

**О.С. МАЗУР**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

**В.В. ТКАЧЕНКО**, асистент, НТУ «ХПІ»

## ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Продемонстровано застосування теорії  $R$ -функцій для розв'язання задач про параметричні коливання та динамічну стійкість багатошарових пластин складної форми плану. Математичну постановку задачі виконано в рамках класичної теорії, а рівняння руху представлено в мішаній формі. Розроблений алгоритм зведення початкової системи в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами застосовано для дослідження тришарових пластин зі складною геометричною формою.

**Ключові слова:** параметричні коливання, динамічна стійкість, багатошарові пластини, теорія  $R$ -функцій.

**Вступ.** З огляду літератури, яка присвячена проблемі дослідження параметричних коливань та динамічної стійкості багатошарових пластин [8], можна зробити висновки, що найбільш використаними є нелінійні диференціальні рівняння руху в мішаній формі, які побудовані відносно функції зусиль та прогину ( $w - \Phi$ ). Раніш в роботах [3, 6] було запропоновано метод дослідження ізотропних та ортотропних пластин складної форми, який базується на використанні мішаної форми рівнянь руху. В даній роботі метод узагальнено для багатошарових пластин довільної геометричної форми плану. Як і в попередніх роботах принциповою відзнакою є використання теорії  $R$ -функцій [4], що саме і дозволяє досліджувати пластини довільної форми. Даний підхід особливо є зручним при дослідженні пластин з однорідним докритичним станом при деяких видах крайових умов, оскільки істотно спрощується алгоритм чисельної реалізації.

**Математична постановка задачі.** Розглянемо коливання багатошарової пластини постійної товщини  $h$ , що знаходиться під дією періодичного навантаження  $p = p_0 + p_1 \cos \theta t$ . Математичну постановку задачі виконаємо в рамках класичної теорії при ігнорування інерційних сил в серединній площині. Для того, щоб отримати рівняння руху в мішаній формі, введемо функцію зусиль  $\Phi$  за допомогою наступних співвідношень

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = N_y, \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = T.$$

Тоді система рівнянь руху прийме такий вигляд [7]:

$$L_1 \Phi = L(w, w), \tag{1}$$

$$L_2 w = NL(w, \Phi) - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2}$$

В рівняннях (1) – (2) оператори

$$L_1 = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$$L_2 = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$L(w, w) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

де матриця

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix}$$

пов'язує вектори деформацій та зусиль співвідношенням

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{A}] \cdot \{N\},$$

$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}$  та  $\mathbf{D}$  – матриці зведених жорсткісних коефіцієнтів:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}.$$

Зведені жорсткісні характеристики  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  ( $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ ) визначаються наступним чином [1]:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^{(s)}(1, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

де  $B_{ij}^{(s)}$  – пружні константи  $s$ -го шару. В загальному випадку, коли осі анізотропії не співпадають з напрямками осей  $Ox$  та  $Oy$ , пружні константи  $s$ -го шару  $B_{ij}^{(s)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) визначаються за відомими формулами [1], які одержано у зв'язку з поворотом осей анізотропії на деякий кут  $\alpha$ .

**Метод розв'язання.** Як і у випадку одношарової пластини представимо прогин пластини та функцію зусиль у вигляді

$$w(x, y, t) = w_1(x, y)y(t), \quad \Phi(x, y, t) = f^2(t)\Phi_1(x, y) + p\Phi_0, \quad (3)$$

де  $w_1(x, y)$  – власна функція задачі про лінійні коливання пластини, що відповідає основній частоті  $\omega_L(x, y)$ . Розв'язання задачі про вільні коливання багат шарових пластин зі складною формою плану детально описано в робо-

ті [4]. Функції  $\Phi_0$  та  $\Phi_1$  у співвідношеннях (3) є розв'язками наступних рівнянь:

$$L_2\Phi_0 = 0,$$

з виконанням на навантаженій частині умов

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\tau^2} = -1, \quad \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial n\partial\tau} = 0,$$

та

$$L_2\Phi_1 = -\frac{1}{2}C_1L(w_1, w_1),$$

відповідно.

Знаходження функцій  $\Phi_0$  та  $\Phi_1$  у випадку складної геометрії пластини було виконано за допомогою варіаційних методів та теорії  $R$ -функцій.

Слід зауважити, що у випадку, коли пластина має однорідний докритичний стан і навантаження, прикладене вздовж сторін, паралельних осям  $Ox$ ,  $Oy$ , функцію зручно шукати у вигляді

$$\Phi_0 = -\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Підставляючи (3) в рівняння руху (2) та застосовуючи *метод Бубнова – Гальоркіна*, отримуємо диференціальне рівняння

$$y''(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cos \theta t)y(t) + \beta y^3(t) = 0 \quad (4)$$

де

$$\Omega_L = \omega_L \sqrt{1 - p_0\alpha}$$

– частота коливань пластини під дією статичного навантаження  $p_0$ ,

$$k = \frac{p_t\alpha}{2(1 - p_0\alpha)}$$

– коефіцієнт збудження, коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$  визначаються як:

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_0) w_1 d\Omega, \quad \beta = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_1) w_1 d\Omega.$$

У випадку дії на пластину періодичного навантаження в серединній площині основний недеформований стан пластини може ставати нестійким, тому виникає необхідність визначення областей параметрів навантаження, що призводять до динамічної нестійкості, а також визначення амплітуд установлених коливань в зонах нестійкості. Для дослідження динамічної стійкості, як показано в [2], достатньо розглянути лінеаризоване рівняння (4), тобто при  $\beta = 0$ :

$$y''(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cdot \cos(\theta t))y(t) = 0. \quad (5)$$

Співвідношення (5) є *рівняння Мат'є*, головна область нестійкості (поблизу  $\theta = 2\Omega_L$ ) якого обмежена кривими [2]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - k} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + k}.$$

В цьому інтервалі виникає *головний параметричний резонанс*.

Дослідження усталених коливань в зоні головного параметричного резонансу виконано методом тригонометричних рядів, викладеним в [2], та отримана залежність між частотним відношенням  $\theta/2\Omega_L$  та амплітудою коливань  $A$ :

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\beta}} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2\Omega}\right)^2 - 1 \pm k}.$$

**Чисельні результати.** Проілюструємо запропонований алгоритм на прикладі тришарової пластини, представленої на рис. 1. Нехай пластина навантажена періодичними зусиллями, які прикладені вздовж сторін паралельних осі  $Oy$  та направлені паралельно осі  $Ox$ .

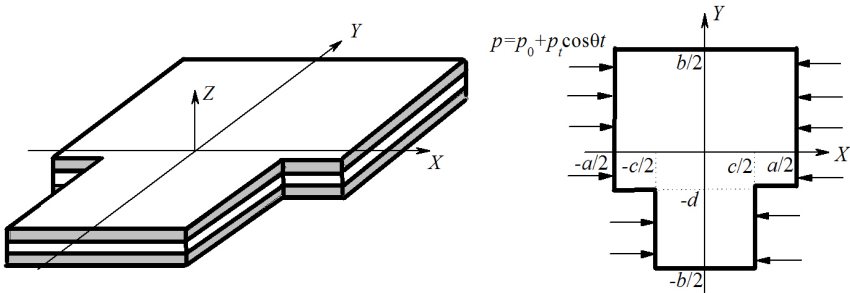


Рис. 1 – Форма пластини.

Шари пластини виготовлені з графіту, механічні характеристики якого визначаються умовами

$$E_1 / E_2 = 40, \quad G / E_2 = 0.6, \quad \mu_1 = 0.25,$$

Також будемо вважати, що всі шари мають однакову товщину, загальна товщина пластини дорівнює:  $h/a = 0.01$ . Шари укладено згідно закономірності:  $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ . Будемо вважати, що на межі виконуються наступні умови:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -p, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_2,$$

де  $\partial\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$  – навантажена та ненавантажені частини контуру відповідно.

Зауважимо, що в розглянутій задачі маємо *однорідний докритичний стан*, а тому функції  $\Phi_0$  буде мати вигляд:

$$\Phi_0 = -\frac{y^2}{2}.$$

В таблиці представлені значення параметру критичного навантаження

$$\bar{p}_{kr} = p_{kr} \cdot \frac{a^2}{E_2 h^3},$$

отримані для  $T$ -подібної пластини. Результати були здобуті за допомогою динамічного підходу [5]. Також в таблиці представлені порівняльні результати параметру критичного навантаження для квадратної пластини, отримані в [1] та в [5]. Зауважимо, що в останній роботі авторами запропоновано методи знаходження критичного навантаження, які також використовують *теорію R-функцій*, але початкова система руху представлена в переміщеннях.

Таблиця 1 – Значення безрозмірного параметру критичного навантаження

	$c/a = 0.6,$ $d/a = 0.3,$ $b/a = 1$	$c/a = 0.8,$ $d/a = 0.4,$ $b/a = 1$	Квадратна	Квадратна, [5]	Квадратна [1]
$\bar{p}_{kr}$	42.43	37.31	36.18	36.20 <sup>(а)</sup> , 36.17 <sup>(б)</sup>	36.16

(а) – енергетичний підхід, (б) – динамічний підхід

Зменшення розміру вирізів спрямовує до виродження пластини в квадратну, відповідно значення критичного параметру навантаження наближаються до значення критичного параметру квадратної пластини.

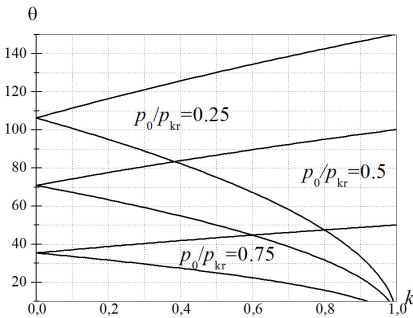


Рис. 2 – Области динамічної нестійкості.

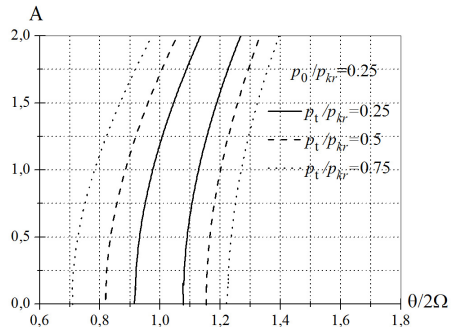


Рис. 3 – Амплітудно-частотні залежності.

Наступні результати отримані при геометричних параметрах

$$c/a = 0.6, b/a = 1, d/a = 0.3.$$

На рис. 2 побудовані області динамічної нестійкості в залежності від постійної складової навантаження  $p_0$  ( $p_0/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75$ ). При більших значеннях  $p_0$  нестійкість виникає при менших значеннях збуджуючої частоти  $\theta$ .

На рис. 3 побудовані амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для різних значень амплітуди змінної частини навантаження  $p_t$ :

$$p_t/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75 \text{ та } p_0/p_{kr} = 0.25.$$

Зменшення цього параметру приводить до зближення гілок АЧХ.

**Висновки.** В роботі запропоновано метод дослідження параметричних коливань та динамічної стійкості багатошарових пластин симетричної структури зі складною геометричною формою. Початкова система руху представлена в мішаній формі. Розроблений алгоритм дискретизації системи руху базується на використанні теорії  $R$ -функцій та варіаційних методів. Чисельна реалізація алгоритму виконана за допомогою розробленого програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL. Запропонований підхід застосовано для дослідження параметричних коливань тришарової  $T$ -подібної пластини, виготовленої з графіту. Для розглянутої пластини побудовані головна область динамічної нестійкості та амплітудно-частотні залежності при різних значеннях параметрів навантаження.

**Список літератури:** 1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин – М.: Наука, 1967.-266с. 2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М: Гостехиздат, 1956. – 600 с. 3. Курпа Л.В., Мазур О.С. Параметрические колебания ортотропных пластин сложной формы // Машинознавство. – 2010. – № 4. – С. 83 – 95. 4. Курпа Л.В. Метод  $R$ -функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек – Х.: НТУ"ХПИ", 2009. – 407с. 5. Курпа Л.В., Ткаченко В.В. Исследование колебаний и устойчивости сжатых многослойных пластин с помощью метода  $R$ -функций // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1(47). – С. 95 – 105. 6. Мазур О. С. Сравнительный анализ двух подходов к исследованию параметрических колебаний ортотропных пластин сложной формы // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – №5. – С. 155 – 162. 7. Manoj T., Ayyappan M., Krishnan K.S., Nageswara Rao B. Nonlinear vibration analysis of thin laminated rectangular plates on elastic foundations //Z. Angew. Math.Mech. 80 (2000) – p. 183 – 192. 8. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987-2005 – Part1: conservative system // Applied mechanics reviews. – 2007. – 60. – P. 65 – 75.

Надійшла до редколегії 20.02.2014

---

УДК 539.3

**Динамічна стійкість багатошарових пластин складної форми / О. С. Мазур, В. В. Ткаченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 124 – 129. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Продемонстрировано применение теории  $R$ -функций для решения задач о параметрических колебаниях и динамической устойчивости многослойных пластин сложной формы плана. Математическая постановка задачи выполнена в рамках классической теории, а уравнение движения представлены в смешанной форме. Разработанный алгоритм сведения исходной системы в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению с периодическими коэффициентами применен к исследованию трехслойной пластины со сложной геометрической формой.

**Ключевые слова:** параметрические колебания, динамическая устойчивость, многослойные пластины, теория  $R$ -функций.

UDC 539.3

**Dynamic stability of laminated plates with complex form / O. S. Mazur, V. V. Tkachenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 124 – 129. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

In this paper an application of the  $R$ -function theory for solving problems of parametric vibrations and dynamic stability of multilayer plates with complex shape is demonstrated. The mathematical formulation of the problem is made in the frame of classical theory and the equations of motion are presented in mixed form. The algorithm of reducing the original system of partial differential equations to an ordinary differential equation with periodic coefficients is applied to study three-layer plates with complex geometry.

**Key words:** parametric variations, dynamic stability, laminated plates, the  $R$ -functions theory.