  $\bar{e}$  – орт касательной к винтовой оси;  $\bar{\chi}$  – вектор кривизны винтовой оси (в линеаризованной модели он является константой).

**Нормировка и матричная форма уравнений.** Для сокращения числа параметров перейдём к нормированным координатам и обобщённым силам:

$$\theta = \frac{s}{R} \cos^2 \delta; \quad x_1 = \frac{v}{R}; \quad x_2 = \frac{\alpha}{\cos^2 \delta}; \quad x_3 = \frac{\gamma}{\cos^2 \delta}; \quad y_1 = \frac{\beta}{\cos^2 \delta}; \quad y_2 = \frac{u}{R}; \quad y_3 = \frac{w}{R};$$

$$q_1 = V_Y; \quad q_2 = \frac{L_X}{R \cos^2 \delta}; \quad q_3 = \frac{L_Z}{R \cos^2 \delta}; \quad f_1 = \frac{L_Y}{R \cos^2 \delta}; \quad f_2 = V_X; \quad f_3 = V_Z.$$

В результате моменты становятся силами, координата  $s$  – полярным углом  $\theta$ , а перемещения – безразмерными деформациями (аналогами углов).

Далее силы делим на величину  $E\pi r^2$ ; в результате они становятся удельными и безразмерными. После этого переходим к *безразмерному времени*  $\tau$ , удовлетворяющему условию

$$[(\rho R^2)/(E \cos^2 \delta)] \partial^2 / \partial t^2 = \partial^2 / \partial \tau^2.$$

И, наконец, преобразуем уравнения так, чтобы их можно было рассматривать при условии  $c \gg 1$ , где  $c = R/r$  – *индекс стержня*. Для этого умножаем силы на  $c^2$ , а время  $\tau$  делим на  $(2 \cdot c)$ , так что теперь

$$\tau = t \cdot [\sqrt{E/\rho} \cdot (r \cdot \cos \delta)] / (2 \cdot R^2);$$

$$q_1 = V_Y / [E \cdot \pi \cdot R^2]; \quad q_2 = L_X / [E \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \cos^2 \delta],$$

и так далее. В результате преобразований получилась система уравнений, которую удалось записать в симметричной матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} M_x & \Theta \\ \Theta & M_y \end{array} \right] \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right] &= \left( \left[ \begin{array}{cc} I & \Theta \\ \Theta & I \end{array} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \left[ \begin{array}{cc} B & \text{tg } \delta \cdot \Delta \\ \text{tg } \delta \cdot \Delta & -B^T \end{array} \right] \right) \cdot \left[ \begin{array}{c} Q \\ F \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} C_x & \Theta \\ \Theta & C_y \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} Q \\ F \end{array} \right] &= \left( \left[ \begin{array}{cc} I & \Theta \\ \Theta & I \end{array} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \left[ \begin{array}{cc} B^T & \text{tg } \delta \cdot \Delta \\ -\text{tg } \delta \cdot \Delta^T & B \end{array} \right] \right) \cdot \left[ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $X, Q$  – векторы-столбцы, составленные из перемещений  $x_i$  и сил  $q_i$ , отвечающих *группе продольных колебаний* стержня;  $Y, F$  – то же для *группы*

поперечных колебаний, составленных из перемещений  $y_i$  и сил  $f_i$ ;

$$M_x = \text{diag} \left[ 1 \quad 1/(4c^2) \quad 1/(2c^2) \right]; \quad M_y = \text{diag} \left[ 1/(4c^2) \quad 1 \quad 1 \right];$$

$$C_x = \text{diag} \left[ (1+\nu)/(4c^2) \quad 1 \quad (1+\nu)/2 \right]; \quad C_y = \text{diag} \left[ 1 \quad (1+\nu)/(4c^2) \quad 1/(4c^2) \right];$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $B$  и  $\Delta$  определяют взаимное влияние координат, относящихся к одной и к разным группам колебаний, соответственно. Важно отметить, что вторая матрица влияния кососимметричная, то есть  $\Delta^T = -\Delta$ . Следует особо подчеркнуть то, что выполненная нормировка одинакова как для продольных, так и для поперечных колебаний стержня.

**Операторное и дисперсионное уравнения стержня.** Из системы уравнений (1) можно исключить обобщённые силы и получить для вектора обобщённых координат  $\vec{X} = [X \quad Y]^T$  операторное уравнение

$$\partial^2 \vec{X} / \partial \tau^2 = L[\vec{X}];$$

порядок вывода и результаты анализа этого уравнения полностью соответствуют тем, которые далее в этой статье будут получены для продольных колебаний пружины, где вместо полной системы (1) рассматривается её часть.

Поэтому, если граничные условия на обоих концах стержня отвечают условиям жёсткого, свободного, упругого или шарнирного закрепления, то оператор  $L[.]$  оказывается самосопряжённым, его спектр – отрицательным, а его собственные функции (*формы колебаний*) образуют базис в пространстве всех вектор - функций, описывающих статические деформации стержня.

Для получения дисперсионного уравнения стержня будем искать решение системы (1) в виде простой волны, имеющей частоту  $i \cdot \lambda$  и волновое число  $i \cdot \alpha$ , где  $i$  – мнимая единица. Тогда эти величины будут удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 \cdot M_x \cdot X = \alpha \cdot Q - B \cdot Q + tg \delta \cdot \Delta \cdot F, \\ C_x \cdot Q = \alpha \cdot X + B^T \cdot X + tg \delta \cdot \Delta \cdot Y, \\ \lambda^2 \cdot M_y \cdot Y = \alpha \cdot F + B^T \cdot F + tg \delta \cdot \Delta \cdot Q, \\ C_y \cdot F = \alpha \cdot Y - B \cdot Y + tg \delta \cdot \Delta \cdot X. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda^2 \cdot M_x \cdot X = S \cdot Q + tg \delta \cdot \Delta \cdot F, \\ C_x \cdot Q = S_* \cdot X + tg \delta \cdot \Delta \cdot Y, \\ \lambda^2 \cdot M_y \cdot Y = S^* \cdot F + tg \delta \cdot \Delta \cdot Q, \\ C_y \cdot F = S \cdot Y + tg \delta \cdot \Delta \cdot X, \end{cases} \quad (2)$$

где обозначено  $\alpha \cdot I - B = S$ ,  $\alpha \cdot I + B^T = S_*$ , причём при вещественных  $\alpha$  :

$$S_* = -\bar{S}^T.$$

Заметим, что при условии  $c \rightarrow \infty$  матрицы  $M_x$  и  $M_y$  вырождаются, но матрицы  $S$  и  $S_*$  обратимы, напр.,

$$S_*^{-1} = (\alpha(\alpha^2 + 1))^{-1} \cdot ((\alpha^2 + 1) \cdot I - \alpha \cdot B^T + (B^T)^2).$$

Поэтому имеется возможность исключить из системы (2) неизвестные векторы  $X, F$  и получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (\lambda^2 \cdot M_x \cdot S_*^{-1} \cdot C_x - S + tg^2 \delta \cdot \Delta \cdot S_*^{-1} \cdot \Delta) \cdot Q = tg \delta \cdot \lambda^2 \cdot (M_x \cdot S_*^{-1} \cdot \Delta + \Delta \cdot S_*^{-1} \cdot M_y) \cdot Y; \\ tg \delta \cdot (C_y \cdot S_*^{-1} \cdot \Delta + \Delta \cdot S_*^{-1} \cdot C_x) \cdot Q = (C_y \cdot S_*^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot M_y - S + tg^2 \delta \cdot \Delta \cdot S_*^{-1} \cdot \Delta) \cdot Y. \end{cases}$$

Равенство нулю определителя этой однородной системы является искомым *дисперсионным уравнением*. Заметим, что этот определитель содержит много нулевых элементов, и поэтому его порядок удаётся понизить с 6-го до 4-го. Кроме того, раскрывая этот определитель, замечаем, что характеристическое уравнение будет содержать члены, зависящие от величины  $tg^2 \delta$ , а, напр., для пружины этот параметр мал. Поэтому, по крайней мере, для нижних ветвей дисперсионного уравнения пружины можно принять  $tg \delta \approx 0$  и рассмотреть отдельные уравнения для продольных и поперечных колебаний.

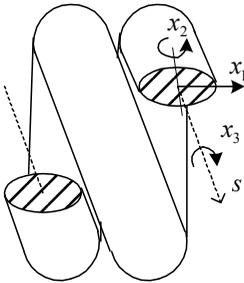


Рис. 3 – Группа координат продольных колебаний пружины.

Сказанное означает, что прежде чем рассматривать задачу анализа продольно-поперечных колебаний стержня, следует с тех же позиций, проанализировать её частный случай – продольные колебания пружины.

**Операторное уравнение для продольных колебаний пружины.** В рамках модели винтового бруса [5] положение поперечного сечения витка пружины (рис. 1) задаётся тремя координатами  $x_i$  (продольное смещение  $x_1$ , углы изгиба  $x_2$  и кручения  $x_3$ ), которым отвечают перерезывающая сила  $q_1$ , изгибающий момент  $q_2$  и крутящий момент  $q_3$ . Из координат, сил и моментов в [1] составили векторы-столбцы  $\bar{x}$  и  $\bar{q}$ , после чего уравнения динамической де-

формации

$$\begin{aligned} \partial x_1 / \partial s &= q_1 c_1 - x_3; & \partial q_1 / \partial s &= \rho F \cdot \partial^2 x_1 / \partial t^2; \\ \partial x_2 / \partial s &= q_2 c_2 - x_3; & \partial q_2 / \partial s &= \rho I_2 \cdot \partial^2 x_2 / \partial t^2 + q_1 \cdot R - q_3; \\ \partial x_3 / \partial s &= q_3 c_3 + x_2; & \partial q_3 / \partial s &= \rho I_3 \cdot \partial^2 x_3 / \partial t^2 + q_2; \end{aligned}$$

нормировали, как указано выше, и записали в матричной форме:

$$M_x \cdot \partial^2 \bar{x} / \partial \tau^2 = \partial \bar{q} / \partial \theta - B \cdot \bar{q} ; C_x \cdot \bar{q} = \partial \bar{x} / \partial \theta + B^T \cdot \bar{x} , \quad (3)$$

где угол  $\theta$  изменяется вдоль винтовой оси,  $0 \leq \theta \leq H = 2\pi i_g$ ;  $i_g$  – число рабочих витков пружины;  $\rho F$ ,  $\rho I_2$ ,  $\rho I_3$  – инерционные коэффициенты сечения.

Матрица  $B$  для однородного упругого континуума имеет строго регламентированную структуру, связанную со свойствами координат. Назовём координату  $x_j$  (силу  $q_j$ ) *ковариантной*, если её величина не зависит от выбора направления оси континуума, и *контравариантной*, если при изменении направления оси её величина меняет знак. Составим диагональную матрицу  $\Psi$  с элементами  $\Psi_{jj} = \pm 1$ , где «+» соответствует ковариантным, а знак «-» – контравариантным координатам  $x_j$ ; тогда, как это следует из (1,2), матрица  $B$  обязана удовлетворять равенству

$$\Psi \cdot B = -B \cdot \Psi \text{ или, что эквивалентно, } B = -\Psi \cdot B \cdot \Psi .$$

В пружине сжатия к контравариантным координатам относятся продольное смещение  $x_1$  и угол кручения  $x_2$ , а к ковариантным – угол изгиба  $x_3$ , вследствие чего матрица  $\Psi = \text{diag}[-1 \quad 1 \quad -1]$ .

После перехода к обобщённым координатам и силам

$$\bar{x}^n = M_x^{1/2} \cdot \bar{x} , \quad \bar{q}^n = M_x^{-1/2} \cdot \bar{q}$$

систему (3) в [8] записали в операторном виде:

$$\partial^2 \bar{x}^n / \partial t^2 = l_x [\bar{x}^n] ; \quad \bar{q}^n = l_q (\bar{x}^n) , \quad (4)$$

где

$$l_x [\bar{x}] = (-B_n + I \cdot \partial / \partial s) \cdot A \cdot (B_n^T + I \cdot \partial / \partial s) \cdot \bar{x} ; l_q (\bar{x}) = -A \cdot (B_n^T + I \cdot \partial / \partial s) \cdot \bar{x} ; \quad (5)$$

$$A = M_x^{-1} \cdot C_x^{-1} ; \quad B_n = M_x^{1/2} \cdot B \cdot M_x^{1/2} .$$

В полученных формулах матрица  $A$  является диагональной, а матрица  $B_n$  имеет ту же структуру, что и матрица  $B$ . В дальнейшем символ « $n$ » в обозначениях векторов и матриц опускаем.

Операция  $l_x[\bar{x}]$  оказалась самосопряжённым дифференциальным выражением второго порядка следующего канонического вида:

$$A_2 \cdot \partial^2 / \partial \theta^2 (\cdot) + A_1 \cdot \partial / \partial \theta (\cdot) + A_0 (\cdot) , \quad (6)$$

где матрицы  $A_2 = A$ ,  $A_0 = -B \cdot A \cdot B^T$  – симметричны (и диагональные, причём матрица  $A_0$  – вырожденная), матрица  $A_1 = -B \cdot A + A \cdot B^T$  – кососимметричная.

**Обоснование вещественности и отрицательности спектра для оператора  $L[\bar{x}]$ .** Выясним, каким условиям должны удовлетворять функции

$\bar{x}(\theta)$ , чтобы линейный дифференциальный оператор  $L[\bar{x}]$ , порождаемый выражением  $l_x[\bar{x}]$  на множестве  $D(L)$  этих функций, был *самосопряжённым отрицательно определённым оператором*.

Для этого, как известно [15], должны выполняться два условия:

$$1: \quad \langle L[\bar{x}], \bar{y} \rangle - \langle \bar{x}, L[\bar{y}] \rangle = 0 \quad \forall \bar{x}(\theta), \bar{y}(\theta) \in D(L), \quad (7)$$

$$2: \quad \langle L[\bar{x}], \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{x}(\theta) \in D(L), \quad (8)$$

где

$$\langle L(\bar{x}), \bar{y} \rangle = \int_0^H (L[\bar{x}(s)], \bar{y}(s)) ds, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T \cdot \bar{y}$$

– это скалярные произведения вектор - функций или векторов.

Свойство (7) будет гарантировать *вещественность и дискретность*, а (8) – *отрицательность спектра*  $\sigma = \{-\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_n^2, \dots\}$  оператора  $L[\bar{x}]$ .

При этом неотрицательные числа  $\lambda_i$ , используемые в записи спектра  $\sigma(L)$ , будут являться *круговыми частотами свободных колебаний пружины*.

Для анализа сформулированных условий используем *правило интегрирования по частям*:

$$\begin{aligned} \langle L[\bar{x}], \bar{y} \rangle &= \int_0^H (\partial \bar{q} / \partial \theta - B \cdot \bar{q}, \bar{y}) d\theta = (l_q(\bar{x}), \bar{y}) \Big|_0^H - \int_0^H (l_q(\bar{x}), \partial \bar{y} / \partial \theta) d\theta - \int_0^H (B \cdot l_q(\bar{x}), \bar{y}) d\theta = \\ &= (l_q(\bar{x}), \bar{y}) \Big|_0^H - \int_0^H (l_q(\bar{x}), \partial \bar{y} / \partial \theta + B^T \cdot \bar{y}) d\theta = (l_q(\bar{x}), \bar{y}) \Big|_0^H - \int_0^H (l_q(\bar{x}), A^{-1} \cdot l_q(\bar{y})) d\theta. \end{aligned}$$

Применяя это преобразование к каждому выражению, входящему в левые части условий (7) или (8), получим:

$$\langle L[\bar{x}], \bar{y} \rangle - \langle \bar{x}, L[\bar{y}] \rangle = -\{(l_q(\bar{x}), \bar{y}) - (\bar{x}, l_q(\bar{y}))\} \Big|_0^H, \quad (9)$$

$$\langle L[\bar{x}], \bar{x} \rangle = (l_q(\bar{x}), \bar{x}) \Big|_0^H - \int_0^H (A^{-1} \cdot \bar{q}, \bar{q}) ds. \quad (10)$$

Поэтому для выполнения условий (7), (8) достаточно, чтобы функции  $\bar{x}(\theta)$  на краях интервала  $[0; H]$  удовлетворяли граничным условиям:

$$J_\lambda \cdot \bar{x} + G_\lambda \cdot l_q(\bar{x}) = 0, \quad J_{np} \cdot \bar{x} + G_{np} \cdot l_q(\bar{x}) = 0, \quad (11)$$

где  $J_\lambda, J_{np}$  – диагональные проектирующие матрицы,  $J_{ii} \in \{0; 1\}$ ;

$$G_\lambda = I - J_\lambda + K_\lambda; \quad G_{np} = I - J_{np} - K_{np}; \quad K_\lambda \geq 0; \quad K_{np} \geq 0$$

– симметричные матрицы коэффициентов  $k_{ij}$  податливости опор, коммутирующие с матрицами  $J_\lambda$  или  $J_{np}$ .

Действительно, если матрица  $G$  является невырожденной, то на краях интервала функции  $\bar{x}(\theta)$  и  $\bar{y}(\theta)$  будут удовлетворять условиям

$$l_q(\vec{x}) = L \cdot \vec{x} \text{ и } l_q(\vec{y}) = L \cdot \vec{y}, \text{ где } L = -G^{-1} \cdot J.$$

Тогда выражение, стоящее в равенстве (7) в фигурных скобках, примет вид  $\{(L \cdot \vec{x}, \vec{y}) - (\vec{x}, L \cdot \vec{y})\}$  и в силу симметрии матрицы  $L$  окажется равным нулю на обоих концах пружины, что и требовалось доказать.

Если матрица  $G$  вырожденная, то её можно рассматривать как предел последовательности  $G_n, n \rightarrow \infty$  невырожденных матриц, удовлетворяющих тем же условиям; поэтому доказанное останется справедливым и здесь.

Для доказательства свойства (8) заметим, что интеграл в правой части (10) принимает отрицательные значения при любом векторе  $\vec{q}(\theta) \neq 0$ , а проверка условия  $(l_q(\vec{x}), \vec{x})\big|_0^H \leq 0$  аналогична описанной выше.

Используя второе уравнение системы (4), условие (11) перепишем так:

$$J \cdot \vec{x}(\theta) + G \cdot \vec{q}(\theta) = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } \theta = H. \quad (12)$$

В такой форме могут быть записаны известные граничные условия, рассматриваемые при анализе свободных колебаний цилиндрической пружины сжатия. Перечислим их, сохраняя принятую в технике терминологию.

- Условия *жёсткого закрепления*:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0, \quad K = \Theta; \quad J = I. \quad (12.1)$$

- Условия *точечного контакта края и опоры*:

$$x_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = 0, \quad K = \Theta; \quad J_{11} = 1; \quad J_{22}, J_{33} = 0. \quad (12.2)$$

- Условия *линейного контакта края и опоры*:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad q_3 = 0, \quad K = \Theta; \quad J_{11}, J_{22} = 1; \quad J_{33} = 0, \quad (12.3)$$

или:  $x_1 = 0; \quad x_3 = 0; \quad q_2 = 0, \quad K = \Theta; \quad J_{11}, J_{33} = 1; \quad J_{22} = 0. \quad (12.4)$

- Условия *упругой заделки крайних витков*:

$$x_i \pm k_{ii} \cdot q_i = 0; \quad k_{ii} > 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad J = I; \quad K = \text{diag}[k_{11} \quad k_{22} \quad k_{33}], \quad (12.5)$$

где знак «+» отвечает правому, а знак «-» – левому концу пружины.

- Условия *опирания на подогнутый торцевой виток* [7]:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \pm k_{22} \cdot q_2 \pm k_{23} \cdot q_3; \quad x_3 = \pm k_{32} \cdot q_2 \pm k_{33} \cdot q_3, \quad J = I; \quad K > 0, \quad (12.6)$$

где ненулевые элементы  $k_{ij}$  матрицы  $K$  (при  $i, j \geq 2$ ) находятся из уравнений статической деформации опорного витка, имеющего шлифованный торец.

- Условия для *свободного конца пружины*:

$$q_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = 0, \quad K = \Theta, \quad J = \Theta. \quad (12.7)$$

Краевые условия (12) могут быть приведены также к стандартному для теории линейных дифференциальных операторов виду [15]:

$$a_0(\theta) \cdot \vec{x}(\theta) + a_1(\theta) \cdot \partial \vec{x}(\theta) / \partial \theta = 0; \quad \theta = 0; \quad \theta = H, \quad (13)$$

где

$$a_0 = J - G \cdot A \cdot B^T; \quad a_1 = G \cdot A;$$

по её классификации они относятся к условиям *типа Штурма*. Но в задачах из приложений вместо (13) обычно используют одну из форм (12).

**Симметричные граничные условия.** В зависимости от способа использования пружины в конкретном механизме граничные условия могут быть симметричными и несимметричными. Выясним, каким условиям должны удовлетворять матрицы  $J$  и  $G$  при симметричных условиях. Для этого перенесём начало отсчёта координаты  $\theta$  в среднее сечение пружины, обозначим  $h = H/2$  и учтём различие в свойствах симметрии величин  $x_3, q_1, q_2$  и  $x_1, x_2, q_3$  (а именно то, что *ковариантным координатам отвечают контравариантные силы, а контравариантным координатам – ковариантные силы*). Если изменить направление оси пружины на противоположное, то,  $\bar{x}(s), \bar{q}(s)$  изменятся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(s) \\ \bar{q}(s) \end{bmatrix} \Rightarrow T \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}(-s) \\ \bar{q}(-s) \end{bmatrix}, \text{ где } T = \begin{bmatrix} -\Psi & 0 \\ 0 & \Psi \end{bmatrix}.$$

Поэтому граничное условие

$$J_l \cdot \bar{x}(-h) + G_l \cdot \bar{q}(-h) = 0$$

для левого конца совпадёт с условием

$$J_{np} \cdot \bar{x}(h) + G_{np} \cdot \bar{q}(h) = 0$$

для правого конца, если будет соблюдена эквивалентность матричных пар  $[J_l; G_l]$  и  $[J_{np}; G_{np}] \cdot T$ , то есть

$$J_{np} = J_l; \quad G_{np} = -\Psi \cdot G_l \cdot \Psi. \quad (14)$$

Матрицы  $G$  содержат диагональные составляющие  $I - J$ , поэтому фактическому изменению в соответствии с формулой (14) подлежат только матрицы  $K$ :  $K_{np} = -\Psi \cdot K_l \cdot \Psi$ , причём на правом конце пружины выполняется условие  $K_{np} \geq 0$ , а на левом –  $K_l \leq 0$ .

### Дисперсионное и вековое уравнения для продольных колебаний.

Чтобы найти спектр  $\sigma(L)$  выполним редукцию к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений

$$d\bar{x}(\theta)/d\theta = A^{-1} \cdot \bar{q}(\theta) - B^T \cdot \bar{x}(\theta); \quad d\bar{q}(s)/ds = -\lambda^2 I \cdot \bar{x}(s) + B \cdot \bar{q}(s), \quad (15)$$

или 
$$\frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} \bar{x}(\theta) \\ \bar{q}(\theta) \end{bmatrix} = V(\lambda) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}(\theta) \\ \bar{q}(\theta) \end{bmatrix}, \quad \text{где } V(\lambda) = \begin{bmatrix} -B^T & A^{-1} \\ -\lambda^2 I & B \end{bmatrix};$$

если  $\lambda$  является круговой частотой продольного свободного колебания и выполнены граничные условия (12), то решения  $\bar{x}(\theta)$  и  $\bar{q}(\theta)$  описывают *собственные формы колебаний*.

Системе (15) отвечает дисперсионное уравнение

$$\det D(\lambda, \alpha) = \det \left\| \lambda^2 I + (-B + \alpha I) \cdot A \cdot (B^T + \alpha I) \right\| = 0. \quad (16)$$

Транспонируя матрицу  $D(\lambda, \alpha)$ , убеждаемся в справедливости равенства

$$[D(\lambda, \alpha)]^T = [D(\lambda, -\alpha)].$$

Следовательно, если  $\alpha_0$  – корень уравнения (16), то и  $(-\alpha_0)$  – корень этого уравнения, и функция  $\det D(\lambda, \alpha)$  представляет собой многочлен третьей степени не только от  $\lambda^2$ , но и от  $\alpha^2$ .

При малых значениях  $\alpha^2$  три решения  $\lambda_i^2$  характеристического уравнения оказываются близки к собственным числам  $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$  матрицы

$$(-A_0) = B \cdot A \cdot B^T;$$

при  $\alpha^2 \rightarrow \infty$  зависимости для

этих решений имеют наклонные асимптоты вида  $\lambda_i^2 = \gamma_i \cdot \alpha^2$ , где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – собственные числа матрицы  $A$  (для пружин, изготовленных из круглой проволоки, наклон  $\gamma_3 = \gamma_2$ ).

Характер изменения этих зависимостей, подробно исследованных в [8], показан на рис.4. При каждом фиксированном значении  $\lambda^2 < 0$  уравнение (16) имеет три пары корней:  $\pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \pm \alpha_3$ ; по крайней мере, одна пара этих корней является чисто мнимой.

Для составления уравнения для частот свободных колебаний запишем решения системы (15) при начальных условиях  $\bar{x}(0) = \bar{x}^0, \bar{q}(0) = \bar{q}^0$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(h) \\ \bar{q}(h) \end{bmatrix} = W(\lambda, h) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{q}^0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \bar{x}(-h) \\ \bar{q}(-h) \end{bmatrix} = W(\lambda, -h) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{q}^0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где  $W(\lambda, h) = \exp(V(\lambda) \cdot h)$ .

Граничные условия представим в следующем эквивалентном виде:

$$[J_l; G_l] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}(-h) \\ \bar{q}(-h) \end{bmatrix} = 0; \quad [J_{np}; G_{np}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}(h) \\ \bar{q}(h) \end{bmatrix} = 0$$

и преобразуем их с учётом равенств (17):

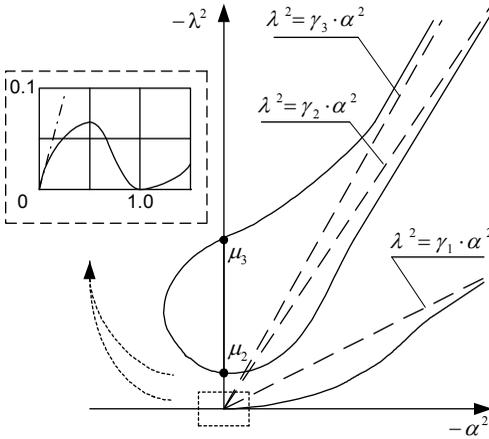


Рис.4 – Решения дисперсионного уравнения для продольных колебаний.

$$[J_l; G_l] \cdot W(\lambda, -h) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{q}^0 \end{bmatrix} = 0; \quad [J_{np}; G_{np}] \cdot W(\lambda, h) \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{q}^0 \end{bmatrix} = 0. \quad (18)$$

Система уравнений (18) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det \begin{bmatrix} [J_{np}; G_{np}] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_l; G_l] \cdot W(\lambda, -h) \end{bmatrix} = 0. \quad (19)$$

Это равенство и является искомым уравнением для частот свободных колебаний пружины; такие уравнения в механике называются *вековыми*. В данном случае эти частоты являются корнями определителя 6-го порядка, состоящего из двух однотипных блоков (верхнего и нижнего) размера  $3 \times 6$ .

Заметим, что при вещественных значениях  $\lambda^2$  этот определитель также является вещественным. Преобразуем вековое уравнение, используя свойство симметрии передаточной функции  $W$ . Матрица  $V(\lambda)$  удовлетворяет соотношению  $V(\lambda) = -\Psi \times V(\lambda) \times \Psi$ , являющемуся следствием аналогичного свойства матрицы  $B$ . Используя это соотношение и формулу для экспоненциального ряда, получаем следующее свойство симметрии передаточной функции:

$$W(\lambda, -\theta) = \Psi \cdot W(\lambda, \theta) \cdot \Psi.$$

В результате уравнение (19) принимает вид:

$$\det \begin{bmatrix} [J_{np}; G_{np}] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_l; G_l] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} = 0. \quad (20)$$

Если граничные условия симметричны, то уравнение (20) может быть дополнительно упрощено. После учёта условий симметрии (14) сложим и вычтем верхний и нижний блоки определителя (20):

$$\det \begin{bmatrix} [J_{np}; G_{np}] \cdot W(\lambda, h) \cdot (I + \Psi) \\ [J_{np}; G_{np}] \cdot W(\lambda, h) \cdot (I - \Psi) \end{bmatrix} = 0. \quad (21)$$

У каждой из диагональных матриц  $I - \Psi$  и  $I + \Psi$  ровно половина диагональных элементов равна нулю, поэтому матрицы

$$W_1 = W \cdot (I - \Psi) \quad \text{и} \quad W_2 = W \cdot (I + \Psi)$$

имеют по три нулевых столбца (с несовпадающими номерами), а определитель (21) 6-го порядка раскладывается в произведение двух определителей 3-го порядка. В результате, уравнение (21) распадается на два независимых уравнения, каждое из которых отвечает половине спектра:

$$\det \left[ [J_{np}; G_{np}] \cdot W_1^{ynl}(\lambda, h) \right] = 0 \quad \text{и} \quad \det \left[ [J_{np}; G_{np}] \cdot W_2^{ynl}(\lambda, h) \right] = 0, \quad (22)$$

где *уплотненные матрицы*  $W_1^{ynl}, W_2^{ynl}$  получены из матриц  $W_1, W_2$  вычеркиванием нулевых столбцов.

Подробное описание метода определения собственных частот для дан-

ного случая содержится в [8]. Для граничных условий (12.4), использующих только ковариантные величины, уравнения (22) сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям для характеристических чисел  $\alpha$  :

$$\sin(\alpha \cdot h) = 0 \text{ и } \cos(\alpha \cdot h) = 0 .$$

Каждый корень  $\alpha_k$  этих уравнений отвечает некоторой частоте  $\lambda_k$ , величина которой получается в результате решения дисперсионного уравнения (16). Колебания пружины на этой частоте представляют собой *стоячую монохроматическую волну*.

При других типах граничных условий каждой собственной частоте  $\lambda_k$  отвечает сумма бегущих волн в количестве от 3 (для симметричных условий) до 6 (для несимметричных условий), причём для части этих волн их амплитуды могут содержать экспоненциальные множители от координаты  $\theta$ .

**Сопоставление результатов с простейшей моделью.** Составим дисперсионное и вековое уравнения для *модели эквивалентного стержня* [1]. В её рамках учитываются два динамических параметра сечения (продольное перемещение  $x_1$  и перерезывающая сила  $q_1$ ), изменение которых описывается следующей системой уравнений:

$$\partial x_1 / \partial s = q_1 / c_x ; \quad \partial q_1 / \partial s = \rho F \cdot \partial^2 x_1 / \partial t^2 ,$$

где  $c_x$  – *эквивалентная погонная жёсткость* пружины,  $c_x = z / (2\pi i_g R)$ ;  $z$  – коэффициент жёсткости этой пружины при её статической деформации.

После исключения силы  $q_1$  получается уравнение колебаний:

$$\partial^2 x_1 / \partial t^2 = a^2 \partial^2 x_1 / \partial s^2 .$$

Оно является *волновым*, в нём величина  $a = \sqrt{\rho \cdot F / c_x}$  определяет скорость распространения волны деформации вдоль винтовой оси пружины. Ему отвечает дисперсионное уравнение вида  $\lambda^2 - a^2 \cdot \alpha^2 = 0$ . Решениям этого уравнения на рис. 4 соответствует касательная прямая, отмеченная штрих – пунктиром. Передаточная матрица - функция  $W$  имеет второй порядок и состоит из синусов и косинусов безразмерного комплекса  $\lambda \cdot h / a$  :

$$W(\lambda, h) = \begin{bmatrix} \sin(\lambda \cdot h / a) & \cos(\lambda \cdot h / a) \\ (\lambda \cdot h / a) \cdot \cos(\lambda \cdot h / a) & -(\lambda \cdot h / a) \cdot \sin(\lambda \cdot h / a) \end{bmatrix} .$$

Матрицы  $J$  и  $G$ , используемые в записи граничных условий, теперь имеют первый порядок и являются скалярами (числами  $j_n, g_n$  на правом и  $j_n, g_n$  на левом конце пружины). В результате, вековое уравнение принимает вид:

$$\begin{vmatrix} j_n \sin(\lambda h / a) + g_n(\lambda c_x / a) \cos(\lambda h / a) & j_n \cos(\lambda h / a) - g_n(\lambda c_x / a) \sin(\lambda h / a) \\ -j_n \sin(\lambda h / a) + g_n(\lambda c_x / a) \cos(\lambda h / a) & j_n \cos(\lambda h / a) + g_n(\lambda c_x / a) \sin(\lambda h / a) \end{vmatrix} = 0 . \quad (23)$$

При симметрии граничных условий имеем  $J_n = J_n$ ;  $g_n = -g_n$ , и это равенство распадается на два независимых уравнения:

$$j_n \sin(\lambda h/a) + g_n(\lambda c_x/a) \cos(\lambda h/a) = 0, \quad j_n \cos(\lambda h/a) - g_n(\lambda c_x/a) \sin(\lambda h/a) = 0,$$

каждое уравнение определяет половину спектра.

Условиям (12.3) отвечают простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin(\lambda h/a) = 0 \quad \text{и} \quad \cos(\lambda h/a) = 0;$$

каждому корню  $\lambda$  соответствует стоячая монохроматическая волна вида

$$x_1 = \sin(\lambda t) \cdot \sin(\lambda s/a) \quad \text{или} \quad x_1 = \sin(\lambda t) \cdot \cos(\lambda s/a).$$

**Теоретические основы метода последовательной локализации спектра.** Как в случае симметричных, так и в случае несимметричных граничных условий для определения спектра используется специальная итерационная процедура, названная *методом последовательной локализации спектра*. Процедура основана на анализе изменения спектра при переходе от одного типа граничных условий к другому, близкому типу.

Дадим определение *близких граничных условий*. Как указано выше, для винтового стержня граничное условие определяется матричной парой  $[J; G]$ .

Матричные пары  $[J_1; G_1]$ ,  $[J_2; G_2]$  будем называть *близкими*, если матрицы  $J_1, J_2, G_1, G_2$  имеют совпадающий собственный базис, причём для всех собственных векторов  $\vec{e}_i$ , кроме некоторого вектора  $\vec{e}_k$ , матрицы  $G_1, G_2$ , а также матрицы  $J_1, J_2$ , имеют одинаковые собственные числа.

Среди рассмотренных выше граничных условий примеры близких пар дают условия (12.1) и (12.2), (12.2) и (12.3), (12.2) и (12.4), (12.3) и (12.4).

*Несимметричные граничные условия будем называть близкими, если матричные пары, отвечающие одному из концов стержня, являются близкими, а отвечающие другому концу – совпадают.*

*Симметричные граничные условия будем называть близкими, если матричные пары, отвечающие каждому из концов, являются близкими.*

Если две пары являются близкими, то для матриц  $G_1, G_2$  выполняется одно из взаимоисключающих неравенств:

$$G_1 \geq G_2 \quad \text{или} \quad G_1 \leq G_2.$$

Выполнение первого неравенства для правого конца или второго неравенства для левого конца пружины означает, что граничные условия с индексом 2 являются более *жёсткими*, чем граничные условия с индексом 1. Таким образом, близкие граничные условия всегда сравнимы между собой по степени жёсткости (или, наоборот, податливости) опор стержня.

**Теорема о монотонной зависимости собственных частот от граничных условий.** Сформулируем и докажем следующее утверждение.

*Пусть в вековых уравнениях для задачи 1*

$$\det \begin{bmatrix} [J_1; G_1] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_n; G_n] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} = 0 \quad (24.1),$$

или для задачи 2

$$\det \begin{bmatrix} [J_2; G_2] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_n; G_n] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} = 0 \quad (24.2)$$

матричные пары  $[J_1; G_1]$  и  $[J_2; G_2]$  являются близкими, а их решения  $\{\lambda_{i,1}, i=1,2,\dots\}$  и  $\{\lambda_{i,2}, i=1,2,\dots\}$  записаны в порядке возрастания модулей.

Тогда решения этих уравнений перемежаются, причём

$$\text{если } G_1 \geq G_2, \text{ то } 0 \leq \lambda_{1,1} \leq \lambda_{2,1} \leq \lambda_{1,2} \leq \dots \leq \lambda_{1,n} \leq \lambda_{2,n} \leq \dots, \quad (25.1)$$

$$\text{а если } G_1 \leq G_2, \text{ то } 0 \leq \lambda_{2,1} \leq \lambda_{1,1} \leq \lambda_{2,2} \leq \dots \leq \lambda_{2,n} \leq \lambda_{1,n} \leq \dots \quad (25.2)$$

Заметим, что похожая теорема для поперечных колебаний прямых стержней рассматривалась в классической монографии [16].

Формулировка теоремы фактически включает два утверждения: *условие перемежаемости спектров* и *направление перемещения спектров*.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим *вспомогательное уравнение*

$$\det \begin{bmatrix} [J(\phi); G(\phi)] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_n; G_n] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} = 0, \quad (26)$$

где матричная пара  $[J(\phi); G(\phi)]$  близка к парам  $[J_1; G_1]$ ,  $[J_2; G_2]$  и отличается от них только собственными числами при векторе  $\vec{e}_k$ , а именно:

у матриц  $J_1, J_2 - s_1^j, s_2^j$ , у матрицы  $J(\phi) - s^j(\phi) = s_1^j \cdot \cos \phi + s_2^j \cdot \sin \phi$ ;

у матриц  $G_1, G_2 - s_1^g, s_2^g$ , у матрицы  $G(\phi) - s^g(\phi) = s_1^g \cdot \cos \phi + s_2^g \cdot \sin \phi$ .

При  $\phi = 0^0$  уравнение (26) совпадает с уравнением (24.1), при  $\phi = 90^0 -$  с уравнением (24.2). Таким образом, вспомогательная задача как бы осуществляет непрерывную трансформацию **задачи 1** в **задачу 2**.

Приведём матрицы  $J(\phi)$  и  $G(\phi)$  к диагональному виду:

$$J(\phi) = U \cdot J(\phi) \cdot U^*; \quad G(\phi) = U \cdot G_d(\phi) \cdot U^*$$

и вынесем унитарную матрицу  $U$  из верхнего блока за знак определителя:

$$\det \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} [J(\phi); G_d(\phi)] \cdot U^* \cdot W(\lambda, h) \\ [J_n; G_n] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} = 0. \quad (27)$$

Во втором определителе от параметра  $\phi$  зависит только одна строка в верхнем блоке. Поэтому, воспользовавшись линейностью этого определителя по элементам строки, а затем, перемножив определители, уравнение (27) можно представить в следующем виде:

$$\cos \phi \det \begin{bmatrix} [J_1; G_1] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_{\lambda}; G_{\lambda}] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} + \sin \phi \det \begin{bmatrix} [J_2; G_2] \cdot W(\lambda, h) \\ [J_{\lambda}; G_{\lambda}] \cdot \Psi \cdot W(\lambda, h) \cdot \Psi \end{bmatrix} = 0. \quad (28)$$

Будем изменять значения параметра  $\phi$  от  $0^0$  до  $180^0$ . При этом оператор  $L[\bar{x}]$  будет оставаться самосопряжённым, а квадраты решений  $\lambda_i(\phi)$  уравнения (26) – вещественными числами.

Покажем, что если  $|\phi_1 - \phi_2| < 180^0$ , то  $\forall k, i: \lambda_k^2(\phi_1) \neq \lambda_i^2(\phi_2)$ , то есть спектры операторов не пересекаются. Действительно, если предположить, что эти спектры имеют общее собственное число ( $-\lambda_*^2$ ), то значение  $\lambda_*$  будет корнем обоих уравнений – и (24.1) и (24.2), а значит решением уравнения (28) при любом значении параметра  $\phi$ . Это нарушает известные условия общности положения и доказывает, что спектры не пересекаются.

При  $\phi = 90^0$  решения уравнения (28) совпадают с решениями уравнения (24.2), а при  $\phi = 0^0$  и  $\phi = 180^0$  – с решениями уравнения (24.1). Это означает, что точки спектра не могут двигаться навстречу друг другу (иначе они обязаны пересечься), и движение всего спектра при возрастании параметра происходит в одну сторону. При таком движении выполняется то условие, которое выше было названо условием перемежаемости спектра, что и доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы (о направлении перемещения спектра) введём в рассмотрение ещё два вспомогательных параметра.

Во-первых, изменим математическую модель пружины, умножив матрицу  $B$  перекрёстных связей координат на число  $\theta \in [0; 1]$ .

Во-вторых, изменим граничные условия, а именно возведём унитарные матрицы  $U$ , используемые в жордановом представлении матриц  $J, G$  на каждом из концов пружины, в степень  $\alpha \in [0; 1]$ .

Ясно, что решаемой задаче **1,2** соответствуют значения параметров  $\alpha, \theta = 1$ , но при любых других значениях этих параметров из указанных диапазонов будут выполнены условия теоремы, а, значит, при увеличении параметра  $\phi$  от  $0^0$  до  $90^0$  весь спектр переместится в одну сторону.

*Замечательным является то, что направление движения спектра не зависит от выбора параметров  $\alpha, \theta$ .* Действительно, допустив противное, мы приходим к существованию таких значений  $\alpha^*, \theta^*$  этих параметров, при которых весь спектр должен оставаться неподвижным, что невозможно. Поэтому для определения направления движения спектра можно упростить задачу, выбрав подходящие для этого значения параметров  $\alpha, \theta$ .

Если принять  $\theta = 0$ , то система (3) распадётся на три волновых уравнения, описывающих распространение продольной, изгибной и крутильной де-

формации вдоль прямого стержня (то есть вдоль прутка проволоки, из которого была навита данная пружина). При значении  $\alpha = 0$  унитарные матрицы становятся единичными, а все матрицы, используемые при записи граничных условий – диагональными. Поэтому, при условии  $\alpha, \theta = 0$  исходная задача вырождается, и мы имеем по сути три независимых задачи, каждая из которых определяет свою часть спектра. Здесь при переходе от одних граничных условий к близким условиям 2/3 собственных частот остаются неподвижными, а изменение *подвижной части спектра* описывается уравнением (23).

Уравнение (23) может быть преобразовано к виду:

$$tg(2\lambda h/a) = (c_x/h) \cdot (j_\lambda g_n - j_n g_\lambda) \times \\ \times (\lambda h/a) / [j_\lambda j_n - g_\lambda g_n (\lambda h/a)^2].$$

Элементарный анализ этого уравнения показывает, что при увеличении жёсткости граничных условий, чему здесь соответствует возрастание значений  $j_n/g_n$ , все его решения смещаются вправо. Аналогичным образом ведёт себя весь спектр исходной задачи.

Монотонное движение спектра происходит и при изменении однотипных граничных условий на другом конце пружины. При решении задачи с симметричными условиями закрепления пружины теорема о монотонной зависимости справедлива для каждой части спектра, соответствующей корням одного из определителей (22) 3-го порядка.

Теорема доказана.

**Геометрическая иллюстрация.** Теорема доказана строго, но, выбранный метод доказательства, имеющей подвижный и неподвижный спектры, может привести к сомнениям.

Точки подвижной части спектра в этой задаче могут пересекаться с не-

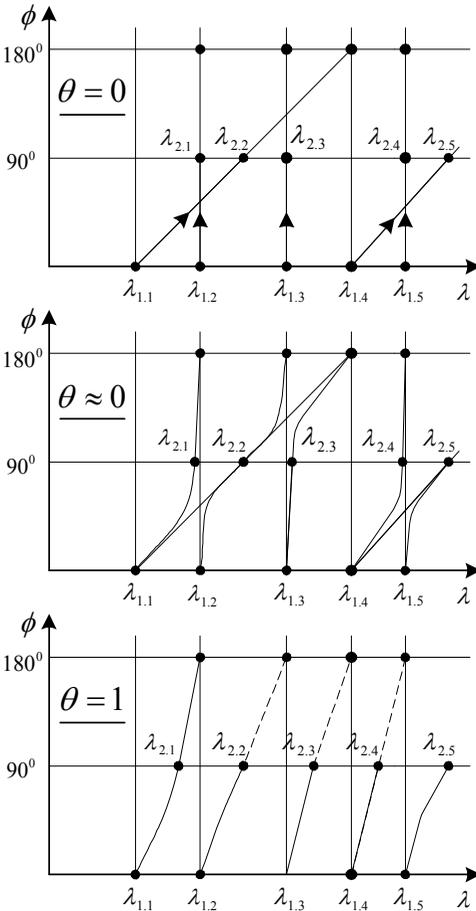


Рис.5 – Характер перемещения спектра.

зависимости справедлива для каждой части спектра, соответствующей корням одного из определителей (22) 3-го порядка.

подвижными частотами (рис. 5,  $\theta = 0$ ), и это не противоречит приведенному выше доказательству. Всё дело в том, что у пружины таких неподвижных частот свободных колебаний нет. Кроме того, в формулировке теоремы частоты оказываются, как бы, обезличены тем, что они при любых изменениях граничных условий выстраиваются в возрастающем порядке; при этом перемежаемость спектров соблюдается даже для вырожденной задачи.

Сомнения будут окончательно развеяны после знакомства со всеми диаграммами рис. 5. Часть спектра, которая при  $\theta = 0$  была неподвижна, при  $\theta \approx 0$  получает возможность перемещаться в пределах узких коридоров. Но на самом деле, собственное число оператора, проникая в коридор через левую границу, «выбивает» из него то число, которое находилось там раньше.

Для пружины такая картина наблюдается в области высоких частот, где влияние матрицы  $B$ , даже без множителя  $\theta \approx 0$ , становится пренебрежимо малым. Области средних частот, где дисперсионное уравнение имеет только один отрицательный корень  $\alpha_i^2$ , отвечает регулярное расположение и равномерное перемещение точек спектра. Частоты колебаний, попадающие на нижнюю ветвь, расположены крайне нерегулярно.

**Алгоритм метода последовательной локализации спектра.** Опишем порядок использования доказанной теоремы для решения практических задач. В [8] было показано, как определяется спектр пружины при закреплении обоих её концов в соответствии с граничными условиями (12.4). При записи этих условий используются только ковариантные величины, вследствие чего уравнения для собственных частот удалось свести к простейшим тригонометрическим уравнениям для волнового числа  $\alpha$ :

$$\sin(\alpha \cdot h) = 0 \quad \text{или} \quad \cos(\alpha \cdot h) = 0.$$

Соответствующее найденному волновому числу  $\alpha$  собственное число  $-\lambda^2$  определялось как решение дисперсионного уравнения (16), являющегося бикубическим. Далее, при использовании теоремы о локализации спектра (доказанной только лишь для частного случая) был осуществлён переход к условиям жёсткой заделки для обоих концов пружины. При описании следующих шагов алгоритма эту решённую в [1] задачу будем именовать **задачей 0**, её граничные условия задают матричные пары

$$[J_{0,np}; G_{0,np}] = [J_{0,l}; G_{0,l}] = [I; \Theta].$$

Пусть требуется определить собственные частоты пружины для **несимметричных граничных условий**, задаваемых парами  $[J_{np}; G_{np}]$  и  $[J_l; G_l]$ . Учитывая порядок определителя (3), эту задачу в приводимом ниже алгоритме будем именовать **задачей 6**.

1. Найдём собственные базисы этих матриц и представим их в виде:

$$[J_{np}; G_{np}] = [U_{np} \cdot J_{np} \cdot U_{np}^*; U_{np} \cdot G_{np} \cdot U_{np}^*]; [J_l; G_l] = [U_l \cdot J_l \cdot U_l^*; U_l \cdot G_l \cdot U_l^*].$$

2. В таком же виде можно представить граничные условия **задачи 0**:

$$[J_{0,np}; G_{0,np}] = [U_{np} \cdot I \cdot U_{np}^*; U_{np} \cdot \Theta \cdot U_{np}^*]; [J_{0,l}; G_{0,l}] = [U_l \cdot I \cdot U_l^*; U_l \cdot \Theta \cdot U_l^*],$$

где  $U_{np}, U_l$  – те же унитарные матрицы, что и выше.

3. Свяжем **задачу 0** с **задачей 6** посредством цепочки вспомогательных **задач 1, 2, ...** таким образом, чтобы все пары задач с соседними номерами имели близкие граничные условия. Всего таких промежуточных задач потребуется не более 5, которые вместе с исходной и конечной задачами цепи образуют не более 6 пар:  $\Pi_1 - \{\text{задача 0, задача 1}\}$ ,  $\Pi_2 - \{\text{задача 1, задача 2}\}$  и т.д. Первую задачу пары будем называть *ведущей*, а вторую – *ведомой*.

4. Последовательно увеличивая номер  $i$  пары  $\Pi_i$ , определяем спектры *ведомых* задач. Для этого сначала, используя теорему о монотонности спектра и известный спектр *ведущей* задачи, определяются интервалы локализации для всех точек спектра *ведомой* задачи. Затем на каждом из интервалов локализации производится фактическое определение нового значения собственной частоты  $\lambda_k$ , для чего вековое уравнение (20) решается одним из известных численных методов, например, *методом дихотомии*.

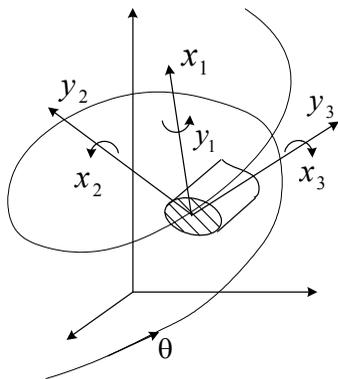


Рис.6 – Группы продольных и поперечных колебаний винтового стержня.

Если требуется определить частоты свободных колебаний пружины для **симметричных граничных условий**, то описанный выше метод, не изменившийся по своей сути, приводит к менее трудоёмкому алгоритму. Теперь граничные условия определяются только одной матричной парой  $[J_{np}; G_{np}]$ , а собственные частоты являются корнями определителей (21), имеющих третий порядок.

Максимальное число пар задач с однотипными граничными условиями сокращается с 6-ти до 3-ёх.

**Аналогия между группами колебаний.** Сила связи между продольными и поперечными колебаниями стержня (рис.6) определяется величиной угла  $\delta$ . Если принять, что  $\operatorname{tg} \delta = 0$ , то система (1) распадается на две независимые части:

- систему уравнений для продольных колебаний (3)
$$M_x \cdot \partial^2 X / \partial \tau^2 = \partial Q / \partial \theta - B \cdot Q; C_x \cdot Q = \partial X / \partial \theta + B^T \cdot X;$$
- систему уравнений для поперечных колебаний
$$M_y \cdot \partial^2 Y / \partial \tau^2 = \partial F / \partial \theta + B^T \cdot F; C_y \cdot F = \partial Y / \partial \theta - B \cdot Y. \quad (29)$$

Чтобы подчеркнуть алгебраическое сходство этих систем, выполним следующее преобразование. Обозначим

$$\partial^2 Y / \partial \tau^2 = Z$$

и дважды продифференцируем второе уравнение системы (29) по времени  $\tau$ .

Тогда эту систему можно переписать в таком виде:

$$C_y \cdot \partial^2 F / \partial \tau^2 = \partial Z / \partial \theta - B \cdot Z ; M_y \cdot Z = \partial F / \partial \theta + B^T \cdot F. \quad (30)$$

Система (30) аналогична системе (3). Но сходство оказывается ещё более полным, если учесть, что матрица  $M_y$  очень похожа на  $C_x$ , а матрица  $M_x$  очень похожа на  $C_y$ . Если индекс  $c \gg 1$ , а коэффициент Пуассона  $\nu$  (условно) принять равным 1, то матрицы из указанных пар совпадут.

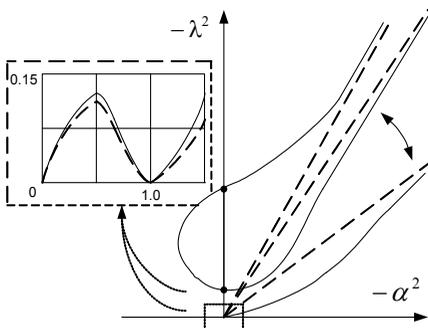


Рис.7 – Решения дисперсионных уравнений винтового стержня.

где  $\nu \approx 0.3$  (рис. 7).

Условие жёсткого закрепления концов для продольных колебаний вида

$$X(\theta_{кр}) = [0 \ 0 \ 0]^T,$$

для уравнения (30) будет соответствовать условию

$$F(\theta_{кр}) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

для незакреплённого конца стержня. Верно и обратное утверждение.

Следовательно, для нахождения спектра поперечных колебаний при условии жёсткого закрепления концов можно использовать задачу для продольных колебаний, но это условие необходимо заменить его антиподом:

$$Y(\theta_{кр}) = [0 \ 0 \ 0]^T \Rightarrow Q(\theta_{кр}) = [0 \ 0 \ 0]^T,$$

а также исключить нулевые частоты, отвечающие статической неопределённости стержня при незакреплённых концах.

В указанном выше смысле задачи определения спектра для продольных

При построении нижней петли решений характеристического уравнения во всех случаях можно согласиться с условием  $c \gg 1$ , что упрощает форму этого уравнения. Для продольных колебаний оно принимает вид

$$\lambda^2 ((1+\nu)/2 - \alpha^2) = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2,$$

а для поперечных – похожий:

$$\lambda^2 (1 - \alpha^2) = \alpha^2 (1 + \alpha^2)^2.$$

Вблизи начала координат расхождение между решениями уравнений сводится к тому, что во втором случае график нижней петли сжимается по направлению оси  $\lambda^2$  в  $(1+\nu)/2$  раз,

и поперечных колебаний двойственны (сопряжены) друг другу. При переходе к двойственной задаче силы инерции и упругости меняются местами.

При составлении двойственной задачи для условий жёсткой заделки следует учесть, что отсутствие перемещений крайнего витка означает и равенство нулю соответствующих ускорений.

Для анализа верхних ветвей дисперсионного уравнения и, особенно, их асимптотического поведения при больших частотах, использовать условие  $c \gg 1$  не допустимо, но в этом нет необходимости. Квадраты угловых коэффициентов асимптот характеристического уравнения (рис.6) являются диагональными элементами матрицы  $M^{-1} \cdot C^{-1}$  соответствующих колебаний:

- для продольных  $M_x^{-1} \cdot C_x^{-1} = 4c^2 \cdot \text{diag}\left((1+\nu)^{-1}/2 \quad 1 \quad (1+\nu)^{-1}/2\right)$ ,
- для поперечных  $M_y^{-1} \cdot C_y^{-1} = 4c^2 \cdot \text{diag}\left(1 \quad (1+\nu)^{-1}/2 \quad 1\right)$ .

Сходство и различие между этими результатами имеют простые объяснения. В области высоких частот мы фактически вычёркиваем из уравнений матрицу влияния  $B$  (принимая её нулевой). Но если разные виды деформации не влияют друг на друга, то это означает, что мы распрямляем стержень. Поперечное сечение распрямлённой проволоки имеет те же самые шесть степеней свободы, что и у навитой. При этом если стержень имеет круглое поперечное сечение, то для трёх видов деформации (осевого сжатия и изгибов в двух плоскостях) скорость распространения волны оказывается одной и той же, а для трёх других видов деформации (кручения и сдвига по двум осям) эти скорости также совпадают, но имеют меньшее значение.

**Синфазные колебания стержня.** Для построения средних и верхних ветвей кроме асимптот целесообразно найти их точки пересечения с осью  $(-\lambda^2)$ , определяющие так называемые *частоты синфазных колебаний*. Для этих частот все точки стержня деформируются синхронно (в одной фазе и с одной амплитудой). Квадраты указанных частот являются точками спектра матрицы  $M_x^{-1} \cdot B \cdot C_x^{-1} \cdot B^T$  для продольных и матрицы  $M_y^{-1} \cdot B^T \cdot C_y^{-1} \cdot B$  для поперечных колебаний. В результате расчёта спектров этих матриц были получены следующие значения нормированных круговых частот:

$$\text{для продольных колебаний} - \lambda_2^2 = -2c^2; \quad \lambda_3^2 = -8c^2(2c^2 + 1)/(1 + \nu);$$

$$\text{для поперечных колебаний} - \lambda_2^2 = -4c^2; \quad \lambda_3^2 = -4c^2(4c^2 + 1)/(1 + \nu).$$

Частоты  $\omega_{2,3} = i\lambda_{2,3}$  для большинства винтовых стержней, используемых в современной технике, лежат в ультразвуковом диапазоне, и это открывает возможность для применения соответствующих синфазных колебаний в прикладной вибромеханике. Синфазные колебания имеют очень большую (теоретически – бесконечную) длину волны, а значит очень малые (в теории – нулевые) потери, вызванные внутренним трением в материале стержня. В

[14] предложено использовать синфазные колебания винтовых стержней, попадающие на средние ветви дисперсионного уравнения с частотами  $\omega_2$ , для передачи энергии ультразвуковых колебаний в волноводах, сонотродах и др. устройствах подобного назначения.

Таблица 1 – Круговые частоты колебаний  $\omega$  (для шкалы времени  $\tau$ )

Продольные	Поперечные
0.0607	0.0520
0.0788	0.0736
0.0791	0.0737
0.1199	0.1029
0.1551	0.1432
0.1558	0.1451
0.1760	0.1525
0.2231	0.1953
0.2267	0.2056
0.2312	0.2153
0.2707	0.2358
0.2889	0.2638
0.2925	0.2682
0.3092	0.2704
0.3376	0.2984
0.3392	0.3035
0.3457	0.3157

**Сопоставление спектров.** Выявленное сходство задач позволяет использовать для поперечных колебаний тот же алгоритм последовательной локализации спектра, который был описан выше для продольных колебаний пружины. Результат решения этой задачи для пружины с числом витков  $i = 9.5$  и индексом  $c = 7$  приведен в табл. 1. Для обоих видов колебаний моделировалось условие жёсткого закрепления. При анализе поперечных колебаний был выполнен переход к сопряжённой задаче. Курсивом выделены частоты, приблизительно соответствующие модели эквивалентного стержня, учитывающей одну степень свободы сечения. Появление остальных частот связано с учётом реальной геометрии пружины. Наличие близких частот (*кластеров*) подчёркивает актуальность использованного при решении данной задачи метода последовательной локализации спектра.

**Метод и алгоритм локализации спектра для связанных колебаний стержня.** Если углом  $\delta$  подъёма винтовой линии пренебречь нельзя, то изменения метода и алгоритма в основном сводятся к изменению размера использованных матриц – он удваивается. Система (1) записывается в виде, аналогичном (3):

$$\hat{M} \cdot \partial^2 \bar{x} / \partial \tau^2 = \partial \hat{q} / \partial \theta - \hat{B} \cdot \bar{q} ; \hat{C} \cdot \bar{q} = \partial \bar{x} / \partial \theta + \hat{B}^T \cdot \bar{x} ,$$

где

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_x & \Theta \\ \Theta & M_y \end{bmatrix} ; \hat{C} = \begin{bmatrix} C_x & \Theta \\ \Theta & C_y \end{bmatrix} ; \hat{B} = \begin{bmatrix} B & tg \delta \cdot \Delta \\ tg \delta \cdot \Delta & -B^T \end{bmatrix} ; \bar{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} ; \bar{q} = \begin{bmatrix} Q \\ F \end{bmatrix} .$$

Условие симметрии матрицы связи имеет вид  $\hat{\Psi} \cdot \hat{B} = -\hat{B} \cdot \hat{\Psi}$ , где

$$\hat{\Psi} = diag[\Psi \quad -\Psi] ,$$

что является следствием описанной аналогии между продольными и попе-

речными колебаниями.

Удвоение размера матриц касается и граничных условий, определяемых матричной парой  $[\hat{J}_{np}; \hat{G}_{np}]$  и  $[\hat{J}_l; \hat{G}_l]$ . Так условие жёсткого закрепления вида (12.1) теперь использует матрицы

$$\hat{J} = \hat{I}, \quad \hat{G} = \hat{\Theta}; \quad (31)$$

где  $\hat{\Theta} = \text{diag}[\Theta \quad \Theta]$ ;  $\hat{I} = \text{diag}[I \quad I]$ , а условие (12.4) – матрицы

$$\hat{J} = \text{diag}[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad \hat{G} = \hat{I} - \hat{J}. \quad (32)$$

Условия (12.6) опирания на подогнутый торцевой виток, которые в [7] рассматривались только для группы продольных колебаний, в работе [17] были уточнены и привели к матричной паре:

$$\hat{J} = \text{diag}[I \quad \Theta], \quad \hat{G} = \text{diag}[\pm K \quad I], \quad (33)$$

где неотрицательная матрица податливости  $K \geq 0$  является вырожденной и находится по специальному алгоритму из уравнений статической деформации опорного витка, имеющего шлифованный торец (рис.8).

В [17] опубликованы результаты исследование влияния качества изготовления опорного витка на статические и динамические характеристики пружины (коэффициент жёсткости  $z$  и основной период колебаний  $T_n$ ). В процессе исследования число точек контакта между рабочим и опорным витками варьировалось на трех уровнях — 0, 1 и 2, а между витком и плоскостью изменялось в широких пределах (рис.9,10). Общее число точек контакта выбира-

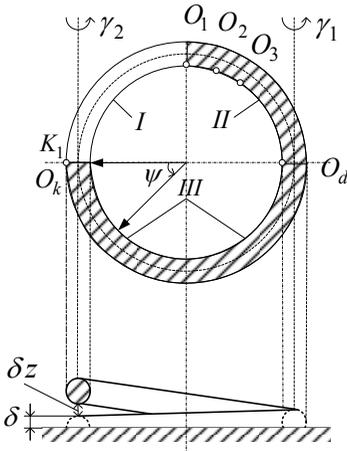


Рис. 8 – Схема опорного витка:  
 I – висящая, II – падающая,  
 III – лежащая части;  
 шлифованная часть  
 заштрихована.

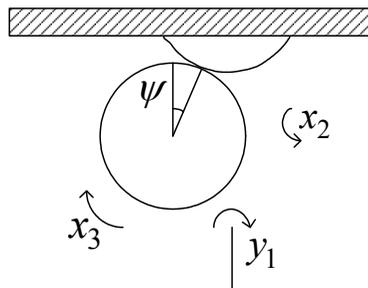
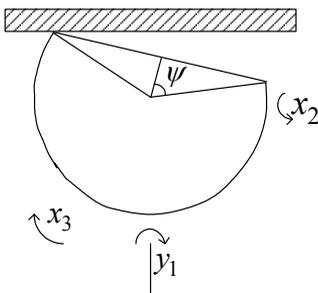


Рис. 9 – Контакт с опорной плоскостью. Рис. 10 – Контакт рабочего витка с опорным.

лось не меньше трёх (из соображений устойчивости опоры). Показано, что уточнение (33) приводит к существенному изменению результатов расчёта. Если нарушается контакт между рабочим и опорным витком, то различия между реальными и ожидаемыми характеристиками достигают 10% и более. Когда указанный контакт сохраняется, а общее число контактных точек превышает 4 – 5, характеристики стабилизируются, и дополнительное повышение качества шлифования торца и тарелки не оказывают заметного влияния на работу пружины.

Дисперсионное уравнение (16) для стержня принимает форму

$$\det D(\lambda, \alpha) = \det \left\| \lambda^2 \hat{I} + (-\hat{B} + \alpha \hat{I}) \cdot A \cdot (\hat{B}^T + \alpha \hat{I}) \right\| = 0$$

и имеет 6-ю степень относительно величин  $\lambda^2$  и  $\alpha^2$ . В вековом уравнении (20) порядок определителя также удваивается (до 12-го):

$$\det \begin{bmatrix} [\hat{J}_{np}; \hat{G}_{np}] \cdot \hat{W}(\lambda, h) \\ [\hat{J}_n; \hat{G}_n] \cdot \hat{\Psi} \cdot \hat{W}(\lambda, h) \cdot \hat{\Psi} \end{bmatrix} = 0, \quad (34)$$

где  $\hat{W}(\lambda, h) = \exp(\hat{V}(\lambda) \cdot h)$ ;  $\hat{V}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\hat{B}^T & \hat{A}^{-1} \\ -\lambda^2 \hat{I} & \hat{B} \end{bmatrix}$ ;  $\hat{A} = \hat{M}^{-1} \cdot \hat{C}^{-1}$ .

Но если граничные условия симметричны, то вместо (33) получаем два определителя 6-го порядка и два уравнения вида (22), каждое из которых определяет половину спектра:

$$\det \left[ [\hat{J}_{np}; \hat{G}_{np}] \cdot \hat{W}_1^{ymn}(\lambda, h) \right] = 0 \quad \text{и} \quad \det \left[ [\hat{J}_{np}; \hat{G}_{np}] \cdot \hat{W}_2^{ymn}(\lambda, h) \right] = 0, \quad (35)$$

где  $\hat{W}_1 = \hat{W} \cdot (\hat{I} - \hat{\Psi})$ ;  $\hat{W}_2 = \hat{W} \cdot (\hat{I} + \hat{\Psi})$ .

Для решения уравнений (33) или (34) используется описанный выше метод последовательной локализации спектра.

Начальное положение спектра отвечает граничным условиям (31) и в силу ковариантности используемых в нём величин волновые числа  $\alpha$  являются здесь корнями синуса или косинуса. **Задача 0** находит спектр для условий жёсткого закрепления (32), для чего используются следующие переходы:

$$\hat{J} = \text{diag}[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \Rightarrow \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \Rightarrow \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0] \Rightarrow \hat{I},$$

причём изменения матрицы  $\hat{G}$  следуют за изменением  $\hat{J}$ ,  $\hat{G} = \hat{I} - \hat{J}$ .

Далее реализуются остальные этапы алгоритма: **задача 1**, **задача 2**, и т.д. Последняя из решаемых задач может иметь номер 12, а при симметричных граничных условиях – номер 6, но для каждой половины спектра. Однако в технических приложениях число этапов обычно меньше предельного. Так при симметричных граничных условиях вида (33) процедура последова-

тельной локализации спектра выполняется 4 раза:

$$\tilde{J} = \text{diag}[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \Rightarrow \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \Rightarrow \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

далее матрица  $\tilde{J} = \text{diag}[I \ \Theta]$  не изменяется, а перестраивается матрица  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{G} = \text{diag}[\Theta \ I] \Rightarrow \text{diag}[K1 \ I] \Rightarrow \text{diag}[K \ I],$$

где матрицы  $K$  и  $K1$  имеют общий собственный базис, но разные спектры:

$$\sigma(K) = \{\lambda_1, \lambda_2, 0\}; \quad \sigma(K1) = \{\lambda_1, 0, 0\}; \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

**Выводы.** Разработан новый метод расчёта частот свободных колебаний цилиндрического винтового стержня. Он является обобщением аналогичного метода для пружин сжатия и станет основой запланированной модернизации разработанного ранее комплекса численно-аналитических методов динамического анализа пружин сжатия, нацеленной на решение похожих задач механики винтовых стержней.

Метод использует матричные и операторные уравнения линеаризованной динамической модели стержня, позволяющие с единых позиций рассмотреть различные типы закрепления его концов, как предусмотренные конструкцией, так и получающиеся из-за технологических погрешностей. Показано, что дифференциальный оператор, определяющий формы свободных колебаний стержня при исследованных типах граничных условий, является самосопряжённым и отрицательным (неположительным) оператором.

На основе диагонализации симметричных матриц, определяющих граничные условия, разработана методология сравнения условий закрепления по степени их жёсткости (установлен *частичный порядок*). Получены априорные оценки для определения направления и величины перемещения частот при изменении граничных условий, сравнимых по степени жёсткости.

Алгоритм метода сводится к последовательной локализации точек спектра при поэтапном усложнении граничных условий. Число этапов локализации зависит от способа закрепления концов стержня и составляет от 3 до 15.

**Список литературы:** 1. Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л. О связи силы пружины с законом её деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1985. – Вып. 39. – С. 7 – 22. 2. Грунауэр А.А., Григорьев А.Л., Вейтак И.А. Определение функциональных зависимостей динамических характеристик пружины от закона её ударного деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1987. – Вып. 42. – С. 40 – 49. 3. Грунауэр А.А., Григорьев А.Л., Вейтак И.А. Продольный удар по цилиндрической пружине с малым индексом и особенности его динамического расчета // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1987. – Вып. 42. – С. 49 – 55. 4. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Вып. 27. – 1962. – С. 119 – 134. 5. Полищук Д.Ф. Влияние граничных условий на спектр частот собственных продольных колебаний цилиндрических пружин // Машиноведение. – 1969. – № 3. – С. 31 – 35. 6. Асланян А.Г., Гулин А.В., Карташов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование, Т. 2, 1990. – № 8. – С. 21 – 30. 7. Григорьев А.Л., Вейтак И.А. Динамический анализ цилиндрической пружины при симметричных условиях закрепления её крайних витков // Вестник ХГПУ, 1999. – Вып. 42. – С. 125 – 134. 8. Григорьев А.Л. Операторный метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических пружин //

Информационные технологии. – ХГПУ. – Вып. 6. – Ч. 4. – Харьков, 1998. – С. 54 – 58. **9. Григорьев А.Л., Король С.А., Деряченко А.И.** Динамический анализ цилиндрических пружин дизельной топливной аппаратуры // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков, 2005 – №1 – С. 90 – 99. **10. Григорьев А.Л., Деряченко А.И.** Операторные уравнения для определения частот собственных колебаний цилиндрической пружины // Високи технології в машинобудуванні. – НТУ «ХПІ». – Харків, 2001. – Вип. 1 (4) – С. 111 – 119. **11. Григорьев А.Л., Деряченко А.И.** Алгебраический метод определения собственных частот продольных колебаний цилиндрической пружины // Високи технології в машинобудуванні. – НТУ «ХПІ». – Харків, 2002. – Вип. 1 (5). – С. 101 – 109. **12. Григорьев А.Л., Деряченко А.И.** Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високи технології в машинобудуванні. – НТУ «ХПІ». – Харків, 2004. – Вип. 2 (9). – С. 257 – 264. **13. Ванин В.А., Григорьев А.А.** Моделирование синфазных упругих колебаний в волноводах и сонотродах винтовой формы // Вестник НТУ «ХПИ». – 2012. – № 54. – С. 25 – 38. **14. Лавинский В.И., Григорьев А.А.** Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С. 92 – 104. **15. Наймарк А.М.** Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с. **16. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.** Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. литер., 1950. **17. Григорьев А.Л., Деряченко А.И.** Моделирование граничных условий при анализе колебаний пружины со шлифованным торцом // Вестник КГПУ. – Кременчуг, 2005. – Вып. № 1 (30). – С. 45 – 52.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Grunaujer, A. A., I. I. Tartakovskij and A. L. Grigor'ev. "O svyazi sily pruzhiny s zakonom ejo deformirovanija." *Teorija mehanizmov i mashin.* No. 42. Kharkov: Vishha shkola, 1985. 7–22. Print. **2.** Grunaujer, A. A., A. L. Grigor'ev and I. A. Veshtak. "Opredelenie funkcional'nyh zavisimostej dinamicheskikh harakteristik pruzhiny ot zakona ejo udarnogo deformirovanija". *Teorija mehanizmov i mashin.* No. 42. Kharkov: Vishha shkola, 1987. 40–49. Print. **3.** Grunaujer, A. A., A. L. Grigor'ev and I. A. Veshtak. "Prodol'nyj udar po cilindricheskoj pruzhine s malym indeksom i osobennosti ego dinamicheskogo rascheta." *Teorija mehanizmov i mashin.* No. 42. Kharkov: Vishha shkola, 1987. 49–55. Print. **4.** Tovstik, P. E. "Asimptoticheskij metod integrirovaniya uravnenij kolebanij pruzhin." *Vestnik LGU. Matematika, mehanika, astronomija.* No. 27. 1962. 119–134. Print. **5.** Polishhuk, D. F. "Vlijanie granichnyh uslovij na spektr chastot sobstvennyh prodol'nyh kolebanij cilindricheskijh pruzhin." *Mashinovedenie.* No. 3. 1969. 31–35. Print. **6.** Aslanjan, A. G., A. V. Gulin and S. V. Kartashov. "Raschet sobstvennyh chastot i form kolebanij cilindricheskoj pruzhiny." *Matematicheskoe modelirovanie.* Vol. 2. No. 8. 1990. 21–30. Print. **7.** Grigor'ev, A. L., and I. A. Veshtak. "Dinamicheskij analiz cilindricheskoj pruzhiny pri simmetrichnyh uslovijah zakrepleniya ejo krajnih vitkov." *Vestnik HGPU.* No. 42. Kharkov. 1999. 125–134. Print. **8.** Grigor'ev, A. L. "Operatornyj metod rascheta vyznuzhennyh kolebanij cilindricheskijh pruzhin. *Informacionnye tehnologii.* No. 6. Ch. 4. Kharkov: HGPU, 1998. 54–58. Print. **9.** Grigor'ev, A. L., S. A. Korol' and A. I. Derienko. "Dinamicheskij analiz cilindricheskijh pruzhin dizel'noj toplivnoj apparatury." *Dvigateli vnutrennego sgoranija.* No. 1. Kharkov. 2005. 90–99. Print. **10.** Grigor'ev, A. L., and A. I. Derienko. "Operatornye uravnenija dlja opredelenija chastot sobstvennyh kolebanij cilindricheskoj pruzhiny." *Vysoki tehnologii v mashinobuduvanni.* No. 1 (4). Harkiv: NTU «HPI», 2001. 111–119. Print. **11.** Grigor'ev, A. L., and A. I. Derienko. "Algebraicheskiy metod opredelenija sobstvennyh chastot prodol'nyh kolebanij cilindricheskoj pruzhiny." *Visoki tehnologii v mashinobuduvanni.* No. 1 (5). Harkiv: NTU «HPI», 2002. 101–109. Print. **12.** Grigor'ev, A. L., and A. I. Derienko. "Universal'naja matemateskaja model' cilindricheskoj pruzhiny." *Visoki tehnologii v mashinobuduvanni.* No. 2 (9). Harkiv: NTU «HPI», 2004. 257–264. Print. **13.** Vanin, V. A., and A. A. Grigor'ev. "Modelirovanie sinfaznyh uprugijh kolebanij v volnovodah i sonotrodah vintovoj formy." *Vestnik NTU «HPI».* No. 54. 2012. 25–38. Print. **14.** Lavinskij, V. I., and A. A. Grigor'ev. "Svjazannye kolebanija vintovogo cilindricheskogo stержnja." *Vestnik NTU «HPI».* No. 47. 2008. 92–104. Print. **15.** Najmark, A. M. *Linejnye differencial'nye operatory.* Moscow: Nauka, 1969. Print. **16.** Gantmaher, F. R., and M. G. Krejn. *Osciljacionnye matricy i jadra i malye kolebanija mehanicheskijh sistem.* Moscow, Leningrad: Gos. izd. tehn.-teor. liter., 1950. Print. **17.** Grigor'ev, A. L., and A. I. Derienko. "Modelirovanie granichnyh uslovij pri analize kolebanij pruzhiny so shlifovannyj torcom." *Vestnik KGPU.* No. 1 (30). Kremenchug. 2005. 45–52. Print.

*Поступила (received) 01.10.2014*