

ской теории накопления повреждений в элементах и узлах клапана в процессе отработки ресурса. На примере клапана с электромагнитным поляризованным двухпозиционным приводом рассмотрено применение разработанных моделей для определения ресурсных возможностей клапана на этапе его проектирования.

Ключевые слова: электромагнитный клапан, стохастическая модель, эксплуатационные изменения, техническое состояние, разрушение, отказ, ресурс, критический элемент.

UDC 621.646.4

Mathematical modeling of operational changes of the technical state of small-size electromagnetic pneumatic valves / G. I. Zaionchkovskiy, Ya. B. Fedorychko // Bulletin of National Technical University «KhPI.» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 67 – 81. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Mathematical models of small-size electromagnetic pneumatic valve technical state operational changes were developed using the stochastic theory of damage accumulation in the elements and units of a valve in the process of the resource exploitation. A valve with electromagnetic polarized two-position drive was used to demonstrate application of the developed models for definition of the resource possibilities of a valve at the designing phase.

Key words: electromagnetic valve, stochastic model, operational changes operational changing, technical state, destruction, rejection, resource, critical element.

УДК 681.526

Ю.С. КОЗЬМИН, канд. техн. наук, науч. сотр., ИСМА НАНУ, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Рассматриваются вопросы управления процессами выращивания скнтилляционных кристаллов. Кристаллизатор, как объект управления, представляется системой с распределенными параметрами. В качестве физической модели рассмотрен стержень с одномерным распределением физических свойств и температурных полей. Получена система уравнений в пространстве состояний. Построен алгоритм управления температурным полем объекта при перемещении кристаллизатора внутри установки. Приведены способы стабилизации температуры в заданной точке пространства при перемещении объекта. Полученные методики служат тестовыми для изучения процессов управления объектами на основе более сложных физических моделей.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, управление, стабилизация, температурное поле.

Введение. Скнтилляционные кристаллы получили большое распространение при использовании в качестве детекторов ионизирующего излучения. Для совершенствования и интенсификации технологического процесса выращивания скнтилляционных кристаллов необходимо понимание процессов, происходящих в рабочем объеме. В то же время, физические поля, возникающие в ампуле, можно оценить только косвенно. В этом случае только математическое моделирование позволяет технологам целенаправленно

повышать производительность ростовых установок при сохранении качества полученной продукции и снижении энергетических затрат.

В практических задачах автоматического управления особое место занимает проблема управления ростом кристаллов. В общей постановке объект управления представляет собой многомерный объект, который характеризуется многосвязностью переменных, нелинейностью, нестационарностью и стохастичностью. Все это в условиях недостатка информации о возмущающих воздействиях и ограниченностью контроля основных переменных существенно затрудняет использование подходов классической теории автоматического управления. Широкие возможности в этой области представляют методы современной теории автоматического управления: *адаптивные, с прогнозирующими моделями* (MPC – Model predictive control)[1], а также *интеллектуальные* [2]. Следует подчеркнуть, что, ни один из методов не является универсальным.

Задача стабилизации заранее заданных распределений температур является типичной для термических установок выращивания кристаллов [3 – 5]. В ряде теоретических и экспериментальных работ установлено, что рациональная организация тепловых полей позволяет существенно увеличить отвод тепла от зоны кристаллизации, а соответственно и повысить производительность ростовой установки [6]. Одним из возможных путей решения этой проблемы является управление тепловыми потоками в расплаве на основе изменения формы теплового поля на внешнем контуре контейнера. При этом, в зависимости от градиентов температурного поля и физических свойств материала, расплав может оставаться в равновесии, либо могут возникать естественноконвективные движения расплава, переходящие от ламинарных потоков к турбулентным [7]. В этом случае моделирование осуществляется на основе уравнений механики жидкости. В выращенном кристалле управление тепловым полем позволяет достигать снижения тепловых напряжений, чтобы избежать растрескиваний. Эта задача решается на основании уравнений механики деформированного тела и применения методов механики разрушения.

Целью данной работы является поиск таких управляющих воздействий, которые позволяют сформировать и поддерживать заданное распределение температуры объекта с требуемой точностью, на основе математической модели ростовой установки, построенной с использованием физически обоснованных упрощающих гипотез. Необходимо отдельно отметить тот факт, что в роли управляемой величины следует рассматривать все пространственное распределение функции состояния объекта. Подобные системы получили название *систем с распределенными параметрами* [8].

При этом предполагается, что результаты, полученные на простых моделях, могут быть полезны для понимания физических процессов и, в дальнейшем, могут быть обобщены на более сложные случаи.

Моделирование температурного поля в кристаллизаторе. Одним из

широко применяемых методов выращивания кристаллов из расплава является метод Бриджмена-Стокбаргера. Контейнер с расплавом медленно опускается в тепловую камеру, разделенную диафрагмой на две температурные области. В верхней части камеры температура поддерживается выше точки кристаллизации расплава, а в нижней части, соответственно ниже точки кристаллизации (рис. 1). Кристаллизация происходит в зоне диафрагмы, где создается температурный градиент. Для успешного проведения процесса необходимо поддерживать резкий температурный перепад на границе растущего кристалла (*фронт кристаллизации*) и высокую температуру расплава [6].

Общая задача моделирования тепловых процессов в ростовой установке распадается на две составляющие задачи: внешний и внутренний теплообмен.

К внешнему теплообмену в теплотехнике относят процессы переноса тепла, происходящие в рабочем пространстве установки и приводящие к поступлению тепла на внешнюю поверхность тигля или к отводу тепла от этой поверхности в случае охлаждения.

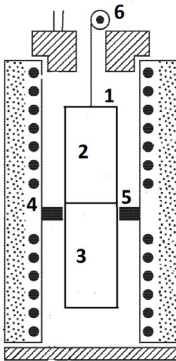


Рис. 1 – Схема установки для выращивания монокристаллов по методу Бриджмена-Стокбаргера. 1 – контейнер; 2 – расплав; 3 – монокристалл; 4 – нагреватель; 5 – тепловая диафрагма; 6 – механизм опускания контейнера с веществом.

Под внутренним теплообменом обычно понимают процесс распространения тепла в кристаллизаторе. Эта задача формулируется в виде уравнения теплопроводности с соответствующими краевыми (начальными и граничными) условиями [9].

Для управления процессом необходимо получить систему уравнений в канонической форме, именуемой *моделью в пространстве состояний* (приведена ниже). Как правило, для таких сложных объектов модели получают на основе обработки экспериментальных данных, с помощью регрессионных методов [1].

В данной работе рассмотрим подход, основанный на физическом моделировании процесса. Кристаллизатор (контейнер с находящимся внутри расплавленным кристаллизующим материалом) представляет собой сложный объект для физического моделирования.

Вначале, когда колба с материалом находится в верхней зоне, происходит плавление исходного сырья, затем, по мере опускания в холодную зону, в районе диафрагмы происходит кристаллизация с выделением тепла. В нижней, низкотемпературной зоне, происходит охлаждение и последовательное снижение температуры (отжиг). Существенно на процессы кристаллизации влияют теплофизические свойства материала контейнера. При этом карти-

на распределения температур на внутренней поверхности тигля может существенно отличаться от распределения температур на внешней поверхности из-за перетока тепла вдоль контейнера в нижнюю часть кристаллизатора.

В качестве модели объекта управления в данной работе рассматривается стержень длиной L , характеризующийся одномерным распределением теплофизических свойств по независимой пространственной переменной x . Температура $T(x, t)$ поддерживается нагревателями, создающими тепловое поле вокруг стержня.

При моделировании температурного поля стержня конечной длины используется уравнение теплопроводности [10, 11]:

$$c\rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^B(x) \cdot S}{V} [T(x, t) - T^{OC}(x, t)] + F(x, t) \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha^{T(x=0)} \cdot S^T \cdot [T(0, t) - T^{OC}(0, t)], \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -\alpha^{T(x=L)} \cdot S^T \cdot [T(L, t) - T^{OC}(L, t)] \quad (3)$$

и начальными условиями:

$$T(x, 0) = T^{OC}(x). \quad (4)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м³; α^B и α^T – коэффициенты теплоотдачи боковой и торцевой поверхностей, Вт/(м²·К); S – площадь боковой поверхности стержня, м²; S^T – площадь торцевой поверхности стержня, м²; V – объем стержня, м³; $T^{OC}(x, t)$ – температура окружающей среды, К.

Функция $F(x, t)$ характеризует удельную мощность внутренних источников тепла. Для процессов роста кристаллов под *внутренними источниками* мы понимаем процессы выделения скрытой теплоты кристаллизации на границе раздела фаз, поглощенную энергию инфракрасного излучения нагревателей или энергию дополнительных внутренних нагревателей (например, при *ОТФ – методе* [32]).

Для данной модели ростовой установки примем:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - kT(x, t) + kT^{OC}(x, t) + \bar{F}(x, t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + k_1 T(0, t) = k_1 T^{OC}(0, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + k_2 T(L, t) = k_2 T^{OC}(L, t), \quad (7)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$, $k = (\alpha^B S) / (Vc\rho)$, $k_U = P^H / (Vc\rho)$, $\bar{F}(x, t) = F(x, t) / (c\rho)$,

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) / (c\rho), \quad k_2 = \alpha^{T(x=L)} \cdot S^T / \lambda.$$

Решение методом конечных интегральных преобразований. Для решения поставленной задачи применим *метод конечных интегральных преобразований*. С его помощью удается построить физически прозрачные модельные представления, что оказывается полезным для последующего решения задач управления объектами с распределенными параметрами. Однако необходимо отметить, что эффективность метода интегральных преобразований ограничивается классом линейных моделей для простых форм областей изменения пространственных аргументов [8].

Метод применяется для дифференциальных уравнений вида

$$A_1(x,t) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = C(x,t) \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + B_1(x,t) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + C_1(x,t)Q(x,t) + f(x,t,u(x,t)) \quad (8)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\alpha(x_0,t)Q(x_0,t) + \beta(x_0,t) \frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = g_0(t,u_0(t)), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\alpha(x_1,t)Q(x_1,t) + \beta(x_1,t) \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = g_1(t,u_1(t)), \quad t > 0, \quad (10)$$

$$Q(x,0) = Q_o^{(0)}(x), \quad \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = Q_o^{(1)}(x), \quad x \in (x_0, x_1). \quad (11)$$

В общем случае конечное интегральное преобразование изначально рассматривается в виде

$$Q(\mu,t) = \int_{x_0}^{x_1} Q(x,t) \cdot \phi(\mu,x) \cdot r(x) dx \quad (12)$$

с ядром преобразования $\phi(\mu,x)$, которое является решением однородного уравнения:

$$C(x,t) \frac{\partial^2 \phi(\mu,x)}{\partial x^2} + B_1(x,t) \frac{\partial \phi(\mu,x)}{\partial x} + C_1(x,t)\phi(\mu,x) = -\mu^2 \phi(\mu,x) \quad (13)$$

параметром μ и весовой функцией $r(x)$:

$$r(x) = \frac{1}{C(x)} \exp \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{B_1(x)}{C(x)} dx \right]. \quad (14)$$

Ядро преобразования $\phi(\mu,x)$ находится из решения соответствующей системе (8) – (11) *краевой задачи Штурма-Лиувилля*. Эта задача, иначе называемая *спектральной задачей*, имеет отличные от нуля решения только при определенных вещественных значениях параметра μ , называемых *собственными значениями*. Собственные значения μ_n ($n=1, 2, \dots$) образуют возрастающую последовательность (*спектр собственных чисел*). Каждому собственному числу соответствует собственная функция $\phi_n(x)$, определяемая с точностью до постоянного множителя. Система собственных функций

$[\phi_n(x)]$ ортогональна с весом $r(x)$ на промежутке $[x_0, x_1]$ и образует полную систему функций в смысле *среднеквадратичного приближения* [8].

Таким образом, всякая функция состояния рассматриваемого объекта при некоторых допущениях может быть представлена ее разложением в сходящийся в среднем ряд по ортогональной системе собственных функций (*ряд Фурье*):

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cdot \phi_n(x). \quad (15)$$

Сходимость в среднем означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_1} [(Q(x, t) - \sum_{n=1}^N Q_n(t) \cdot \phi_n(x))^2] dx = 0. \quad (16)$$

Это позволяет ограничиться конечным числом гармоник, исходя из удовлетворительной аппроксимации $Q(x, t)$.

Для данной задачи удается получить компактную систему разрешающих уравнений относительно невысокого порядка (по сравнению с сеточными методами). Это, в дальнейшем, позволит использовать классические методы теории управлений в пространстве состояний.

Ядро преобразования $\phi(\mu, x)$ находится из решения соответствующей системе (8) – (11) краевой задачи Штурма-Лиувилля вида [5]:

$$\phi''(\mu, x) = -\mu^2 \phi(\mu, x), \quad (17)$$

с граничными условиями:

$$\phi'(\mu, 0) + k_1 \phi(\mu, 0) = 0; \quad \phi'(\mu, L) + k_2 \cdot \phi(\mu, L) = 0. \quad (18)$$

Весовая функция на основании формулы (13) принимает вид:

$$r(x) = 1/a. \quad (19)$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$\phi(\mu, x) = A \cdot \sin(\mu \cdot x) + B \cdot \cos(\mu \cdot x). \quad (20)$$

Подставляя соотношения (15) – (16) в (14) получим *характеристическое уравнение*:

$$\operatorname{tg}(\mu \cdot L) = \mu \cdot (k_2 - k_1) / (\mu^2 + k_1 \cdot k_2), \quad (21)$$

имеющее бесконечное число собственных значений μ_n ($n = 1, 2, \dots$). Каждому собственному значению соответствует собственная функция $\phi_n(x)$, определяемая решением задачи (17) – (19) с точностью до постоянного множителя. Система собственных функций образует ортогональную систему:

$$\phi_n(x) = \cos(\mu_n \cdot x) - \frac{k_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \cdot x), \quad (22)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_m(x) \cdot \phi_n(x) \cdot r(x) dx = \begin{cases} E_n^2, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь E_n^2 – квадрат нормы собственных функций.

В дальнейшем, при редукции системы уравнений будем использовать

нормированную систему собственных функций $\phi_n^*(x) = \phi_n(x) / E_n$.

Применим метод конечных интегральных преобразований к системе (5) – (7). Учитывая, что:

$$T_n(t) = \int_{x_0}^{x_1} T(x,t) \cdot \phi_n^*(x) \cdot 1/a \cdot dx \quad (25)$$

и, применяя интегрирование по частям, перейдем к системе разрешающих уравнений для поставленной задачи о распределении температуры в стержне:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = A_{nn}T_n(t) + kT_n^{OC}(t) + \bar{F}_n(t) + [k_1T^{OC}(L,t) \cdot \phi_n(L) - k_1T^{OC}(0,t) \cdot \phi_n(0)], \quad (26)$$

$$A_{nn} = -(a\mu_n^2 + k),$$

где $n = 1 \dots N$.

Приближенное решение исходной системы (5) – (7) описывается суммой первых N членов разложения $T(x,t)$ по системе собственных функций $\phi_n^*(x)$:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^N T_n(t) \cdot \phi_n^*(x). \quad (27)$$

В практических задачах количество членов разложения N , а соответственно и порядок разрешающей системы уравнений (26), определяется сравнением приближений $T(x,t)$ с последовательно увеличивающимися значениями N .

Воздействия $\bar{F}_n(t)$ в уравнении объекта (26), реализуемые обычно за счет внутренних источников энергии или вещества, называют *внутренними управлениями* [8].

Управляющие воздействия

$$[k_1T^{OC}(L,t) \cdot \phi_n(L) - k_1T^{OC}(0,t) \cdot \phi_n(0)] \text{ и } kT_n^{OC}(t)$$

в уравнении (26) называют *граничными управлениями* (управлениями по граничным условиям). Они характеризуют целенаправленное воздействие со стороны окружающей среды на границе пространственной области.

Составляющие граничных управлений в квадратных скобках, сконцентрированные в точках x_0 и x_1 на границах отрезка $[x_0, x_1]$, представляют собой сосредоточенные воздействия, которые изменяются во времени.

Результаты расчетов. Рассмотрим распределение температурного поля в стальном стержне с размерами $L = 0,3$ м; $r = 0,03$ м; $L_2 = 0,4$ м; $L_0 = 0,2$ м.

Примем, что температура в камере распределена по закону (см. на рис. 3 сплошную линию):

$$T^{OC}(x,t) = \begin{cases} T_1, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T_2 + (x - L_2) \cdot (T_1 - T_2) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T_2, & 0 < x < L_2. \end{cases} \quad (28)$$

Где $T_1 = 150^\circ\text{C}$ и $T_2 = 50^\circ\text{C}$ – температуры в высоко- и низкотемпературной зоне. Для углеродистой стали $\lambda = 50\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $c = 460\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $\alpha^T = 27\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ (воздух). В этом случае решение трансцендентного уравнения (15) при $n = 8$ дает следующий спектр:

$$\mu_m = 0,10089; 10,472; 20,944; 31,416; 41,888; 52,360; 62,832; 73,4.$$

Первые четыре ортонормированные базисных функции представлены на рис. 2. Аппроксимация заданного распределения температуры в камере при различных значениях n представлена на рис. 3.

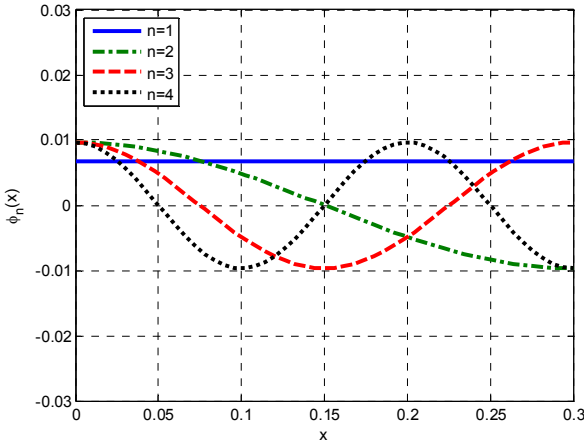


Рис. 2 – Базисные функции ($n = 1, 2, 3, 4$).

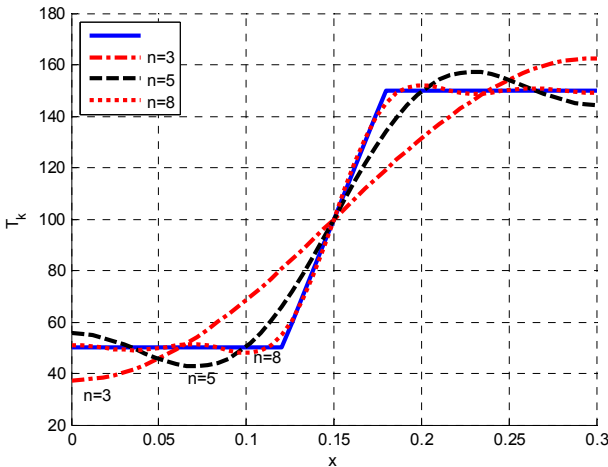


Рис. 3 – Аппроксимация заданного распределения температуры в камере с помощью конечного разложения по базисным функциям ($n = 3, 5, 8$).

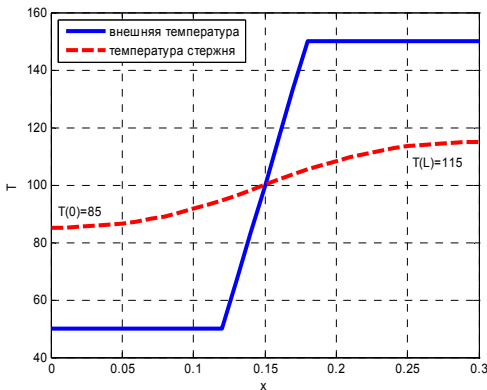


Рис. 4 – Распределение температуры в стержне (пунктир) при заданном распределении внешней температуры (сплошная линия).

Решение задачи о распределении температуры в стержне в квазистационарной постановке ($dT_n(t)/dt = 0$) проиллюстрировано пунктирной линией на рис. 4.

Модель системы управления в пространстве состояний. Математическая модель объекта управления представлена системой уравнений(26). Обычно в теории управления уравнения, описывающие поведение управляемого объекта, записываются в следующей канонической форме (уравнения в пространстве состояний):

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = A \cdot \vec{T}(t) + B \cdot \vec{u}(t), \quad \vec{T}(0) = \vec{T}_0, \quad (29)$$

где $\vec{T}(t) \in R^n$ – N -мерный вектор состояния системы с составляющими $T_i(t)$, $i = 1 \dots N$, \vec{T}_0 – его начальное состояние; $\vec{u}(t) \in R^P$ – P -мерный вектор управления.

Предполагается, что распределение температуры в стержне реализуется с помощью заданного распределения температур в камере:

$$T(x) = \begin{cases} T^{1K}, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T^{2K} + (x - L_2) \cdot (T^{1K} - T^{2K}) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T^{2K}, & 0 < x < L_2. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь T^{1K} и T^{2K} температуры в верхней и нижней зонах камеры соответственно. В этом случае под компонентами вектора управления мы понимаем температуры в зонах:

$$u_1(t) = T^{1K}(t) \text{ и } u_2(t) = T^{2K}(t). \quad (31)$$

Матрица системы A диагональная и ее элементы можно представить в виде:

$$A_{ij} = \begin{cases} -(k + a \cdot \mu_i^2), & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (32)$$

Далее рассмотрим несколько простейших случаев нахождения управлений температурным полем для квазистационарного случая.

Для рассматриваемой системы, при $N = 5$, матрицы системы (29) имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -2,97 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,83 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,41 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,41 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,4710 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4.0905 \cdot 10^{-2} & 4.0905 \cdot 10^{-2} \\ -3.6231 \cdot 10^{-2} & 3.6231 \cdot 10^{-2} \\ 1.7834 \cdot 10^{-5} & 1.7834 \cdot 10^{-5} \\ 1.0517 \cdot 10^{-2} & -1.0517 \cdot 10^{-2} \\ 1.6737 \cdot 10^{-5} & 1.6737 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Нахождение температур зон для заданного распределения температур. Полученная система уравнений (19) позволяет решать обратную задачу: о нахождении значений температур зон тепловой камеры для заданного распределения температур стержня $T^*(x)$. В квазистационарном случае система уравнений (19) принимает вид;

$$B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^* = 0. \quad (33)$$

Данная задача относится к *переобусловленным системам* [12], то есть к таким системам, в которых число уравнений больше числа неизвестных. Решение подобной задачи называют *квазирешением* и получают из условия минимума невязки при условии близости к некоторому заданному решению \vec{u}_0 :

$$(B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^*, B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^*) + \alpha(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{u} - \vec{u}_0) \Rightarrow \min. \quad (34)$$

Пусть, например, заранее заданное распределение температуры по длине стержня имеет кусочно-линейный вид (рис. 5), причём $T_1^* = 105^\circ \text{C}$, а $T_2^* = 95^\circ \text{C}$:

$$T^*(x) = \begin{cases} T_1^*, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T_2^* + (x - L_2) \cdot (T_1^* - T_2^*) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T_2^*, & 0 < x < L_2. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения $T^*(x)$ по базисным функциям вычислены по формуле (25):

$$T_m^* = 1.4672 \cdot 10^4; -6.4968 \cdot 10^2; 5.3217 \cdot 10^{-1}; 1.8897 \cdot 10^2; 1.3829 \cdot 10^{-1}.$$

В результате решения задачи минимизации (34) получаем искомые температуры зон: $T^1 = 127,2^\circ \text{C}$; $T^2 = 72,8^\circ \text{C}$.

Управление расположением фронта кристаллизации. Одна из важных

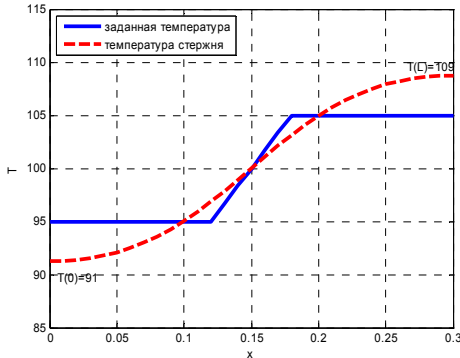


Рис. 5 – Нахождение распределения внешней температуры (сплошная) по заданному распределению температуры в стержне (пунктир).

Другие графики демонстрируют изменение температурного поля при опускании стержня на величины $H = 0,02$ м и $H = 0,04$ м соответственно.

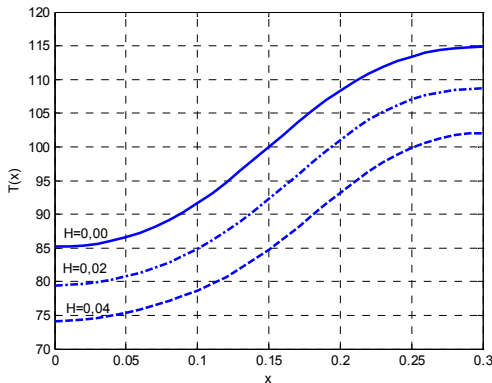


Рис. 6 – Изменение распределения температуры в стержне при опускании стержня.

пунктирная линия показывает результат управляющего воздействия.

Рассмотрим изменение температуры в точке стержня на уровне, соответствующей верхнему краю диафрагмы.

В первоначальный момент (точка A на графике) значение температуры стержня в заданной точке равно $T_A = 94,7^\circ \text{C}$. После того, как стержень опущен на $H = 0,04$ м, температура в этой точке повышается (точка B на графике) и становится равной $T_B = 101,8^\circ \text{C}$. Далее, в результате теплообмена, температура стержня снижается, что соответствует пунктирной кривой на графике, а температура стержня в данной точке пространства (точка B на

проблем управления температурным полем при росте кристаллов состоит в стабилизации положения фронта кристаллизации (границы между расплавом и зарождающимся кристаллом) относительно неподвижной системы координат.

Рассмотрим изменение температурного поля при опускании ампулы с кристаллизующим веществом (рис. 6). Первоначальное распределение температуры, показанное на рис. 6 сплошной линией, соответствует положению стержня, симметричному относи-

На модельном примере стержня попробуем стабилизировать это положение, управляя температурой верхней зоны. На рис. 7 приведено 3 линии распределения температур. Сплошная линия соответствует исходному состоянию, симметричному относительно диафрагмы расположению стержня, пунктирной линией показано распределение температур для опущенного стержня без изменения температурных условий. Штрих-

рисунке) становится равной $T_C = 86,4^\circ \text{C}$.

Поскольку управление осуществляется одним параметром – температурой верхней зоны, решение проблемы можем осуществить с помощью *метода дихотомии* [12]. При невысокой скорости сходимости, дихотомия проста в реализации, устойчива к ошибкам округления и сходится для любых непрерывных функций.

Для представленного примера, расчетным путем установлено, что для стабилизации температуры в данной точке пространства $T_D = 94,7^\circ \text{C}$ необходимо поднять температуру в верхней зоне до $T_1^* = 173^\circ \text{C}$.

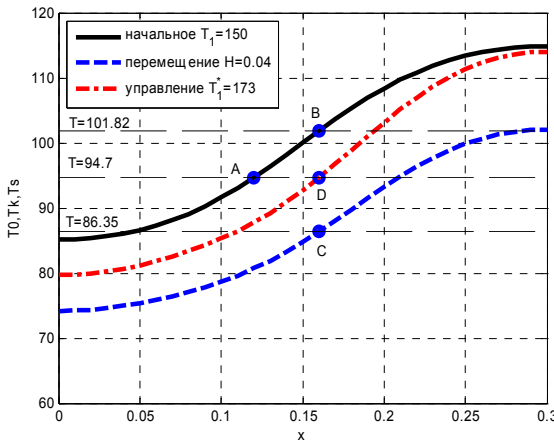


Рис. 7 – Стабилизация температуры в заданной точке стержня (над диафрагмой) при опускании стержня на заданное значение $H = 0,04$ м.

состояний, позволяющих в дальнейшем синтезировать регуляторы для процессов стабилизации температурного поля с использованием стандартных процедур теории автоматического управления.

Построен алгоритм управления температурным полем объекта при перемещении внутри установки. Приведены способы стабилизации температурного поля в заданной точке пространства при перемещении всего объекта.

Полученные методики служат модельными для управления усложненными моделями объектов.

Список литературы: 1. *Тевяшев А. Д., Шелкалин В. Н., Епифанов Ю. М., Козьмин Ю. С.* Об одном методе синтеза многосвязных регуляторов // Восточноевропейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 5/3(20). – С.56 – 64. 2. *Довбиш А.С., Козьмин Ю.С., Берест О.Б.* Информационно-экстремальный алгоритм навчання системи керування вирощуванням скінтіляційних монокристалів / Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ", Тематичний випуск «Системний аналіз, управління та інформаційні технології», – №30, – 2012, – С.54 – 60. 3. *Горилецкий В.И., Гринев Б.В., Заславский Б.Г., Смирнов Н.Н., Суздаль В.С.* Рост кристаллов. Галогениды щелочных металлов – Харьков. Акта, 2002. – 536с. 4. *Филиппов М.М., Бабушкин Ю.В., Грибеновков*

Выводы. В статье построена модель температурного поля кристаллизатора, как объекта с распределенными параметрами в пространстве состояний. В качестве упрощенной физической модели рассмотрен стержень с одномерным распределением физических свойств и температурных полей.

Получена каноническая система уравнений распределенного объекта в пространстве

А.И., Гинсар В.Е. Система управления многозонной термической установкой для выращивания кристаллов по методу Бриджмена // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – №5. – С. 146 – 151. **5. Филиппов М.М., Грибенюков А.И., Бабушкин Ю.В., Кочегуров В.А.** Оптимальная стабилизация температурного поля распределенного объекта // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 4. – С. 21 – 26. **6. Багдасаров Х.С.** Высокотемпературная кристаллизация из расплава. – М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2004. – 160 с. **7. Полежаев В.И., Никитин С.А., Макишина М.Н.** Теплообмен и температурное расслоение при свободноконвективных взаимодействиях в замкнутых объемах. Труды пятой Российской национальной конференции по теплообмену. – Т.1. – М.: Издат. дом МЭИ, 2010. – С.55 – 63. **8. Ранопорт Э.Я.** Оптимальное управление системами с распределенными пара-метрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с. **9. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А.** Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: Учебник для вузов. – М. Металлургия, 1990, – 239 с. **10. Фарлоу С.** Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с. **11. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А.** Тепломассообмен. Изд-во: МЭИ, 2005, – 550 с. **12. Гоник М.М., Боевкин В.И.** Повышение точности управления температурным режимом в установках выращивания кристаллов // Управление большими системами. – 2010. – № 1. – С.211 – 229.

Поступила в редколлегию 23.01.2014

УДК 681.526

Математическое моделирование объектов с распределёнными параметрами для управления процессами кристаллизации / Ю. С. Козьмин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 81 – 93. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглядаються питання управління процесами вирощування скінтіляційних кристалів. Кристалізатор, як об'єкт управління, представляється системою з розподіленими параметрами. У якості фізичної моделі розглянуто стрижень з одновимірним розподілом фізичних властивостей і температурних полів. Отримано систему рівнянь у просторі станів. Побудовано алгоритм управління температурним полем об'єкта при переміщенні кристалізатора всередині установки. Наведено способи стабілізації температури в заданій точці простору при переміщенні об'єкта. Отримані методики служать тестовими для вивчення процесів управління об'єктами на основі більш складних фізичних моделей.

Ключові слова: система з розподіленими параметрами, управління, стабілізація, температурне поле.

UDC 681.526

Mathematical modeling of objects with distributed parameters for crystallization process control / Yu. S. Kozmin // Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 81 – 93. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

This article addresses the process of scintillation crystal growth. A crystallizer, known as an object of control, is considered to be a distributed parameters system. We used a rod (as a physical model) with one-dimensional distribution of physical properties and thermal fields. We obtained a system of equations in the state space. An algorithm of temperature control, when moving a crystallizer inside the unit, was developed. The ways to stabilize the temperature at a given point in space as the object moves were shown. The obtained methodologies were used as tests in order to study objects (based on more complex physical models).

Key words: distributed parameters system, control, stabilization, thermal field.