

<<http://www.books.google.com.ua/books>>. 6. Chudakov, D. A. *Osnovy teorii traktora i avtomobilja*. Moscow: Sel'hozizdat, 1962. Print. 7. Skotnikov, V. A., A. A. Mashenskij and A. S. Solonskij. *Osnovy teorii i rascheta traktora i avtomobilja*. Moscow: Agropromizdat, 1986. Print. 8. Gredeskul, A. B. "O raspredelenii tormoznyh sil mezhdru osjami avtomobilja pri tormozhenii na uklone." *Trudy konferencii po teorii i raschetu avtomobilej, rabotajushhijh v gornyh uslovijah*. Tbilisi: Mecniera, 1968. 56–62. 9. Gredeskul, A. B., M. A. Podrigalo and N. Ju. Favorov. *Zakony regulirovanija tormoznyh sil avtomobilja pri dejstvii bokovoj sily v processe tormozhenija*. Khar'kov: HADI, 1980. Print. 10. Podrigalo, M. A., et al. *Stabil'nost' jekspluatacionnyh svojstv kolesnyh mashin*. Khar'kov: HNADU, 2003. Print.

Надійшла (received) 27.10.2014

УДК 539.3

**А.Г. НИКОЛАЕВ**, д-р физ.-мат. наук, проф., НАКУ «ХАИ», Харьков;  
**Е.А. ТАНЧИК**, ассистент НАКУ «ХАИ», Харьков

## МОДЕЛЬ ЗЕРНИСТОГО КОМПОЗИТА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЗЕРНАМИ

Предложена модель зернистого композита, в которой зерна моделируются упругими сферическими включениями. Напряженное состояние в композите описывается краевой задачей для уравнения Ламе с условиями идеального контакта на границе зерен и условиями на бесконечности. Аналитическое решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе в сферических системах координат, начала которых отнесены к центрам включений. Граничные условия удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором. Приведен численный анализ нормальных компонент тензора напряжений в области между включениями.

**Ключевые слова:** зернистый композит, сферические включения, обобщенный метод Фурье, метод редукции.

**Введение.** При создании композиционных материалов и проектировании изделий из них важными факторами являются характеристики материала, связанные с его прочностью. Любые оценки прочности материала основываются на определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в нем под действием внешних нагрузок. Теоретические методы определения напряжений и деформаций в композиционном материале недостаточно точны, так как обычно используют приближенные модели. Низкой точностью применительно к пространственным многосвязным задачам с большим числом компонент связности отличаются и стандартные численные методы (*метод конечных элементов, метод граничных элементов* и др.). В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности, в частности, авиации и ракетостроения, является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

---

© А. Г. Николаев, Е. А. Танчик, 2014

**Анализ исследований.** В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям *теории упругости структурно неоднородного тела*, к уравнениям *теории эффективных упругих модулей*, к уравнениям *теории упругих смесей* или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение *стохастических уравнений теории упругости* для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена *методом возмущений*, *методом моментов* или *методом условных моментов*. Однако, поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2 – 4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и эллипсоидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, то есть учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [6, 7] *методами обобщенных аналитических функций* исследованы осесимметричные краевые задачи для упругого пространства с двумя сферическими полостями и шара со сферической полостью.

В работе [8] *методами теории гармонических функций* исследованы осесимметричные напряженные состояния в упругом пространстве с двумя сферическими включениями.

В статье [9] дается обзор методов моделирования напряженного состояния композита с очень малыми размерами нановключений. Обсуждаются варианты применения *функции Грина*, непосредственного интегрирования уравнений равновесия, *метода бесконечно малых включений*. Все перечисленные методы учитывают неоднородные включения приближенно.

В работе [10] на примере решения *задачи Дирихле* для *уравнения Лапла-*

са приводится сравнительный анализ методов решения краевых задач в областях с  $N$  непесекающимися включениями.

В статье [11] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри вытянутых сфероидальных пор.

В статьях [12, 13] исследовано напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных пор и включений в упругом материале *обобщенным методом Фурье*. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе развита методика, предложенная в работах [12, 13], на случай любого конечного числа включений. Методика основана на обобщенном методе Фурье и позволяет точно удовлетворять условиям на границе включений.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругое пространство  $\Omega$  с  $N$  непесекающимися сферическими включениями  $\Omega_j$ . Считаем, что центры включений расположены в вершинах гранецентрированной кубической решетки со стороной  $a$ .

Будем использовать одинаково ориентированные сферические системы координат  $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ , начала которых отнесены к центрам включений  $O_j$ ,  $j = 1 \div N$ . Материалы матрицы и включений имеют упругие характеристики  $(G, \sigma)$ ,  $(G_j, \sigma_j)$  соответственно.

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия  $\sigma_z^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$  (одноосное растяжение) или  $\sigma_\rho^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$  (двухосное растяжение), а включения находятся в условиях идеального контакта с матрицей.

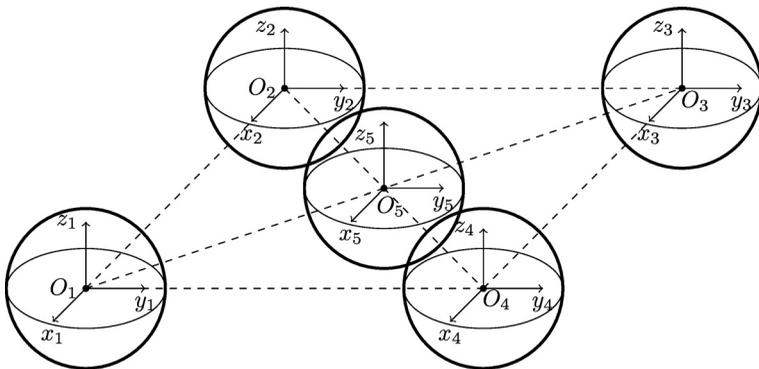


Рис. 1 – Схематическое представление задачи.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

с условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (3)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь  $\mathbf{U}$  – вектор перемещений;  $\mathbf{F}\mathbf{U}$  – отвечающий  $\mathbf{U}$  вектор усилий на соответствующей граничной поверхности;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $\Gamma_j$  – поверхность включения  $\Omega_j$ .

**Решение задачи.** Решение задачи в упругом пространстве  $\Omega$  ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_j = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} b_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad \text{при } x \in \Omega_j, \quad (6)$$

где  $a_{s,n,m}^{(j)}$ ,  $b_{s,n,m}^{(j)}$  – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение  $\mathbf{U}_0$  соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двуосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (8)$$

где  $T$  – усилие на бесконечности;  $G$  – модуль сдвига;  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  – орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сферы [14]:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \left[ z_j \nabla + (4\sigma - 3) \mathbf{e}_z \right] u_{n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) - \\ & - \frac{R_j^2}{2(n\pm 1) + 1} \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \operatorname{ivot} \left[ u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_z \right]; \quad (11)$$

$$u_{n,m}^{\pm(4)}(r, \theta, \varphi) = u_{n,m}^{\pm}(r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi};$$

$$u_{n,m}^+(r) = (n-m)! \frac{1}{r^{n+1}}, \quad u_{n,m}^-(r) = \frac{1}{(n+m)!} r^n,$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  – функция Лежандра 1-го рода, символам «+» («-») в вектор-функциях (9) – (11) отвечают внешние (внутренние) решения для шара.

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (12)$$

Применив к формулам (9) – (11) оператор (12), на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{r_j}$  получим

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{1,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & -\frac{2G}{r_j} (n+1) \left[ -u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & \left. + u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} \left\{ (n+m) \left[ \frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] \times \right. \\ & \times u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} - \\ & - (n-m) \left[ \frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\ & + \left[ \frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right] \times \\ & \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{3,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & -\frac{2G}{r_j} \left[ (n-m+2) u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & \left. + (n+m+2) u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - m u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{1,n,m}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} n \left[ -u_{n,m-1}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \right. \\ & \left. + u_{n,m}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,n,m}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} \left\{ -(n-m+1) \left[ \frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \right. \\ & \times u_{n,m-1}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + (n+m+1) \left[ \frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \\ & \times u_{n,m+1}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\ & \left. + \left[ \frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] u_{n,m}^{-(-4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{F}U_{3,n,m}^{-{(4)}}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \frac{2G}{r_j} \left[ (n+m-1)u_{n,m-1}^{-{(4)}}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + (n-m-1)u_{n,m+1}^{-{(4)}}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - tu_{n,m}^{-{(4)}}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]. \quad (18)$$

Базис  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$  связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}; \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}; \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \quad (19)$$

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сферических включений. Справедливы следующие теоремы сложения [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{l=k+1} (-1)^{k+l} \left\{ (-1)^s \delta_{st} f_{n,m}^{(44)k,l,j,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \left( \frac{R_\alpha^2}{2k+3} + \frac{R_j^2}{2n+3} \right) f_{n,m}^{(44)k+2,l,j,\alpha} - z_{j\alpha} f_{n,m}^{(44)k+1,l,j,\alpha} \right] \right\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-{(4)}}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha); \quad (20) \\ f_{n,m}^{(44)k,l,j,\alpha} &= u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}), \end{aligned}$$

где  $s=1 \div 3$ ,  $(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$  – сферические координаты точки  $O_\alpha$  в системе координат с началом  $O_j$ .

**Разрешающая система уравнений.** Используя теоремы сложения (20), представим вектор перемещения  $\tilde{\mathbf{U}}$  в системе координат с началом в точке  $O_j$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) + (-1)^{n+m} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-{(4)}}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \times \right. \\ &\times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} \left\{ (-1)^t \delta_{st} f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j} + \delta_{t2} \delta_{s1} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \left( \frac{R_j^2}{2n+3} + \frac{R_\alpha^2}{2k+3} \right) f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j} - z_{\alpha j} f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j} \right] \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Применим оператор (12) к формулам (7), (8) на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{r_j}$  для одноосного и двухосного растяжения и получим соответственно

$$\mathbf{F}U_0 = TP_1(\cos \theta_j) \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{F}U_0 = -TP_1^{(1)}(\cos \theta_j) \mathbf{e}_{\rho_j}.$$

После удовлетворения граничным условиям задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_{s,n,m}^{(j)}$ ,  $b_{s,n,m}^{(j)}$ :

$$\sum_{s=1}^3 \left\{ a_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(r)}(R_j, \sigma) + (-1)^{n+m} F_{s,n,m}^{-(r)}(R_j, \sigma) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{t,k,l}^{(\alpha)} \left\{ (-1)^t \delta_{st} f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j} + \delta_{t2} \delta_{s1} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \left( \frac{R_j^2}{2n+3} + \frac{R_\alpha^2}{2k+3} \right) f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j} - z_{\alpha j} f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j} \right] \right\} = \\ & = F_{n,m}^{(r)} + \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{- (r)} (R_j, \sigma_j); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \left\{ a_{s,n,m}^{(j)} E_{s,n,m}^{+(r)} (R_j, \sigma) + (-1)^{n+m} E_{s,n,m}^{- (r)} (R_j, \sigma) \times \right. \\ & \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{t,k,l}^{(\alpha)} \left\{ (-1)^t \delta_{st} f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j} + \delta_{t2} \delta_{s1} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \left( \frac{R_j^2}{2n+3} + \frac{R_\alpha^2}{2k+3} \right) f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j} - z_{\alpha j} f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j} \right] \right\} = \\ & = E_{n,m}^{(r)} + \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} E_{s,n,m}^{- (r)} (R_j, \sigma_j); \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 \div n + 1, \quad j = 1 \div N,$$

где  $E_{n,m}^{(r)}(R) = \frac{TR}{2G} \left( \frac{-2\sigma}{1+\sigma} \delta_{r,-1} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \delta_{r,1} + \frac{1}{1+\sigma} \delta_{r,0} \right) \delta_{n,1} \delta_{m,0}$ ,  $F_{n,m}^{(r)} = -T \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{r0}$ ,

для одноосного растяжения и

$$F_{n,m}^{(r)} = T \delta_{n1} \delta_{m0} (\delta_{r1} - 2\delta_{r,-1}),$$

$$E_{n,m}^{(r)}(R) = \frac{TR}{G} \left( \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \delta_{r,-1} - \frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} \delta_{r,1} - \frac{\sigma}{1+\sigma} \delta_{r,0} \right) \delta_{n,1} \delta_{m,0}$$

для двусосного растяжения;

$$F_{1,n,m}^{+(-1)}(R) = \frac{2(n+1)(n-m+1)!}{R^{n+2}}, \quad F_{1,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{2(n+1)(n-m-1)!}{R^{n+2}};$$

$$F_{1,n,m}^{+(0)}(R) = \frac{2(n+1)(n-m)!}{R^{n+2}}, \quad F_{3,n,m}^{+(-1)}(R) = -\frac{1}{R^{n+2}}(n-m+2)!;$$

$$F_{2,n,m}^{+(-1)}(R) = \frac{2}{R^{n+2}}(n+m) \left[ \frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m+1)!;$$

$$F_{2,n,m}^{+(0)}(R) = \frac{2}{R^{n+2}}(n-m)! \left[ \frac{(n-m+1)(n+m+1)(n+3)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right];$$

$$F_{2,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{2}{R^{n+2}}(n-m) \left[ \frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m-1)!;$$

$$F_{3,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{1}{R^{n+2}}(n+m+2)(n-m-1)!;$$

$$\begin{aligned}
F_{3,n,m}^{+(-1)}(R) &= \frac{1}{R^{n+2}} m(n-m)!, \quad F_{1,n,m}^{-(-1)}(R) = -2R^{n-1} \frac{n}{(n+m-1)!}; \\
F_{1,n,m}^{-(-1)}(R) &= 2R^{n-1} \frac{n}{(n+m+1)!}, \quad F_{1,n,m}^{-(0)}(R) = 2R^{n-1} \frac{n}{(n+m)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(-1)}(R) &= -2R^{n-1} \left[ \frac{(n-2)(n+m-1)}{2n+1} + 2\sigma \right] \frac{n-m+1}{(n+m-1)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(1)}(R) &= 2R^{n-1} \left[ \frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(0)}(R) &= 2R^{n-1} \left[ \frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] \frac{1}{(n+m)!}; \\
F_{3,n,m}^{-(-1)}(R) &= R^{n-1} \frac{1}{(n+m-2)!}, \quad F_{3,n,m}^{-(1)}(R) = R^{n-1} \frac{n-m-1}{(n+m+1)!}; \\
F_{3,n,m}^{-(0)}(R) &= -R^{n-1} \frac{m}{(n+m)!}, \quad E_{1,n,m}^{\pm(-1)}(R) = -u_{n,m-1}^{\pm}(R); \\
E_{1,n,m}^{\pm(1)}(R) &= u_{n,m+1}^{\pm}(R), \quad E_{1,n,m}^{\pm(0)}(R) = \mp u_{n,m}^{\pm}(R); \\
E_{2,n,m}^{+(-1)}(R) &= -\frac{(n-m+2)(n+m)}{2n+3} u_{n,m-1}^{+}(R); \\
E_{2,n,m}^{+(1)}(R) &= \frac{(n-m)(n+m+2)}{2n+3} u_{n,m+1}^{+}(R); \\
E_{2,n,m}^{+(0)}(R) &= -\left[ \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} + 4-3\sigma \right] u_{n,m}^{+}(R); \\
E_{2,n,m}^{-(-1)}(R) &= -\frac{(n-m+1)(n+m-1)}{2n-1} u_{n,m-1}^{-}(R); \\
E_{2,n,m}^{-(1)}(R) &= \frac{(n-m-1)(n+m+1)}{2n-1} u_{n,m+1}^{-}(R); \\
E_{2,n,m}^{-(0)}(R) &= \left[ \frac{(n-m)(n+m)}{2n-1} - 4+3\sigma \right] u_{n,m}^{-}(R); \\
E_{3,n,m}^{\pm(-1)}(R) &= -u_{n,m-1}^{\pm}(R); \\
E_{3,n,m}^{\pm(1)}(R) &= -u_{n,m+1}^{\pm}(R), \quad E_{3,n,m}^{\pm(0)}(R) = 0.
\end{aligned}$$

Оператор системы уравнений (22), (23) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [15].

**Анализ численных результатов.** При численной реализации принимались следующие значения параметров:  $\sigma = 0.38$ ,  $\sigma_j = 0.21$ ,  $G_j / G = 25$ , что соответствует зернам из алюмоборосиликатного стекла и матрице из эпоксидно-малеиновой смолы. Рассматривается случай  $N = 5$ , считается, что центры включений расположены в одной плоскости. Система (22), (23) чис-

ленно решалась методом редукции по параметру  $n$ .

На рис. 2 – 4 показаны графики распределения напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$ ,  $\sigma_z/T$  на линии  $O_1O_4$  между включениями в зависимости от относительного расстояния  $a/R$  между ними. Слева приведен случай одноосного растяжения пространства, справа – двуосного. Максимальные по модулю значения напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  наблюдаются при наиболее близко расположенных включениях. Для напряжений  $\sigma_z/T$  подобное свойство имеет место для двуосного растяжения. А в случае одноосного растяжения, напротив, максимальные по модулю значения напряжений  $\sigma_z/T$  соответствуют наиболее удаленным друг от друга включениям. Характер распределения приведенных напряжений в одноосном и двуосном случаях принципиально отличается. В одноосном случае напряжение  $\sigma_z/T$  меняет знак, становясь сжимающим вблизи границы включений.

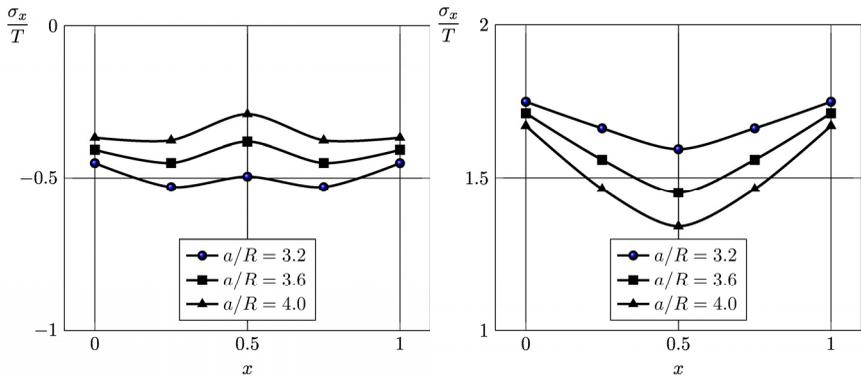


Рис. 2 – Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии  $O_1O_4$  между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

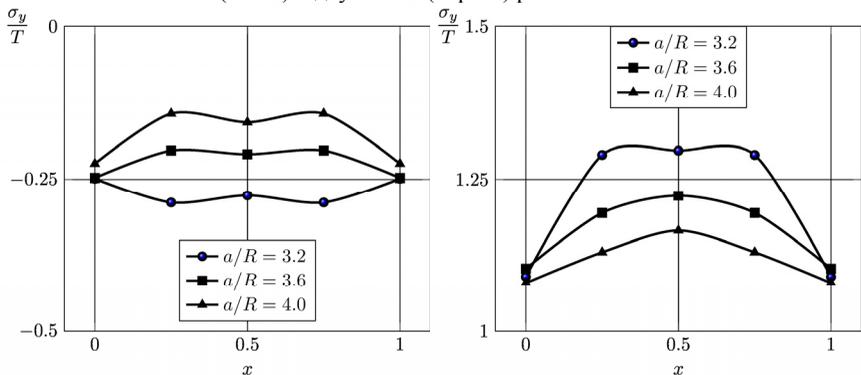


Рис. 3 – Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии  $O_1O_4$  между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

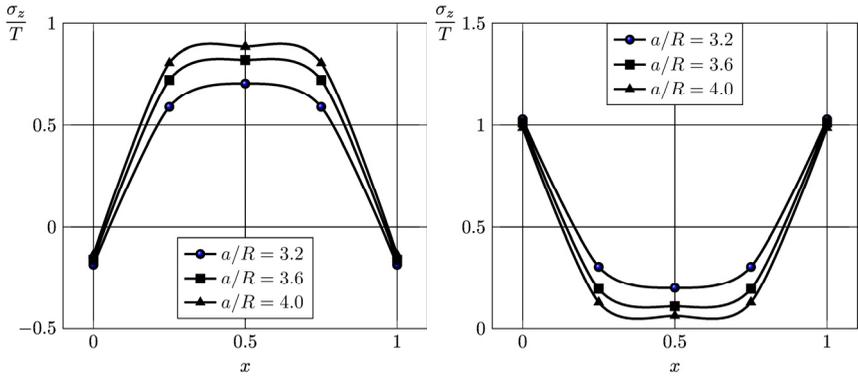


Рис. 4 – Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии  $O_1O_4$  между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

На рис. 5, 6 приведены напряжения  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$  на линии  $O_1O_5$  между включениями в зависимости от относительного расстояния между ними. Слева приведены графики для одноосного растяжения пространства, справа – для двуосного. В случае двуосного растяжения для напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$ ,  $\sigma_z/T$  область концентрации является окрестность границ включений, при этом все они являются растягивающими. Для одноосного растяжения  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  меняются незначительно в пределах рассматриваемого отрезка. Обнаружена интересная закономерность в распределении напряжений  $\sigma_z/T$  при одноосном растяжении. С уменьшением расстояния между включениями напряжения из растягивающих на большей части рассматриваемой линии ( $a/R = 4.0$ ) становятся сжимающими на всей линии ( $a/R = 3.2$ ).

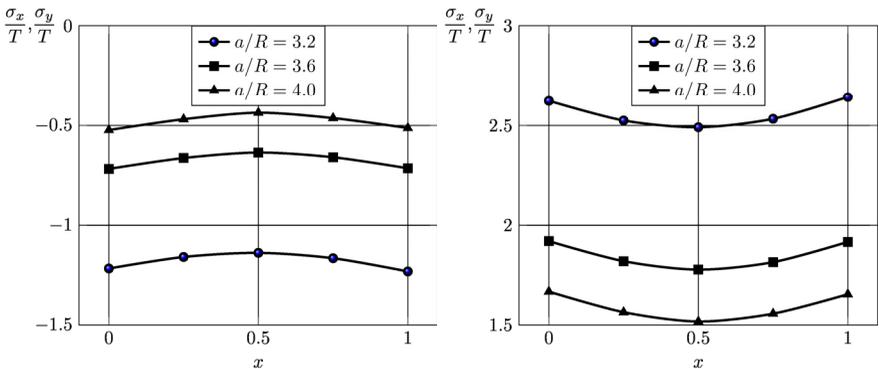


Рис. 5 – Напряжения  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  на линии  $O_1O_5$  между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

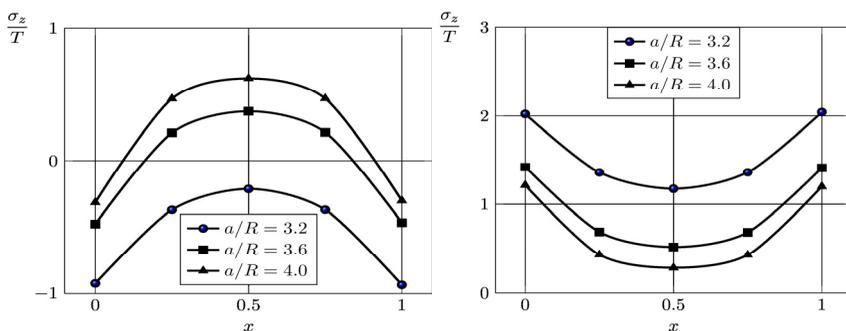


Рис. 6 – Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии  $O_1O_5$  между включениями для одноосного (слева) и двuosного (справа) растяжения.

**Заключение.** В работе предложена модель зернистого композита, в которой зерна моделируются упругими сферическими включениями, центры которых расположены в вершинах гранецентрированной кубической решетки. Напряженное состояние в композите описывается краевой задачей для уравнения Ламе с условиями идеального контакта на границе зерен и условиями на бесконечности. Аналитическое решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе в сферических системах координат, начала которых отнесены к центрам включений. Граничные условия удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами и фредгольмовым оператором. Последнее обстоятельство позволяет строить эффективные численные решения как разрешающей системы, так и исходной краевой задачи. Численные результаты получены для случая пяти сферических включений. Приведены графики нормальных компонент тензора напряжений на линиях, соединяющих центры включений, в зависимости от относительного расстояния между включениями. Проведен качественный анализ полученных результатов.

Разработанная в настоящей статье модель напряженно-деформированного состояния композиционного материала со сферическими включениями может использоваться для определения его интегральных упругих модулей. Модель допускает обобщение на случай регулярной периодической структуры зерен в материале.

**Список литературы:** 1. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. – V. 36, – No. 10. – P. 1284 – 1316. 2. Вольерт В.С., Олегин И.П. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ. №32666 – 77. 3. Олегин И.П. Осесимметричное напряженное состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – Т. V, – № 1 (9). – С. 127 – 132. 4. Олегин И.П. Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1999. – Т. II, – № 1. – С. 117 – 122. 5. Гаршин О.К., Кошар Л.А. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. –

Т. 9, – № 3. – С. 278 – 286. **6.** Капишев А.А., Копыстра Н.П., Ломонос Л.Н. Осесимметричное напряженное состояние шара с неконцентрической шаровой полостью // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – №9. – С. 50 – 55. **7.** Ломонос Л.Н. Первая основная задача об осесимметричном напряженном состоянии пространства с двумя сферическими полостями // Мат. физика и нелинейная механика. – 1990. – № 13. – С. 51 – 56. **8.** Tsuchida E., Nakahara I., Kodama M. On the asymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions // Bull. JSME. – 1980. – V. 23, – № 181. – P. 1072 – 1080. **9.** Овидько И.А., Шейнерман А.Г. Упругие поля наноскопических включений в нанокompозитах // Физика и механика материалов. – 2010. – Т. 10, – №1/2. – С. 1 – 29. **10.** Трай-так С.Д. Методы решения краевых задач в областях с несвязной границей // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, – № 1. – С. 87 – 112. **11.** Николаев А.Г., Танчик Е.А. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. – Т. 2 (58). – С. 48 – 58. **12.** Николаев А.Г., Танчик Е.А. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 1(98). – С. 14 – 18. **13.** Николаев А.Г., Танчик Е.А. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // Вісн. Харк. Нац. ун-та ім. В.Н. Каразіна. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. – 2010. – Т. 922. – С. 4 – 19. **14.** Николаев А.Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. – Х.: Харьк. авиацион. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93. – № 1178 – Ук 93. **15.** Николаев А.Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. – 1998. – Т. 2. – С. 78 – 83.

**Bibliography (transliterated):** 1. Khoroshun, L. P. "Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites." *International Applied Mechanics*. Vol. 36. No. 10, 2000. 1284–1316. Print. **2.** Volpert, V. S., and I. P. Olegin. *Osesimmetrichnoe naprjazhionnoe sostojanie prostranstva, sodержashhego sistemu sfericheskikh polostej ili vkljuchenij*. Novosib. in-t inzh. zh.-d. transporta. Dep. v VINITI. No. 3266–77, 1977. Print. **3.** Olegin, I. P. "Osesimmetrichnoe naprjazhionnoe sostojanie v transversal'no-izotropnoj uprugoj srede s dvumja zhestkimi ellipsoidal'nymi vkljuchenijami." *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*. Vol. V. No. 1 (9). 2002. 127–132. Print. **4.** Olegin, I. P. "Reshenie prostranstvennoj zadachi teorii uprugosti dlja transversal'no-izotropnogo tela, sodержashhego peri-odicheskiju sistemu ellipsoidal'nyh polostej." *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*. Vol. II. No. 1. 1999. 117–122. Print. **5.** Garishin, O. K., and L. A. Komar. "Prognozirovanie prochnosti elastomernyh zernistykh kompozitov v zavisimosti ot razmerov chastic napolnitelja." *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*. Vol. 9. No. 3. 2003. 278–286. Print. **6.** Kapshivyj, A. A., N. P. Kopystra, and L. N. Lomonos. "Osesimmetrichnoe naprjazhionnoe sostojanie shara s nekoncentricheskoj sharovoj polostju." *Dokl. AN USSR. Ser.: A*. No. 9. 1980. 50–55. Print. **7.** Lomonos, L. N. "Pervaja osnovnaja zadacha ob osesimmetrichnom naprjazhionnom sostojanii prostranstva s dvumja sfericheskimi polostjami." *Mat. fizika i nelinejnaja mehanika*. No. 13. 1990. 51–56. Print. **8.** Tsuchida, E., I. Nakahara, and M. Kodama. "On the asymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions." *Bull. JSME*. Vol. 23. No 181. 1980. 1072–1080. Print. **9.** Ovid'ko, I. A., and A. G. Shejnerman. "Uprugie polja nanoskopicheskikh vkljuchenij v nanokompозитах." *Fizika i mehanika materialov*. Vol. 10. No. 1/2. 2010. 1–29. Print. **10.** Trajtak, S. D. "Metody reshenija kraevykh zadach v oblastjakh s nesvjaznoj granicej." *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*. Vol. 11. No. 1. 2005. 87–112. Print. **11.** Nikolaev, A. G., and E. A. Tanchik. "Matematicheskaja model' naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija poristogo materiala." *Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov: sb. nauch. tr. Nac. aerokosm. un-ta im. N. Ye. Zhukovskogo «KhAI»*. Vol. 2 (58). 2009. 48–58. Print. **12.** Nikolaev, A. G., and E. A. Tanchik. "Razvitie lokal'noj modeli naprjazhionnogo sostojanija poristogo materiala." *Aviacionno-kosmicheskaja tehnik a i tehnologija*. No. 1(98). 2013. 14–18. Print. **13.** Nikolaev, A. G., and E. A. Tanchik. "Lokal'naja matematicheskaja model' zernistogo kompozicionnogo materiala." *Visn. Khark. Nac. un-ta im. V. N. Karazina. Ser.: Matematyka, prykladna matematyka i mehanika*. Vol. 922. 2010. 4–19. Print. **14.** Nikolaev, A. G. "Teoremy slozhenija reshenij uravnenija Lame." Kharkiv: Khark. aviac. in-t, 1993. Dep. v GNTB Ukrainy 21.06.93. No. 1178–Uk 93. Print. **15.** Nikolaev, A. G. "Obosnovanie obobshhionnogo metoda Fur'є v osnovnykh kraevykh zadachah teorii uprugosti dlja nekotorykh prostranstvennykh kanonicheskikh oblastej." *Dopovidy NAN Ukrainy*. Vol. 2. 1998. 78–83. Print.

Надійшла (received) 01.08.2014