значення кватерніонів орієнтації // Вісник НТУ «ХПІ», – №37. –2013. – С. 130 – 140. **4.** *Плаксий Ю.А.* О фактическом порядке и областях эффективного применения алгоритмов определения ориентации в БИНС // Вестник Харьк. гос. политехн. унив. – 1999. – Вып. 57. – С. 87 – 90. **5.** *Демидович В.П.*, *Марон И.А.*, *Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, – 1967. – 368 с. **6.** *Плаксий Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, – № 2. – Вып. 11. – 1992. – С. 79 – 83.

Bibliography (transliterated): 1. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem.* Moscow: Nauka, 1992. Print. **2.** Tkachenko, A. I. "Povyshenie tochnosti vychislenija kinematicheskih parametrov." *Kibernet. i vychisl. tehn.* Vol. 19. Kyiv, 1973. 117–121. Print. **3.** Plaksij, Ju. A. "Pidvishhennja tochnosti reversivnyh shem algoritmiv viznachennja kvaternioniv orijentacii'." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 37. Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 130–140. Print. **4.** Plaksij, Ju. A. "O fakticheskom porjadke i oblastjah jeffektivnogo primenenija algoritmov opredelenija orientacii v BINS." *Vestnik Har'k. gos. politehn. univ.* Vol. 57. 1999. 87–90. Print. **5.** Demidovich, V. P., I. A. Maron and Je. Z. Shuvalova. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkcij, differencial'nye i integral'nye uravnenija*. Moscow: Nauka, 1967. Print. **6.** Plaksij, Yu. A. "Analiticheskie ocenki tochnosti algoritmov opredelenija orientacii' v kvaternionah dlja sluchaja reguljarnoj precessii' ob"ekta." *Vestnik Har'k. politehn. in-ta.* No. 2. Vol. 11. 1992. 79–83. Print.

Надійшла (received) 01.08.2014

УДК 517.95:519.63:532.5

І.М. ПРИСЯЖНЮК, канд. техн. наук, доц., РДГУ, Рівне;
Ю.Є. КЛИМЮК, канд. техн. наук, доц., РДГУ, Рівне;
О.В. ПРИСЯЖНЮК, аспірант, РДГУ, Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО-ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ В ДВОПОРИСТИХ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Сформовано математичну модель процесу однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масопереносу в нанопористому багатошаровому середовищі за умов превалювання конвективної складової процесу над іншими складовими. Побудовано алгоритм асимптотичного розвинення розв’язків відповідної модельної просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі у багатошаровому кусково-однорідному водонасиченому двопористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді, що розділяється на підобласті еквіпотенціальними поверхнями. Наведено результати комп’ютерних розрахунків, що дозволяють оцінити вплив фізико-хімічних характеристик процесу на розподіл забруднень в області.

Ключові слова: конвективно-дифузійне масоперенесення, нанопористі мікрочастинки, багатошарове середовище.

Вступ. Суттєво покращити показники очищення технологічних потоків дозволяє застосування багатошарових середовищ, кожен шар яких складається з різних за розміром та фізико-хімічними характеристиками мікрочастинок нанопористої структури з використанням принципу фільтрації в напрямку спадної крупності завантаження. Складність теоретичного опису властивостей неоднорідних середовищ з математичної точки зору пов'язана з тим, що фізичні процеси в таких середовищах описуються сингулярно збуреними крайовими задачами, коефіцієнти яких швидко змінюються на межах розділу різних компонентів матеріалу. Крім того, необхідно враховувати граничні умови на всіх поверхнях контакту, які в свою чергу також можуть змінюватися в процесі зовнішнього впливу.

Аналіз останніх досягнень і публікацій. У роботах [1 – 4] викладено основні результати розробки та досліджень асимптотичних методів для розв’язування сингулярно збурених типових крайових задач у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та крайових умов, задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних, а також в неоднорідних областях [4]. У [5 – 6] відповідну методику поширено на випадок модельних областей, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, а також на випадок багатошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищ. Чимало праць присвячено моделюванню аналогічних процесів масопереносу в нанопористих каталітичних середовищах [7 – 11]. Так у роботі [10] сформовано та досліджено математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективної дифузії в однорідному двопористому середовищі. Актуальним залишається питання моделювання та дослідження такого роду процесів у просторових багатошарових середовищах, що складаються з різних за розміром та характеристиками пористих мікрочастинок.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу процесу масопереносу забруднюючих речовин у багатошаровому кусково-однорідному водонасиченому двопористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді

$$G_{\mathrm{z}} = ABCDA_* B_* C_* D_* ,$$

що розділяється еквіпотенціальними поверхнями $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ($j = \overline{1, m-1}$) на m підобластей

$$G_{\mathrm{z}}^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1} ,\; G_{\mathrm{z}}^j = E_{(j-1)} F_{(j-1)} F_j E_j E_{*(j-1)} F_{*(j-1)} F_{*j} E_{*j}$$

$$(j = \overline{2, m-2}),\; G_{\mathrm{z}}^m = E_{m-1} F_{m-1} CDE_{*(m-1)} F_{*(m-1)} C_* D_* .$$

Середовище характеризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa = \{\kappa_j, (x, y, z) \in G_{\mathrm{z}}^j,\, j = \overline{1, m}\}$, активної пористості $\sigma = \{\sigma_j, (x, y, z) \in G_{\mathrm{z}}^j,$ $j = \overline{1, m}\}$ і дифузії $D = \{D_j = d_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_{\mathrm{z}}^j,\, j = \overline{1, m}\}$ міжчастинкового простору.

Кожна з підобластей складається з мікрочастинок різного розміру, $R = \{R_j, (x, y, z) \in G_{\mathrm{z}}^j,\, j = \overline{1, m}\}$ – це радіус мікрочастинок в j-му шарі, та різної структури, що характеризується відповідно коефіцієнтами пористості

$\sigma^* = \{\sigma_j^*, (x,y,z) \in G_z^j, \, j=\overline{1,m}\}$, дифузії $D^* = \{D_j^* = d_j^* \cdot \varepsilon, (x,y,z) \in G_z^j$, $j=\overline{1,m}\}$ в мікрочастинках, а також коефіцієнтами впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий $S = \{S_j = s_j \cdot \varepsilon, (x,y,z) \in G_z^j, \, j=\overline{1,m}\}$ і адсорбційної рівноваги $k = \{k_j, (x,y,z) \in G_z^j, \, j=\overline{1,m}\}$, де κ_j, σ_j, d_j, σ_j^*, d_j^*, s_j, k_j – деякі дійсні додатні числа ($j=\overline{1,m}$); ε – малий параметр. Відповідна модельна задача в області $G_z \times (0,R) \times (0,\infty)$ описується системою рівнянь:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\, \varphi, \; div\, \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$div(D \cdot grad\, \tilde{c}) - \vec{v} \cdot grad\, \tilde{c} - S\, \tilde{q}'_r\big|_{r=R} = \sigma \tilde{c}'_t, \tag{2}$$

$$D^* (\tilde{q}''_{rr} + \frac{2}{r} \tilde{q}'_r) = \sigma^* \tilde{q}'_t \tag{3}$$

з початковими та крайовими умовами:

$$\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \; \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \; \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0,$$

$$\tilde{c}(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \tilde{c}^0(x,y,z), \; \tilde{c}\Big|_{ABB_*A_*} = \tilde{c}_*(M,t), \; \tilde{c}\big|_{CDD_*C_*} = \tilde{c}^*(M,t); \tag{4}$$

$$\tilde{c}\big|_{BCC_*B_*} = \tilde{c}_{**}(M,t), \; \tilde{c}\big|_{ADD_*A_*} = \tilde{c}^{**}(M,t), \; \tilde{c}\big|_{ABCD} = \tilde{c}_{***}(M,t),$$

$$\tilde{c}\big|_{A_*B_*C_*D_*} = \tilde{c}^{***}(M,t); \tag{5}$$

$$\tilde{q}(x,y,z,r,t)\big|_{t=0} = \tilde{q}^0(x,y,z,r), \; \tilde{q}(x,y,z,r,t)\big|_{r=R} = k\, \tilde{c}(x,y,z,t),$$

$$\left.\frac{\partial\, \tilde{q}(x,y,z,r,t)}{\partial\, r}\right|_{r=0} = 0 \tag{6}$$

і умовами узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$, $j=\overline{1,m-1}$:

$$\varphi\,\big|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j-}} = \varphi\,\big|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j+}} = \varphi_{*j}^*, \; \kappa_j \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j-}} = \kappa_{j+1} \cdot \varphi'_{\vec{n}}\Big|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j+}}; \tag{7}$$

$$c\big|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j-}} = c\big|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j+}},$$

$$\left.\left(D_j \frac{\partial c}{\partial \vec{n}} - v_n^j c\right)\right|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j-}} = \left.\left(D_{j+1} \frac{\partial c}{\partial \vec{n}} - v_n^j c\right)\right|_{E_jF_jF_{*j}E_{*j+}}. \tag{8}$$

Тут $c(x, y, z, t)$ – концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, а $q(x, y, z, r, t)$ – концентрація у внутрішньочастинковому просторі, φ і $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал (квазіпотенціал) і вектор швидкості фільтрації,

$$0 < \varphi_* \le \varphi \le \varphi^* < \infty, \; |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x,y,z) + v_y^2(x,y,z) + v_z^2(x,y,z)} > v_* >> 0,$$

φ_*, φ^* – довільні дійсні додатні числа, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, M – довільна точка відповідної поверхні, v_n^j – нормальні складові швидкості на відповідних поверхнях розділу $E_jF_jF_{*j}E_{*j}$ ($j=\overline{1,m-1}$), φ_{*j}^* – невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу $E_jF_jF_{*j}E_{*j}$, $0<\varphi_*<\varphi_{*1}^*<\varphi_{*2}^*<...<\varphi_{*m-1}^*<\varphi^*<\infty$. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3) – (4), є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області, а також на поверхнях $E_jF_jF_{*j}E_{*j}$ ($j=\overline{1,m-1}$) розділу підобластей.

Постановка задачі в області комплексного потенціалу. Шляхом введення пари функцій $\psi=\psi(x,y,z)$, $\chi=\chi(x,y,z)$, просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x,y,z)$ і таких, що

$$\kappa\cdot grad\,\varphi = grad\,\psi\times grad\,\chi \quad [6],$$

а також заміною останніх чотирьох з умов (5) на умови:

$$\psi\Big|_{ADD_*A_*}=0,\ \psi\Big|_{BCC_*B_*}=Q_*,\ \chi\Big|_{ABCD}=0,\ \chi\Big|_{A_*B_*C_*D_*}=Q^*,$$

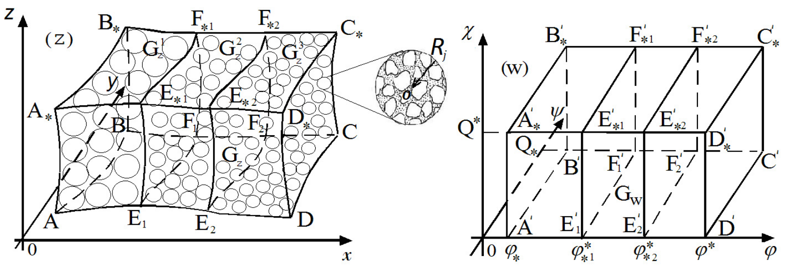
задача (1), (4), (7) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w=G_w^1\cup G_w^2\cup...\cup G_w^m$ (рис. 1 б),
де

$$G_w^1=\left\{w=(\varphi,\psi,\chi):\ \varphi_*\le\varphi\le\varphi_{*1}^*,\ 0\le\psi\le Q_*,\ \ 0\le\chi\le Q^*\right\};$$

$$G_w^j=\left\{w=(\varphi,\psi,\chi):\ \varphi_{*(j-1)}^*\le\varphi\le\varphi_{*j}^*,\ 0\le\psi\le Q_*,\ \ 0\le\chi\le Q^*\right\}\ (j=\overline{2,p-1});$$

$$G_w^m=\left\{w=(\varphi,\psi,\chi):\ \varphi_{*(m-1)}^*\le\varphi\le\varphi^*,\ 0\le\psi\le Q_*,\ \ 0\le\chi\le Q^*\right\};$$

φ_{*s}^* ($s=\overline{1,p-1}$), Q_*, Q^* – невідомі величини; $Q=Q_*\cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата.



а *б*

Рис. 1 – Просторова фізична область G_z – *а* та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w – *б* при $j=3$.

Припустимо, що ця задача є розв'язаною [5], зокрема, знайдено поле швидкостей $\vec{v}$ і параметри φ^*_{*j} ($j=\overline{1,m-1}$), Q_*, Q^*, Q. Здійснивши заміну змінних

$$x = x(\varphi,\psi,\chi),\ y = y(\varphi,\psi,\chi),\ z = z(\varphi,\psi,\chi)$$

у рівняннях (2), (3) та умовах (5), (6), (8) отримаємо відповідну *дифузійну задачу* для області $G_{\mathrm{w}}\times(0,R)\times(0,\infty)$:

$$D\left(\frac{v^2}{\kappa^2}c''_{\varphi\varphi}+b_{1,1}c''_{\psi\psi}+b_{1,2}c''_{\chi\chi}+b_{2,1}c'_{\psi}+b_{2,2}c'_{\chi}\right)-\frac{v^2}{\kappa}c'_{\varphi}-Sq'_r\Big|_{r=R}=\sigma c'_t; \quad (9)$$

$$D^*\left(q''_{rr}+\frac{2}{r}q'_r\right)=\sigma^* q'_t; \quad (10)$$

$$c(\varphi,\psi,\chi,t)\big|_{t=0}=c^0(\varphi,\psi,\chi),\ c(\varphi_*,\psi,\chi,t)=c_*(\psi,\chi,t),\ c\big|_{\varphi=\varphi^*}=c^*(\psi,\chi,t),$$

$$c\big|_{\psi=0}=c_{**}(\varphi,\chi,t),\ c\big|_{\psi=Q_*}=c^{**}(\varphi,\chi,t),\ c\big|_{\chi=0}=c_{***}(\varphi,\psi,t),$$

$$c\big|_{\chi=Q^*}=c^{***}(\varphi,\psi,t); \quad (11)$$

$$q(\varphi,\psi,\chi,r,t)\big|_{t=0}=q^0(\varphi,\psi,\chi,r)\ \ q(\varphi,\psi,\chi,r,t)\big|_{r=R}=k\,c(\varphi,\psi,\chi,t),$$

$$\left.\frac{\partial q(\varphi,\psi,\chi,r,t)}{\partial r}\right|_{r=0}=0; \quad (12)$$

$$c\left(\varphi^*_{*j-},\psi,\chi,t\right)=c\left(\varphi^*_{*j+},\psi,\chi,t\right),\ D_{j-1}c'_{\varphi}\left(\varphi^*_{*j-},\psi,\chi,t\right)+\kappa_{j-1}c\left(\varphi^*_{*j-},\psi,\chi,t\right)=$$

$$=D_j c'_{\varphi}\left(\varphi^*_{*j+},\psi,\chi,t\right)+\kappa_j c\left(\varphi^*_{*j+},\psi,\chi,t\right),\ (j=\overline{2,m}), \quad (13)$$

де

$$c=c(\varphi,\psi,\chi,t)=\tilde{c}\left(x(\varphi,\psi,\chi),y(\varphi,\psi,\chi),z(\varphi,\psi,\chi),t\right),$$

інші функції інтерпретуються аналогічно;

$$b_{1,1}=b_{1,1}(\varphi,\psi,\chi)=\psi'^2_x+\psi'^2_y+\psi'^2_z;\ b_{1,2}=b_{1,2}(\varphi,\psi,\chi)=\chi'^2_x+\chi'^2_y+\chi'^2_z;$$

$$b_{2,1}=b_{2,1}(\varphi,\psi,\chi)=\psi''_{xx}+\psi''_{yy}+\psi''_{zz};\ b_{2,2}=b_{2,2}(\varphi,\psi,\chi)=\chi''_{xx}+\chi''_{yy}+\chi''_{zz}.$$

Асимптотика розв'язку. Наближення розв'язків

$$c(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases}c_1,\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*_{*1},\\ c_2,\ \varphi^*_{*1}<\varphi<\varphi^*_{*2},\\ \ldots\\ c_m,\ \varphi^*_{*(m-1)}<\varphi<\varphi^*\end{cases}\quad \text{та}\quad q(\varphi,\psi,\chi,r,t)=\begin{cases}q_1,\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*_{*1},\\ q_2,\ \varphi^*_{*1}<\varphi<\varphi^*_{*2},\\ \ldots\\ q_m,\ \varphi^*_{*(m-1)}<\varphi<\varphi^*\end{cases}$$

задачі (9) – (13) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$c_j=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i c_{j,i}+I_{1,j}\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\tilde{\tilde{P}}_{j,i}+I_{2,j}\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\tilde{P}_{j,i}+I_{3,j}\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\Pi_i+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}P_{j,i/2}+$$

$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\Gamma_{j,i/2}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}H_{j,i/2}+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}E_{j,i/2}+R^{c}_{j,n+1},\ q_j=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}q_{j,i}+$$

$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{\frac{i}{2}}F_{j,\frac{i}{2}}+R^{q}_{j,n+1},\ \ j=\overline{1,m}. \qquad (14)$$

Тут $c_{j,i}=c_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)$, $q_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,r,t)$ ($j=\overline{1,m}$, $i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптотик,

$$\tilde{P}_{j,i}=\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j,\psi,\chi,t)\ (\ j=\overline{1,m-1},\ i=\overline{0,n+1}),\ \tilde{\tilde{P}}_{j,i}=\tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1},\psi,\chi,t)\ (\ j=\overline{2,m},\ i=\overline{0,n+1})$$

– функції типу примежового шару в околах $\varphi=\varphi^{*}_{*j}$ ($j=\overline{1,m-1}$) (поправки в околах поверхонь $E'_jF'_jF'_{*j}E'_{*j}$ ($j=\overline{1,m-1}$) розділу підобластей G^{j}_{w} ($j=\overline{1,m-1}$)) [4],

$$\Pi_i=\Pi_i(\xi,\psi,\chi,t)\ \ (i=\overline{0,n+1})$$

– функції типу примежового шару в околі $\varphi=\varphi^{*}$ (поправки на виході фільтраційної течії),

$$P_{j,i/2}=P_{j,i/2}\left(\varphi,\mu,\chi,t\right),\ \Gamma_{j,i/2}=\Gamma_{j,i/2}\left(\varphi,\eta,\chi,t\right),\ H_{j,i/2}=H_{j,i/2}\left(\varphi,\psi,\lambda,t\right),$$
$$E_{j,i/2}=E_{j,i/2}\left(\varphi,\psi,\lambda,t\right)\ (\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{0,2n+1})$$

– функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_*$, $\chi=0$, $\chi=Q^{*}$, що враховують вплив *бічних джерел забруднень*,

$$F_{j,i/2}\left(x,\rho_j,t\right)\ (\ i=\overline{0,2n+1})$$

– функції типу примежового шару в околах

$$r=R_j,\ \tilde{\phi}_j=(\varphi^{*}_{*j}-\varphi)\varepsilon^{-1},\ \tilde{\tilde{\phi}}_j=(\varphi-\varphi^{*}_{*j})\varepsilon^{-1}\ \ (\ j=\overline{1,m-1}),\ \xi=(\varphi^{*}-\varphi)\varepsilon^{-1},$$
$$\mu=\psi\varepsilon^{-1/2},\ \eta=(Q_*-\psi)\varepsilon^{-1/2},\ \lambda=\chi\varepsilon^{-1/2},\ \gamma=(Q^{*}-\chi)\varepsilon^{-1/2},$$
$$\rho_j=(R_j-r)\varepsilon^{-1/2}$$

– відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги),

$$R^{c}_{j,n+1}=R^{c}_{j,n+1}(\varphi,\psi,\chi,t,\varepsilon),\ R^{q}_{j,n+1}=R^{q}_{j,n+1}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t,\varepsilon)\ \ (\ j=\overline{1,m})$$

– залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі *принципу максимуму* аналогічно [3]),

$$I_{1,1}=0,\ I_{1,j}=1\ \ (\ j=\overline{2,m}),\ I_{2,m}=0,\ I_{2,j}=1\ \ (\ j=\overline{1,m-1}),\ I_{3,m}=1,\ I_{3,j}=0,$$
$$j=\overline{1,m-1}.$$

Підставляючи (14) в (9) – (13), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε [3], отримуємо для кожного такі задачі для знаходження регулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases}(\tilde{v}^2/\kappa_1)(c_{1,i})'_\varphi+\sigma_1(c'_{1,i})'_t=g^1_{1,i}(\varphi,\psi,\chi,t),\ i=\overline{0,n},\\ c_{1,i}(\varphi,\psi,\chi,0)=u^1_{1,i}(\varphi,\psi,\chi),\ c_{1,i}(\varphi_*,\psi,\chi,t)=u^2_{1,i}(\psi,\chi,t);\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases}(\tilde{v}^2/\kappa_j)(c_{i,j})'_\varphi+\sigma_j(c_{i,j})'_t=g^1_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)\ (j=\overline{1,m},\ i=\overline{0,n}),\\ c_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,0)=u^1_{j,i}(\varphi,\psi,\chi),\ c_{j,i}(\varphi^*_{*(j-1)},\psi,\chi,t)=u^2_{j,i}(\psi,\chi,t);\end{cases} \tag{16}$$

$$g^1_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,t)=0\,,\ u^1_{j,0}(\varphi,\psi,\chi)=c^0_j(\varphi,\psi,\chi)\ \ (j=\overline{1,m}),\ \varphi^*_{*0}=\varphi_*\,,$$

$$u^2_{1,0}(\psi,\chi,t)=c_*(\psi,\chi,t)\,,$$

$$g^1_{j,i}=d_j\left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2}(c_{j,i-1})''_{\varphi\varphi}+b_{1,1}(c_{j,i-1})''_{\psi\psi}+b_{1,2}(c_{j,i-1})''_{\chi\chi}+b_{2,1}(c_{j,i-1})'_{\psi}+b_{2,2}(c_{j,i-1})'_{\chi}\right)-$$

$$-s_j(q_{j,i-1})'_r\Big|_{r=R_j}\,,$$

$$u^1_{j,i}(\varphi,\psi,\chi)=0\,,\ u^2_{1,i}(\psi,\chi,t)=0\ \ (i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}),$$

$$u^2_{j,i}(\psi,\chi,t)=c_{j-1,i}(\varphi^*_{*\,j-1},\psi,\chi,t)\,(\,j=\overline{2,m});$$

$$\begin{cases}\sigma^*_j(q_{j,i})'_t=g^2_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,r,t),\\ q_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,r,0)=u^3_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,r);\end{cases} \tag{17}$$

$$g^2_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,\rho,t)=0\,,\ g^2_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,\rho,t)=d^*_j((q_{j,i-1})''_{rr}(\varphi,\psi,\chi,\rho,t)-$$

$$-2(q_{j,i-1})'_r(\varphi,\psi,\chi,\rho,t)/r)\,,\ u^3_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,r)=q^0_j(\varphi,\psi,\chi,r)\,,\ u^3_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,r)=0\,,$$

$$(\,i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,m}\,).$$

Розв’язки цих задач отримано у вигляді:

$$c_{1,0}(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases}c_*(\psi,\chi,t-f_1(\varphi,\psi,\chi)), & t\ge f_1(\varphi,\psi,\chi);\\ c^0_1(f_1^{-1}(f_1(\varphi,\psi,\chi)-t,\psi,\chi),\psi,\chi), & t<f_1(\varphi,\psi,\chi);\end{cases}$$

$$c_{1,i}(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases}\kappa_1\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g^1_{1,i}(\widehat{\varphi},\psi,\chi,f_1(\widehat{\varphi},\psi,\chi)+t-f_1(\varphi,\psi,\chi))}{v^2(\widehat{\varphi},\psi,\chi)}d\widehat{\varphi},\ t\ge f_1(\varphi,\psi,\chi);\\ \dfrac{1}{\sigma_1}\displaystyle\int_0^t g^1_{1,i}(f_j^{-1}(\widehat{t}+f_1(\varphi,\psi,\chi)-t,\psi,\chi),\psi,\chi,\widehat{t})\,d\widehat{t},\ t<f_1(\varphi,\psi,\chi);\end{cases}$$

$$c_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases}c_{j-1,0}(\varphi^*_{*(j-1)},\psi,\chi,t-f_j(\varphi,\psi,\chi)), & t\ge f_j(\varphi,\psi,\chi);\\ \tilde{c}^0_0(f_j^{-1}(f_j(\varphi,\psi,\chi)-t,\psi,\chi),\psi,\chi), & t<f_j(\varphi,\psi,\chi);\end{cases}$$

$$c_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,t)=\begin{cases}\kappa_j\int\limits_{\varphi^*_{*(j-1)}}^{\varphi}\dfrac{g^1_{j,i}(\hat\varphi,\psi,\chi,f_j(\hat\varphi,\psi,\chi)+t-f_j(\varphi,\psi,\chi))}{v^2(\hat\varphi,\psi,\chi)}d\hat\varphi+\\ \qquad +c_{j-1,i}(\varphi^*_{*(j-1)},\psi,\chi,t),\ t\ge f_j(\varphi,\psi,\chi);\\ \dfrac{1}{\sigma_j}\int\limits_0^t g^1_{j,i}(f_j^{-1}(\hat t+f_j(\varphi,\psi,\chi)-t,\psi,\chi),\psi,\chi,\hat t)\,d\hat t,\ t<f_j(\varphi,\psi,\chi);\end{cases}$$

$$q_j(\varphi,\psi,\chi,r,t)=q_j^0(\varphi,\psi,\chi,r)\,,\ q_{j,i}(x,r,t)=\frac{1}{\sigma_j^*}\int\limits_0^t g^2_{j,i}(\varphi,\psi,\chi,r,\tilde t)d\tilde t\ ,$$

де

$$f_1(\varphi,\psi,\chi)=\kappa_1\sigma_1\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{\tilde v^2(s,\psi,\chi)}$$

– час проходження забруднюючими частинками шляху від точки

$$(x(\varphi_*,\psi,\chi),\,y(\varphi_*,\psi,\chi),\,z(\varphi_*,\psi,\chi))\in ABB_*A_*$$

до точки $\left(x(\varphi,\psi,\chi),\,y(\varphi,\psi,\chi),\,z(\varphi,\psi,\chi)\right)\in G^1_{\text{z}}$ вздовж відповідної лінії течії, а

$$f_j(\varphi,\psi,\chi)=\kappa_j\sigma_j\int\limits_{\varphi^*_{*(j-1)}}^{\varphi}\frac{d\hat\varphi}{v^2(\hat\varphi,\psi,\chi)}$$

– від точки

$(x(\varphi^*_{*(j-1)},\psi,\chi),\,y(\varphi^*_{*(j-1)},\psi,\chi),\,z(\varphi^*_{*(j-1)},\psi,\chi)\Big)\in E_{j-1}F_{j-1}F_{*(j-1)}E_{*(j-1)}$ до точки

$$\left(x(\varphi,\psi,\chi),y(\varphi,\psi,\chi),z(\varphi,\psi,\chi)\right)\in G^j_{\text{z}}\ \ (j=\overline{2,m});$$

f_j^{-1} ($j=\overline{1,m}$) – функції, обернені відповідно до f_j ($j=\overline{1,m}$) відносно змінної φ (зазначимо, що такі функції існують, оскільки $v^2(\varphi,\psi,\chi)$ – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а κ_j, σ_j ($j=\overline{1,m}$) – додатньо-визначені сталі [5]).

Для знаходження примежових поправок Π_i $(i=\overline{0,n+1},\ j=\overline{1,m})$ в околі ділянки $\varphi=\varphi^*$ одержимо такі задачі:

$$\begin{cases}d_m(\Pi_i)''_{\xi\xi}+\kappa_m(\Pi_i)''_{i\xi}=g_i^3\left(\xi,\psi,\chi,t\right),\\ \Pi_i\left(\xi,\psi,\chi,t\right)\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ \Pi_i\left(0,\psi,\chi,t\right)=u_i^4\left(\psi,\chi,t\right);\end{cases}\tag{18}$$

де

$$g_0^3\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=0\,;\ u_0^4\left(\psi,\chi,t\right)=c^*\left(\psi,\chi,t\right)-c_{m,0}\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right);$$

$$g_1^3\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=\frac{\kappa_m^2}{v^2(\varphi^*,\psi,\chi)}\times\left(\sigma_m(\Pi_0)'_t-d_m\frac{V_1}{\kappa_m^2}(\Pi_0)''_{\xi\xi}-\frac{V_1}{\kappa_m}(\Pi_0)'_\xi\right);$$

$$u_i^4\left(\psi,\chi,t\right)=-c_{m,i}\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right)\ (i=\overline{1,n});\ g_i^3\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=\frac{\kappa_m^2}{v^2(\varphi^*,\psi,\chi)}\times$$

$$\times\left(\sigma_m(\Pi_{i-1})'_t-\sum_{s=1}^{i}\left(d_m\frac{V_s}{\kappa_m^2}(\Pi_{i-s})''_{\xi\xi}+\frac{V_s}{\kappa_m}(\Pi_{i-s})'_\xi\right)-d_m\sum_{s=0}^{i-2}\Big(B_{1,1,s}(\Pi_{i-2-s})''_{\psi\psi}+\right.$$

$$\left.+B_{2,1,s}(\Pi_{i-2-s})'_\psi+B_{1,2,s}(\Pi_{i-2-s})''_{\chi\chi}+B_{2,2,k}(\Pi_{i-2-s})'_\chi\Big)\right)\ (i=\overline{2,n+1});$$

$u_{n+1}^4\left(\psi,\chi,t\right)=0$; V_s, $B_{1,1,s}$, $B_{1,2,s}$, $B_{2,1,s}$, $B_{2,2,s}$ – коефіцієнти при s-тих степенях ε у розкладі відповідних функцій $v^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi)$, $b_{1,1}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi)$, $b_{1,2}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi)$, $b_{2,1}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi)$, $b_{2,2}(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi,\chi)$ у *ряд Тейлора* в околі $\varphi=\varphi^*$.

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$\Pi_0\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=\frac{d_m}{\kappa_m}\left(\tilde c^*\left(\psi,\chi,t\right)-c_0\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right)\right)e^{-\frac{\kappa_m}{d_m}\xi},$$

$$\Pi_i\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{d_m}\int_0^{\xi}\left(e^{-\frac{\kappa_m}{d_m}\hat\xi}\int_0^{\hat\xi}g_i^3(\hat{\hat\xi},\psi,\chi,t)e^{\frac{\kappa_m}{d_m}\hat{\hat\xi}}d\hat{\hat\xi}\right)d\hat\xi-c_i\left(\varphi^*,\psi,\chi,t\right)\ (i=\overline{1,n}),$$

$$\Pi_{n+1}\left(\xi,\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{d_m}\int_0^{\xi}\left(e^{-\frac{\kappa_m}{d_m}\hat\xi}\int_0^{\hat\xi}g_{n+1}^3(\hat{\hat\xi},\psi,\chi,t)e^{\frac{\kappa_m}{d_m}\hat{\hat\xi}}d\hat{\hat\xi}\right)d\hat\xi.$$

Задачі для знаходження поправок на поверхнях розділу шарів $\tilde P_{j,i}=$ $=\tilde P_{j,i}(\tilde\phi_j,\psi,\chi,t)$ ($j=\overline{1,m-1}$, $i=\overline{0,n+1}$) та $\tilde{\tilde P}_{j,i}=\tilde{\tilde P}_{j,i}(\tilde{\tilde\phi}_{j-1},\psi,\chi,t)$ ($j=\overline{2,m}$, $i=\overline{0,n+1}$) мають вигляд:

$$\begin{cases} d_j(\tilde P_{j,i})''_{\tilde\phi_j\tilde\phi_j}+\kappa_j(\tilde P_{j,i})'_{\tilde\phi_j}=g_{j,i}^4,\ d_{j+1}(\tilde{\tilde P}_{j+1,i})''_{\tilde{\tilde\phi}_j\tilde{\tilde\phi}_j}-\kappa_{j+1}(\tilde{\tilde P}_{j+1,i})'_{\tilde{\tilde\phi}_j}=g_{j,i}^5\\ (j=\overline{1,m-1},\ i=\overline{1,n}),\\ \tilde P_{j,i}(\tilde\phi_j,\psi,\chi,t)\underset{\tilde\phi_j\to\infty}{\to}0,\ \tilde{\tilde P}_{j+1,i}(\tilde{\tilde\phi}_j,\psi,\chi,t)\underset{\tilde{\tilde\phi}_j\to-\infty}{\to}0,\ \tilde P_{s,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)=\tilde{\tilde P}_{j+1,i}\left(0,\psi,\chi,t\right),\\ d_j\left((c_{j,i})'_{\tilde\phi_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)+(\tilde P_{j,i})'_{\tilde\phi_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)\right)+\kappa_j\left(c_{j,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)+\tilde P_{j,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)\right)=\\ =-d_{j+1}\left((c_{j+1,i})'_{\tilde{\tilde\phi}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)+(\tilde{\tilde P}_{j+1,i})'_{\tilde{\tilde\phi}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)\right)+\kappa_{j+1}\times\\ \times\left(c_{j+1,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)+\tilde{\tilde P}_{j+1,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)\right); \end{cases}\quad(19)$$

$$\begin{cases} d_j(\tilde{P}_{j,n+1})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} + \kappa_j(\tilde{P}_{j,n+1})'_{\tilde{\phi}_j} = g^4_{j,n+1},\, d_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,n+1})''_{\tilde{\tilde{\phi}}_j\tilde{\tilde{\phi}}_j} - \kappa_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,n+1})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_j} = \\ = g^5_{j,n+1} \;\; (j=\overline{1,m-1}), \\ \tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_j,\psi,\chi,t) \underset{\tilde{\phi}_j\to\infty}{\to} 0,\, \tilde{\tilde{P}}_{j+1,n+1}(\tilde{\tilde{\phi}}_j,\psi,\chi,t) \underset{\tilde{\tilde{\phi}}_j\to-\infty}{\to} 0,\, \tilde{P}_{j,n+1}\left(0,\psi,\chi,t\right) = \\ = \tilde{\tilde{P}}_{j+1,n+1}\left(0,\psi,\chi,t\right), \\ d_j(\tilde{P}_{j,n+1})'_{\tilde{\phi}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right) + \kappa_j\tilde{P}_{j,n+1}\left(0,\psi,\chi,t\right) = \\ = -d_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,n+1})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right) + \kappa_{j+1}\tilde{\tilde{P}}_{j+1,n+1}\left(0,\psi,\chi,t\right), \end{cases} \tag{20}$$

де

$$g^4_{j,0}=0;\; g^5_{j,0}=0;$$

$$g^4_{j,1} = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*_{*j},\psi,\chi)}\left(\sigma_j(\tilde{P}_{j,0})'_t - d_j\frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j^2}(\tilde{P}_{j,0})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j}(\tilde{P}_{j,0})'_{\tilde{\phi}_j}\right);$$

$$g^5_{j,1} = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*_{*j},\psi,\chi)}\left(\sigma_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,0})'_t - d_{j+1}\frac{\tilde{\tilde{V}}_{j,1}}{\kappa_{j+1}^2}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,0})''_{\tilde{\tilde{\phi}}_j\tilde{\tilde{\phi}}_j} - \frac{\tilde{\tilde{V}}_{j,1}}{\kappa_{j+1}}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,0})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_j}\right);$$

$$g^4_{j,i} = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*_{*j},\psi,\chi)}\Big(\sigma_j(\tilde{P}_{j,i-1})'_t -$$

$$-\sum_{s=1}^{i}\left(d_j\frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j^2}(\tilde{P}_{j,i-s})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j}(\tilde{P}_{j,i-s})'_{\tilde{\phi}_j}\right) - d_j\sum_{s=0}^{i-2}\Big(\tilde{B}_{1,1,j,s}(\tilde{P}_{j,i-2-s})''_{\psi\psi} +$$

$$+\tilde{B}_{2,1,j,s}(\tilde{P}_{j,i-2-s})'_{\psi} + \tilde{B}_{1,2,j,s}(\tilde{P}_{j,i-2-s})''_{\chi\chi} + \tilde{B}_{2,2,j,s}(\tilde{P}_{j,i-2-s})'_{\chi}\Big)\Big);$$

$$g^5_{j,i} = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*_{*j},\psi,\chi)}\Big(\sigma_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-1})'_t - \sum_{s=1}^{i}\Big(d_{j+1}\frac{\tilde{\tilde{V}}_{j,s}}{\kappa_{j+1}^2}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-s})''_{\tilde{\tilde{\phi}}_j\tilde{\tilde{\phi}}_j} +$$

$$+\frac{\tilde{\tilde{V}}_{j,s}}{\kappa_{j+1}}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-s})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_j}\Big) - d_{j+1}\sum_{s=0}^{i-2}\Big(\tilde{\tilde{B}}_{1,1,j,s}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-2-s})''_{\psi\psi} + \tilde{\tilde{B}}_{2,1,j,s}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-2-s})'_{\psi} +$$

$$+\tilde{\tilde{B}}_{1,2,j,s}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-2-s})''_{\chi\chi} + \tilde{\tilde{B}}_{2,2,j,s}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i-2-s})'_{\chi}\Big)\Big) \;\; (j=\overline{2,m-1},\; i=\overline{1,n+1});$$

$$\tilde{V}_{j,s},\ \tilde{\tilde{V}}_{j,s},\ \tilde{B}_{1,1,j,s},\ \tilde{\tilde{B}}_{1,1,j,s},\ \tilde{B}_{1,2,j,s},\ \tilde{\tilde{B}}_{1,2,j,s},\ \tilde{B}_{2,1,j,s},\ \tilde{\tilde{B}}_{2,1,j,s},\ \tilde{B}_{2,2,j,s},\ \tilde{\tilde{B}}_{2,2,j,s}$$
$$(j=\overline{1,m-1})$$

– коефіцієнти при s-тих степенях ε у розкладах функцій

$$v^2(\varphi^*_{*j}-\varepsilon\cdot\tilde{\phi}_j,\psi,\chi),\; v^2(\varphi^*_{*j}+\varepsilon\cdot\tilde{\tilde{\phi}}_j,\psi,\chi),\; b_{1,1}(\varphi^*_{*j}-\varepsilon\cdot\tilde{\phi}_j,\psi,\chi),$$

$$b_{1,1}(\varphi_{*j}^{*}+\varepsilon\cdot\tilde{\tilde{\phi}}_{j},\psi,\chi),\ b_{1,2}(\varphi_{*j}^{*}-\varepsilon\cdot\tilde{\phi}_{j},\psi,\chi),\ b_{1,2}(\varphi_{*j}^{*}+\varepsilon\cdot\tilde{\tilde{\phi}}_{j},\psi,\chi),$$
$$b_{2,1}(\varphi_{*j}^{*}-\varepsilon\cdot\tilde{\phi}_{j},\psi,\chi),\ b_{2,1}(\varphi_{*j}^{*}+\varepsilon\cdot\tilde{\tilde{\phi}}_{j},\psi,\chi),\ b_{2,2}(\varphi_{*j}^{*}-\varepsilon\cdot\tilde{\phi}_{j},\psi,\chi),$$
$$b_{2,2}(\varphi_{*j}^{*}+\varepsilon\cdot\tilde{\tilde{\phi}}_{j},\psi,\chi)$$

у ряд Тейлора відповідно в околі $\varphi=\varphi_{*j}^{*}$ ($j=\overline{1,m-1}$).

Розв’язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\tilde{P}_{j,0}\left(\tilde{\phi}_j,\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{2\left(\kappa_{j+1}-\kappa_j\right)}\Big(d_{j+1}(c_{j+1,0})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)+d_j(c_{j,0})'_{\tilde{\phi}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)+$$
$$+\kappa_j c_{j,0}\left(0,\psi,\chi,t\right)-\kappa_{j+1}c_{j+1,0}\left(0,\psi,\chi,t\right)\Big)e^{-\frac{\kappa_j}{d_j}\cdot\tilde{\phi}_j}\quad(j=\overline{1,m-1}),$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{j,0}\left(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1},\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{2\left(\kappa_j-\kappa_{j-1}\right)}\Big(d_j(c_{j,0})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}}\left(0,\psi,\chi,t\right)-d_{j-1}(c_{j-1,0})'_{\tilde{\phi}_{j-1}}\left(0,\psi,\chi,t\right)+$$
$$+\kappa_{j-1}c_{j-1,0}\left(0,\psi,\chi,t\right)-\kappa_j c_{j,0}\left(0,\psi,\chi,t\right)\Big)e^{\frac{\kappa_j}{d_j}\cdot\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}}\quad(j=\overline{2,m}),$$

$$\tilde{P}_{j,i}\left(\tilde{\phi}_j,\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{d_j}\int_0^{\tilde{\phi}_j}\left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\varphi}}\int_0^{\hat{\varphi}}g_{j,i}^4(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\chi,t)e^{\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}+$$
$$+\frac{1}{\kappa_{j+1}-\kappa_j}\Big(d_j(c_{j,i})'_{\tilde{\phi}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)+d_{j+1}(c_{j+1,i})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_j}\left(0,\psi,\chi,t\right)+$$
$$+\kappa_j c_{j,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)-\kappa_{j+1}c_{j+1,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)\Big)\ (j=\overline{1,m-1},\ i=\overline{1,n}),$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{j,i}\left(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1},\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{d_j}\int_0^{\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}}\left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\varphi}}\int_0^{\hat{\varphi}}g_{j,i}^5(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\chi,t)e^{\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}+\frac{1}{\kappa_j-\kappa_{j-1}}\times$$
$$\times\Big(d_{j-1}(c_{j-1,i})'_{\tilde{\phi}_{j-1}}\left(0,\psi,\chi,t\right)+d_j\cdot(c_{j,i})'_{\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}}\left(0,\psi,\chi,t\right)+\kappa_{j-1}c_{j-1,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)-$$
$$-\kappa_j c_{j,i}\left(0,\psi,\chi,t\right)\Big)\ (j=\overline{2,m},\ i=\overline{1,n}),$$

$$\tilde{P}_{j,n+1}\left(\tilde{\phi}_j,\psi,\chi,t\right)=\frac{1}{d_j}\int_0^{\tilde{\phi}_j}\left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\varphi}}\int_0^{\hat{\varphi}}g_{j,n+1}^4(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\chi,t)e^{\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}\ \ (j=\overline{1,m-1}),$$

$$\tilde{\tilde{P}}_{j,n+1}\left(\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d_j}\int_0^{\tilde{\tilde{\phi}}_{j-1}}\left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\varphi}}\int_0^{\hat{\varphi}}g_{j,n+1}^5(\hat{\hat{\varphi}},\psi,\chi,t)e^{\frac{\kappa_j}{d_j}\hat{\hat{\varphi}}}d\hat{\hat{\varphi}}\right)d\hat{\varphi}\ \ (j=\overline{2,m}).$$

Для врахування впливу бічних джерел забруднення будуємо поправки $P_{j,i/2}(\varphi,\mu,\chi,t)$, $\Gamma_{j,i/2}(\varphi,\eta,\chi,t)$, $H_{j,i/2}(\varphi,\psi,\lambda,t)$, $E_{j,i/2}(\varphi,\psi,\gamma,t)$ ($j=\overline{1,m}$ $i=\overline{0,2n+1}$), які знаходимо в результаті розв'язання наступних задач [6]:

$$\begin{cases} b_{1,1}(\varphi,0,\eta)\,d_j(P_{j,i})''_{\mu\mu}-v^2(\varphi,0,\chi)(P_{j,i})'_{\varphi}=g^6_{j,i}(\varphi,\mu,\chi,t), \\ P_{(j,i)}(\varphi,\mu,\chi,t)\underset{\mu\to\infty}{\to}0,\ P_{(j,i)}(\varphi,0,\chi,t)=u^6_{j,i}(\varphi,\chi,t); \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} b_{1,1}(\varphi,Q_*,\chi)\,d_j(\Gamma_{j,i})''_{\eta\eta}-v^2(\varphi,Q_*,\chi)(\Gamma_{j,i})'_{\varphi}=g^7_{j,i}(\varphi,\eta,\chi,t), \\ \Gamma_{(j,i)}(\varphi,\eta,\chi,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0,\ \Gamma_{(j,i)}(\varphi,0,\chi,t)=u^7_{j,i}(\varphi,\chi,t); \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} b_{1,2}(\varphi,\psi,0)\,d_j(H_{j,i})''_{\lambda\lambda}-v^2(\varphi,\psi,0)(H_{j,i})'_{\varphi}=g^8_{j,i}(\varphi,\psi,\lambda,t), \\ H_{(j,i)}(\varphi,\psi,\lambda,t)\underset{\lambda\to\infty}{\to}0,\ H_{(j,i)}(\varphi,\psi,0,t)=u^8_{j,i}(\varphi,\psi,t); \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} b_{1,2}\left(\varphi,\psi,Q^*\right)d_j(E_{j,i})''_{\gamma\gamma}-v^2\left(\varphi,\psi,Q^*\right)(E_{j,i})'_{\varphi}=g^9_{j,i}(\varphi,\psi,\gamma,t), \\ E_{j,i}(\varphi,\psi,\gamma,t)\underset{\gamma\to\infty}{\to}0,\ E_{j,i}(\varphi,\psi,0,t)=u^9_{j,i}(\varphi,\psi,t), \end{cases} \tag{24}$$

де

$$g^6_{j,0}(\varphi,\mu,\chi,t)=0;\ g^6_{j,\frac{1}{2}}(\varphi,\mu,\chi,t)=\tilde V_{\frac{1}{2}}(P_{j,0})'_{\varphi}-\tilde B_{11,\frac{1}{2}}d_j(P_{j,0})''_{\mu\mu}-\tilde B_{21,\frac{1}{2}}d_j(P_{j,0})'_{\mu};$$

$$g^6_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\mu,\chi,t)=\sum_{s=1}^{i}\tilde V_{\frac{i}{2}}(P_{j,\frac{i-s}{2}})'_{\varphi}-d_j\left(\sum_{s=1}^{i}\left(\tilde B_{1,1,\frac{i}{2}}(P_{j,\frac{i-s}{2}})''_{\mu\mu}+\tilde B_{2,1,\frac{i}{2}}(P_{j,\frac{i-s}{2}})'_{\mu}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{s=0}^{i-2}\tilde V_{\frac{i}{2}}(P_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\varphi\varphi}-\sum_{s=0}^{i-2}\tilde B_{1,2,\frac{i}{2}}(P_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\chi\chi}-\sum_{s=0}^{i-2}\tilde B_{2,2,\frac{i}{2}}(P_{j,\frac{i-2-s}{2}})'_{\chi}\right)\ (i=\overline{2,2n+1});$$

$\tilde V_s$, $\tilde B_{1,1,s}$, $\tilde B_{1,2,s}$, $\tilde B_{2,1,s}$ і $\tilde B_{2,2,s}$ – коефіцієнти при s-их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій

$$v^2(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\mu,\chi),\ b_{1,1}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\mu,\chi),\ b_{1,2}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\mu,\chi),\ b_{2,1}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\mu,\chi)\ \text{і}\ b_{2,2}(\varphi,\sqrt{\varepsilon}\mu,\chi)$$

в ряд Тейлора в околі $\psi=0$;

$$u^6_{j,0}(\varphi,\chi,t)=c_{j**}(\varphi,\chi,t)-c_{(j,0)}(\varphi,0,\chi,t)-\Pi_{(j,0)}(\varphi,0,\chi,t);$$

$$u^6_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\chi,t)=\begin{cases} -c_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi,0,\chi,t)-\Pi_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi,0,\chi,t), & \text{якщо } i \text{ парне}, \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне},\quad i=\overline{1,2n+1}; \end{cases}$$

$$g^7_{j,0}(\varphi,\eta,\chi,t)=0;\ g^7_{j,\frac{1}{2}}(\varphi,\eta,\chi,t)=\tilde V^*_{\frac{1}{2}}\Gamma'_{(j,0)\varphi}-\tilde B^*_{1,1,\frac{1}{2}}d_j\Gamma''_{0\eta\eta}-\tilde B^*_{2,1,\frac{1}{2}}d_j\Gamma'_{0\eta};$$

$$g^7_{j,\frac{i}{2}}\left(\varphi,\eta,\chi,t\right)=\sum_{s=1}^{i}\tilde{V}^*_{\frac{i}{2}}(\Gamma_{j,\frac{i-s}{2}})'_\varphi-d_j\times$$

$$\times\left(\sum_{s=1}^{i}(\tilde{B}^*_{1,1,\frac{i}{2}}(\Gamma_{j,\frac{i-s}{2}})''_{\eta\eta}+\tilde{B}^*_{2,1,\frac{i}{2}}(\Gamma_{j,\frac{i-s}{2}})'_\eta)-\sum_{s=0}^{i-2}\tilde{V}^*_{\frac{i}{2}}(\Gamma_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\varphi\varphi}-\right.$$

$$\left.-\sum_{s=0}^{i-2}\tilde{B}^*_{1,2,\frac{i}{2}}(\Gamma_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\chi\chi}-\sum_{s=0}^{i-2}\tilde{B}^*_{2,2,\frac{i}{2}}\times(\Gamma_{j,\frac{i-2-s}{2}})'_\chi\right),\ i=\overline{2,2n+1};$$

$\tilde{V}^*_s$, $\tilde{B}^*_{11,s}$, $\tilde{B}^*_{12,s}$, $\tilde{B}^*_{21,s}$ і $\tilde{B}^*_{22,s}$ – коефіцієнти при s-их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій

$$v^2(\varphi,Q_*-\sqrt{\varepsilon}\eta,\chi),\ b_{1,1}(\varphi,Q_*-\sqrt{\varepsilon}\eta,\chi),\ b_{1,2}(\varphi,Q_*-\sqrt{\varepsilon}\eta,\chi),\ b_{2,1}(\varphi,Q_*-$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\eta,\chi)\ \text{і}\ b_{2,2}(\varphi,Q_*-\sqrt{\varepsilon}\eta,\chi)$$

в ряд Тейлора в околі $\psi=Q_*$;

$$u^7_{j,0}(\varphi,\chi,t)=c^{**}_j(\varphi,\chi,t)-c_{(j,0)}(\varphi,Q^*,\chi,t)-\Pi_{(j,0)}(\varphi,Q^*,\chi,t);$$

$$u^7_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\chi,t)=\begin{cases}-c_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi,Q^*,\chi,t)-\Pi_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi,Q^*,\chi,t), & \text{якщо } i \text{ парне},\\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне},\quad i=\overline{1,2n+1};\end{cases}$$

$$g^8_{j,0}\left(\varphi,\psi,\lambda,t\right)=0,\ g^8_{j,\frac{1}{2}}\left(\varphi,\psi,\lambda,t\right)=\overline{V}_{\frac{1}{2}}(H_{j,0})'_\varphi-$$

$$-d_j(\overline{B}_{1,2,\frac{1}{2}}(H_{j,0})''_{\lambda\lambda}-\overline{B}_{2,2,\frac{1}{2}}(H_{j,0})'_\lambda),\ g^8_{j,\frac{i}{2}}\left(\varphi,\psi,\lambda,t\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{i}\overline{V}_{\frac{i}{2}}(H_{j,\frac{i-s}{2}})'_\varphi-d_j\left(\sum_{s=1}^{i}(\overline{B}_{1,2,\frac{i}{2}}(H_{j,\frac{i-s}{2}})''_{\lambda\lambda}+\overline{B}_{2,2,\frac{i}{2}}(H_{j,\frac{i-s}{2}})'_\lambda)-\sum_{s=0}^{i-2}\overline{V}_{\frac{i}{2}}(H_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\varphi\varphi}-\right.$$

$$\left.-\sum_{s=0}^{i-2}\overline{B}_{1,1,\frac{i}{2}}(H_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\psi\psi}-\sum_{s=0}^{i-2}\overline{B}_{2,1,\frac{i}{2}}(H_{j,\frac{i-2-s}{2}})'_\psi\right),\ i=\overline{2,2n+1};$$

$\overline{V}_s$, $\overline{B}_{1,1,s}$, $\overline{B}_{1,2,s}$, $\overline{B}_{2,1,s}$ і $\overline{B}_{2,2,s}$ – коефіцієнти при s-их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій

$$v^2(\varphi,\psi,\sqrt{\varepsilon}\lambda),\ b_{1,1}(\varphi,\psi,\sqrt{\varepsilon}\lambda),\ b_{1,2}(\varphi,\psi,\sqrt{\varepsilon}\lambda),\ b_{2,1}(\varphi,\psi,\sqrt{\varepsilon}\lambda)\ \text{і}\ b_{2,2}(\varphi,\psi,\sqrt{\varepsilon}\lambda)$$

в ряд Тейлора в околі $\chi=0$;

$$u^8_{j,0}(\varphi,\psi,t)=c_{j***}(\varphi,\psi,t)-c_{(j,0)}(\varphi,\psi,0,t)-\Pi_{(j,0)}(\varphi,\psi,0,t);$$

$$u^8_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}-c_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,0,t)-\Pi_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,0,t), & \text{якщо } i \text{ парне},\\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне},\quad i=\overline{1,2n+1};\end{cases}$$

$$g^9_{j,0}\left(\varphi,\psi,\gamma,t\right)=0;\ g^9_{j,\frac{1}{2}}\left(\varphi,\psi,\gamma,t\right)=\overline{V}^*_{\frac{1}{2}}(E_{j,0})'_\varphi-d_j(\overline{B}^*_{1,2,\frac{1}{2}}(E_{j,0})''_{\gamma\gamma}-$$

$$-\overline{B}^*_{2,2,\frac{1}{2}}(E_{j,0})'_\gamma);\; g^9_{j,\frac{i}{2}}\left(\varphi,\psi,\gamma,t\right)=\sum_{s=1}^{i}\overline{V}^*_{\frac{i}{2}}(E_{j,\frac{i-s}{2}})'_\varphi -$$

$$-d_j\left(\sum_{s=1}^{i}\left(\overline{B}^*_{1,2,\frac{i}{2}}(E_{j,\frac{i-s}{2}})''_{\gamma\gamma}+\overline{B}^*_{2,2,\frac{i}{2}}(E_{j,\frac{i-s}{2}})'_\gamma\right)-\sum_{s=0}^{i-2}\overline{V}^*_{\frac{i}{2}}(E_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\varphi\varphi}-\right.$$

$$\left.-\sum_{s=0}^{i-2}\overline{B}^*_{1,1,\frac{i}{2}}(E_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\psi\psi}-\sum_{s=0}^{i-2}\overline{B}^*_{2,1,\frac{i}{2}}(E_{j,\frac{i-2-s}{2}})'_\psi\right),\; i=\overline{2,2n+1};$$

$\overline{V}^*_s$, $\overline{B}^*_{1,1,s}$, $\overline{B}^*_{1,2,s}$, $\overline{B}^*_{2,1,s}$ і $\overline{B}^*_{2,2,s}$ – коефіцієнти при s-их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в розкладі функцій

$$v^2(\varphi,\psi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\gamma),\; b_{1,1}(\varphi,\psi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\gamma),\; b_{1,2}(\varphi,\psi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\gamma),$$
$$b_{2,1}(\varphi,\psi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\gamma) \text{ і } b_{2,2}(\varphi,\psi,Q^*-\sqrt{\varepsilon}\gamma)$$

в ряд Тейлора в околі $\chi=Q^*$;

$$u^9_{j,0}(\varphi,\psi,t)=c^{***}_j(\varphi,\psi,t-c_{(j,0)}(\varphi,\psi,Q^{**},t)-\varPi_{(j,0)}(\varphi,\psi,Q^{**},t);$$

$$u^9_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}-c_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi,\psi,Q^*,t)-\varPi_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi,\psi,Q^*,t), & \text{якщо } i \text{ парне,}\\ 0, \quad \text{якщо } i \text{ непарне,} & i=\overline{1,2n+1}.\end{cases}$$

Поправки $F_{j,\frac{i}{2}}(x,\rho_j,t)$, які забезпечують виконання другої та третьої з умов (12), знаходяться з наступних задач:

$$\begin{cases}d^*_j(F_{j,\frac{i}{2}})''_{\rho\rho}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t)-\sigma^*_j(F_{j,\frac{i}{2}})'_t(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t)=\\ =g^{10}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t),\\ F_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,0)=0, F_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,\chi,0,t)=\\ =u^{10}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,\chi,t), (F_{j,\frac{i}{2}})'_\rho(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t)\Big|_{\rho_j\to\infty}=0,\end{cases} \tag{25}$$

де

$$g^{10}_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t)=0;\; g^{10}_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t)=-2d^*_j\sum_{s=1}^{i}\frac{\rho_j^{s-1}}{R_j^s}(F_{j,\frac{i-s}{2}})'_{\rho_j}(\varphi,\psi,\chi,\rho_j,t);$$

$$u^{10}_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,t)=k_j(c_{j,0}+I_{1,j}\tilde{\tilde{P}}_{j,0}+I_{2,j}\tilde{P}_{j,0}+I_{3,j}\varPi_{j,0}+P_{j,0}+\varGamma_{j,0}+H_{j,0}+E_{j,0})-$$
$$-q_{j,0}(\varphi,\psi,\chi,R_j,t)$$

$$u^{10}_{j,\frac{i}{2}} = \begin{cases} k_j(c_{j,\frac{i}{2}} + I_{1,j}\tilde{\tilde{P}}_{j,\frac{i}{2}} + I_{2,j}\tilde{P}_{j,\frac{i}{2}} + I_{3,j}\Pi_{j,\frac{i}{2}} + P_{j,\frac{i}{2}} + \Gamma_{j,\frac{i}{2}} + H_{j,\frac{i}{2}} + E_{j,\frac{i}{2}}) - \\ -q_{j,\frac{i}{2}}(\varphi,\psi,\chi,R_j,t), \ i \text{ парне}; \\ k_j(P_{j,\frac{i}{2}} + \Gamma_{j,\frac{i}{2}} + H_{j,\frac{i}{2}} + E_{j,\frac{i}{2}}), \quad \text{якщо } i \text{ непарне}. \end{cases}$$

Чисельні розрахунки. Для проведення комп'ютерного моделювання процесу масопереносу забруднюючих речовин у двошаровому кусково-однорідному двопористому середовищі, що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії та ін., використано ідеальний фільтраційний фон для області G_z, обмеженої поверхнями

$$f_1(x,y,z) = (x+20.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033 ,$$

$$f_2(x,y,z) = (x-420.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033 ,$$

$$f_3(x,y,z) = (x-200)^2 + z^2 + (y-615.536707)^2 - 418885.4382 ,$$

$$f_4(x,y,z) = (x-200)^2 + (y+615.53670744)^2 + z^2 - 418885.4382 ,$$

$$f_5(x,y,z) = f_6(x,y,z) = 160000y^2 + (x(x-400) + y^2 + z^2)^2 - 932548.33996z^2 ,$$

вибрано положення поверхні розділу EFF_*E_*:

$f_*(x,y,z) = (x+2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098$ [5].

При цьому перша підобласть складається з мікрочастинок радіусом $R_1 = 10^{-4}$ м, а друга – з частинок радіусом $R_2 = 5\cdot 10^{-5}$ м, і розглянуто два випадки різного задання відповідних коефіцієнтів:

1) $\kappa_1 = 0.45$ м/добу, $\kappa_2 = 0.3$ м/добу, $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_2 = 0.5$, $D_1 = 0.008$ м^2/добу, $D_2 = 0.005$ м^2/добу, $\sigma_1^* = 0.37$, $\sigma_2^* = 0.48$, $D_1^* = 8\cdot 10^{-7}$ м^2/добу, $D_2^* = 6\cdot 10^{-7}$ м^2/добу, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.95$, $S_1 = 0.005$, $S_2 = 0.004$;

2) $\kappa_1 = 0.45$ м/добу, $\kappa_1 = 0.375$ м/добу, $\sigma_1 = 0.7$, $\sigma_2 = 0.6$, $D_1 = 0.008$ м^2/добу, $D_2 = 0.007$ м^2/добу, $\sigma_1^* = 0.5$, $\sigma_2^* = 0.8$, $D_1^* = 6\cdot 10^{-7}$ м^2/добу, $D_2^* = 4\cdot 10^{-7}$ м^2/добу, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.95$ $S_1 = 0.01$, $S_2 = 0.008$.

Відповідно побудовано розрахункові динамічні сітки G_z^1 при $\varphi_* = -7.14$, $\varphi^* = 10.2$ (рис. 2), G_z^2 при $\varphi_* = -7.9$, $\varphi^* = 9.03$ (мають схожий вигляд), які отримані в залежності від вибору задання відповідних коефіцієнтів при $N = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = n_2 = 10$. Значення φ_* та φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища v_{cep} була приблизно рівною $1\,\text{м/добу}$. Також для областей G_z^j ($j=\overline{1,2}$) знайдено фільтраційні витрати, які відповідно становлять $Q\ =1.91\,\text{м}^3\text{/добу}$ та $Q=2.38\,\text{м}^3\text{/добу}$, потенціали на поверхнях розділу $\varphi_*^*=3.06$ і $\varphi_*^*=1.13$ та обчислено величини швидкостей фільтрації |v| (рис. 3).

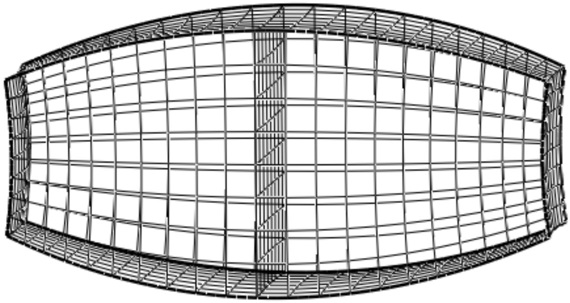
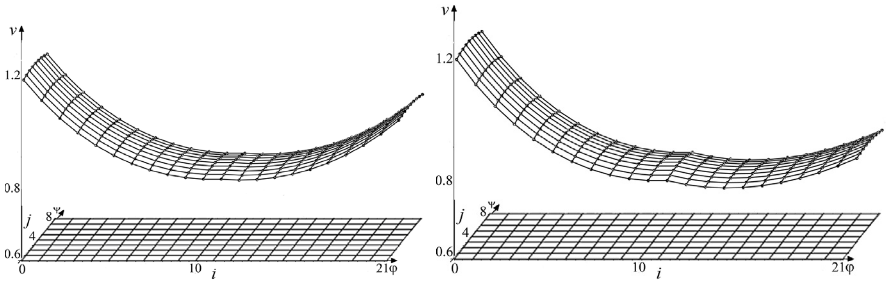


Рис. 2 – Розрахована сіткова область G_z .



а *б*

Рис. 3 – Розподіл величин швидкостей фільтрації вздовж поверхонь течій $\chi(x,y,z)=\chi_4$; *а* – для області G_z^1 , *б* – для області G_z^2 .

На рис. 4 проілюстровано вплив дифузії та адсорбції на розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі. Криві 1 та 2 відповідають конвективній складовій розв’язку

$$c_0(\varphi,\psi_4,\chi_4,t)=\left\{c_{1,0}(\varphi,\psi_4,\chi_4,t),\ \varphi<\varphi_*^*,\ c_{2,0}(\varphi,\psi_4,\chi_4,t),\ \varphi\geq\varphi_*^*\right.$$

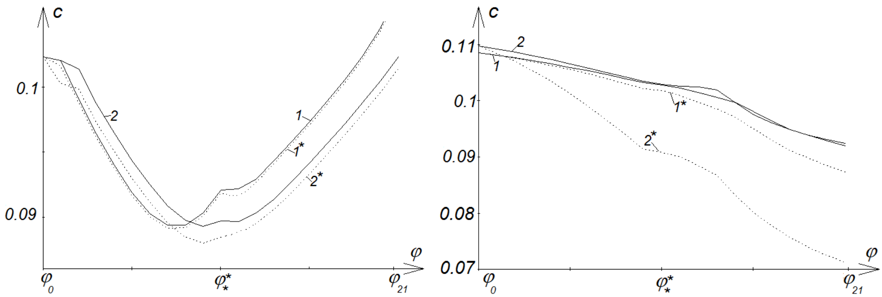
для областей G_z^1 та G_z^2, а криві 1^* та 2^* – розв’язку

$$c(\varphi,\psi_4,\chi_4,t)=\left\{c_1(\varphi,\psi_4,\chi_4,t),\ \varphi<\varphi_*^*,\ c_2(\varphi,\psi_4,\chi_4,t),\ \varphi\geq\varphi_*^*\right.$$

для областей G_z^1 та G_z^2 відповідно в моменти часу $t=1\,\textit{доба}\,(a)$ та $t=15\ \textit{діб}\ (\textit{б})$ за таких початкових та крайових умов:

$$c_1^0(\varphi,\psi,\chi)=c_2^0(\varphi,\psi,\chi)=0.1+0.01(\frac{\varphi_0^2-\varphi^2}{100}+1)tg(\frac{\psi^2+\chi^2}{50}),\ c_*(\psi,\chi,t)=0.1+$$

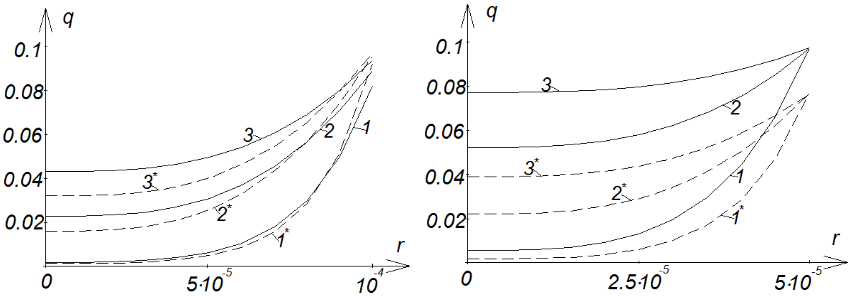
$$+0.01tg(\frac{\psi^2+5t+\chi^2}{50}),\ q_j^0(\varphi,\psi,\chi,r)=k_j(\frac{2}{\pi}arctg(\frac{100(r-R_j)}{R_j})+1)c_j^0(\varphi,\psi,\chi).$$



а б

Рис. 4 – Розподіл концентрації забруднюючої речовини вздовж лінії течії (φ,ψ_4,χ_4) для областей G_z^1, G_z^2; *а* – в моменти часу $t=1$ доба, *б* – в моменти часу $t=15$ діб .

На рис. 5 зображено накопичення забруднюючої речовини в мікрочастинках в першому шарі $q_1(\varphi_5,\psi_1,\chi_4,r,t)$ (рис. 5 *а*) та в другому шарі $q_2(\varphi_{15},\psi_1,\chi_4,r,t)$ (рис. 5 *б*), де $\varphi_5=-3.39$, $\varphi_{15}=4.52$, $\psi_1=2.9$, $\psi_4=3.14$, $\chi_4=0$. Криві 1 – 3 відповідають значенням концентрації забруднюючої речовини у виділених частинках в моменти часу $t=1$ доба, $t=15$ діб, $t=20$ діб в першому випадку задання коефіцієнтів (область G_z^1), а криві 1^*–3^* – в другому (область G_z^2).



а б

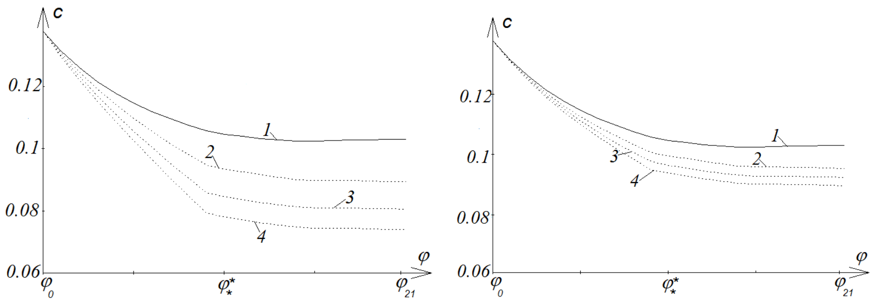
Рис. 5 – Розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікрочастинках; *а* – в шарі $q_1(\varphi_5,\psi_1,\chi_4,r,t)$; *б* – в шарі $q_2(\varphi_{15},\psi_1,\chi_4,r,t)$.

Вплив фізико-хімічних характеристик мікрочастинок на розподіл концентрації забруднюючої речовини в області G_z^1 проілюстровано на рис. 6.

Зокрема досліджено вплив коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий в першій підобласті S_1 (рис. 6 *а*) та коефіцієнта адсорбційної рівноваги в першій підобласті $k_1 = 0.8$ (рис. 6 *б*) на розподіл концентрації забруднюючої речовини у міжчастинковому просторі за таких вхідних даних:

$$\kappa_1 = 0.45\,\text{м/добу},\ \kappa_2 = 0.3\,\text{м/добу},\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0.7,\ D_1 = D_2 = 0.008\,\text{м}^2/\text{добу},$$
$$D_1^* = 10^{-8}\,\text{м}^2/\text{добу},\ D_2^* = 10^{-6}\,\text{м}^2/\text{добу},\ k_2 = 0.9,\ S_2 = 0.005,\ \sigma_1^* = \sigma_2^* = 0.3,$$
$$R_1 = R_2 = 10^{-5}\,м.$$

Суцільна крива рис. 6 *а*, *б* відповідає конвективній складовій процесу (відсутній вплив дифузії та адсорбції пористими мікрочастинками). Крива 1 рис. 6 *а* відповідає значенню $S_1 = 0.005$, крива 2 – $S_1 = 0.009$, крива 3 – $S_1 = 0.012$, а на рис. 6 *б* крива 2 відповідає значенню $k_1 = 0.4$, крива 2 – $k_1 = 0.65$, крива 3 – $k_1 = 0.87$ вздовж лінії течії $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$ в момент часу $t = 15$ діб.



а *б*

Рис. 6 – Залежність розподілу концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі від фізичних властивостей мікрочастинок; *а* – вплив коефіцієнту переносу; *б* – вплив адсорбції рівноваги.

Висновки. Зазначимо ефективність такого підходу при проектуванні багатошарових засипних фільтрів з кусково-однорідними нанопористими завантаженнями кожного шару з метою оптимального використання нанопористої засипки. Запропонована методика дозволяє з наперед заданою точністю прогнозувати поширення забруднень в багатошаровому нанопористому середовищі та в значній мірі автономно досліджувати окремі складові процесу. Перспективою дослідження є застосування даного методу для розв'язання відповідних просторових сингулярно збурених задач конвективно-дифузійне масоперенесення багатокомпонентного забруднення в багатошарових середовищах з подвійною пористістю.

Список літератури: **1**. *Булавацький В.М.*, *Кривонос Ю.Г.*, *Скопецький В.В.* Некласичні математичні моделі процесів тепло– та масопереносу. – К.: Наукова думка, 2005. – 282с. **2.** *Бомба А.Я.*

Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. матем. журн. − 1982. − Т.4, №4. − С. 493 – 496. **3.** *Бомба А.Я.*, *Барановський С.В.*, *Присяжнюк І.М.* Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія». – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с. **4.** *Булычева О.Н.*, *Васильева А.Б.*, *Сушко В.Г.* Асимптотические разложения по малым параметрам решений некоторых задач для параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 31. – 1991. – №9. – С. 1328 – 1337. **5.** *Сівак В.М.*, *Шепетько Ю.О.*, *Климюк Ю.Є.* Математичне моделювання просторових сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 4 (56). – Рівне : НУВГП, 2011. – С. 37 – 55. **6.** *Климюк Ю.Є.*, *Теслюк А.О.*, *Шепетько Ю.О.* Математичне моделювання одного класу просторових нелінійних сингулярно збурених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах // Волинський математичний вісник. Серія: прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 76 – 91. **7.** *Петрик М.Р.*, *Фрессард Ж.* Математическое моделирование и визуализация системы многоуровневого массопереноса в неоднородных каталитических средах нанопористых частиц // Проблемы управления и информатики. − 2008. − № 5. − С. 54 – 73. **8.** *Сергиенко И.В.*, *Дейнека В.С.* Идентификация градиентными методами параметров за-дач диффузии вещества в нанопористой среде // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 6. – С. 5 – 18. **9.** *Бомба А.Я.*, *Присяжнюк І.М.*, *Присяжнюк О.В.* Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масопереносу в різнопористих середовищах // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 28 – 34. **10.** *Бомба А.Я.*, *Присяжнюк І.М.*, *Присяжнюк О.В.*, *Фурсачик О.А.* Обернені сингулярно збурені задачі процесу масопереносу в різнопористих середовищах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 7. – С. 3 – 11.

Bibliography (transliterated): 1. Bulavac'kyj, V. M., Ju. H. Kryvonos and V. V. Skopec'kyj. *Neklasychni matematychni modeli procesiv teplo– ta masoperenosu*. Kyiv: Naukova dumka, 2005. Print. **2.** Bomba, A. Ja. "Ob asymptotycheskom metode pryblyzhennogo reshenija odnoj zadachi massoperenosa pri fyl'tracii v poristoj srede." *Ukr. matem. zhurn*. Vol. 4. No. 4. 1982. 493–496. Print. **3.** Bomba, A. Ya., S. V. Baranovs'kij and I. M. Prysjazhnjuk. *Nelinijni synguljarno zbureni zadachi typu "konvekcija-dyfuzija."* Rovno: NUVHP, 2008. Print. **4.** Bulycheva, O. N., A. B. Vasil'eva and V. G. Sushko. "Asimptoticheskie razlozhenija po malym parametram reshenij nekotoryh zadach dlja parabolicheskih uravnenij." *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* Vol. 31. No. 9. 1991. 1328–1337. Print. **5.** Sivak, V. M., Ju. O. Shepet'ko and Ju. Je. Klymjuk. "Matematychne modeljuvannja prostorovyh synguljarno zburenyh procesiv masoperenosu zabrudnjujuchyh rechovyn u dvosharovyh izotropnyh nasychenyh porystyh seredovyshhah." *Visnyk Ukr. nac. un-tu vodn. gosp. ta pryrodokoryst.: Zbirn. nauk. prac'. Ser.: Tehnichni nauky*. No. 4 (56). Rovno: NUVHP, 2011. 37–55. Print. **6.** Klymjuk, Ju. Je., A. O. Tesljuk and Ju. O. Shepet'ko. "Matematychne modeljuvannja odnogo klasu prostorovyh nelinijnyh synguljarno zburenyh procesiv masoperenosu zabrudnjujuchyh rechovyn u dvosharovyh izotropnyh nasychenyh porystyh seredovyshhah." *Volyns'kyj matematychnyj visnyk. Ser.: Prykladna matematyka*. No. 8 (17). Rovno: RDHU, 2011. 76–91. Print. **7.** Petryk, M. R., and Zh. Fressard. "Matematicheskoe modelirovanie i vizualizacija sistemy mnogourovnevogo massoperenosa v neodnorodnyh kataliticheskih sredah nanoporistyh chastic." *Problemy upravlenija i informatiki*. No. 5. 2008. 54–73. Print. **8.** Sergienko, I. V., and V. S. Dejneka. "Identifikacija gradientnymi metodami parametrov zadach diffuzii veshhestva v nanoporistoj srede." *Problemy upravlenija i informatiki*. No.6. 2010. 5–18. Print. **9.** Bomba, A. Ja., I. M. Prysjazhnjuk and O. V. Prysjazhnjuk. "Asymptotychnyj metod rozv'jazannja odnogo klasu model'nyh synguljarno zburenyh zadach procesu masoperenosu v riznoporystyh seredovyshhah." *Dopovidi NAN Ukrai'ny*. No. 3. 2013. 28–34. Print. **10.** Bomba, A. Ja., et al. "Oberneni synguljarno zbureni zadachi procesu masoperenosu v riznoporystyh seredovyshhah." *Matematychne ta komp'juterne modeljuvannja. Ser.: Tehnichni nauky*. No. 7. Kamenetz-Podolsk: Kam'janec'-Podil's'kyj nacional'nyj universytet imeni Ivana Ogienka, 2012. 3–11. Print.

Надійшла (received) 10.10.2014