

Numerical evaluation of plasma methods for measuring velocity of a supersonic gas flow / A. A. Tropina // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 199 – 204. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of the femtosecond laser discharge, acting on a supersonic turbulent flow of a vertical air jet has been proposed. On the basis of numerical calculations the influence of thermal perturbations, caused by the short- pulse discharge, on the velocity profiles was evaluated for different Mach numbers. Comparison with the experimental data indicates that this method of velocity measurements has the biggest error, caused by the influence of thermal disturbances in the shear layer, at the boundary of the jet with the surrounding air.

Key words: laser discharge, mathematical model, numerical simulation, supersonic flow, velocity profiles.

УДК 669.189:621.746.62.001.57

А.В. ФЕДОСОВ, канд. техн. наук, доц., ПГТУ, Мариуполь

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СЛЯБА В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ МАШИНЫ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ ЗАГОТОВОК

Разработана математическая модель процессов кристаллизации и усадки слэбов в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок. В основу численного решения уравнений модели положен метод конечных разностей, позволяющий производить неравномерную дискретизацию расчетной области. На базе этой модели проведены исследования по искажению профиля поперечного сечения слэба под воздействием рабочих стенок кристаллизатора.

Ключевые слова: метод конечных разностей, дифференциальное уравнение, дискретный аналог, непрерывнолитой слиток, кристаллизатор, машина непрерывного литья заготовок.

Введение. Машина непрерывного литья заготовок является ключевым агрегатом современного металлургического производства. Более 90 % жидкой стали, выплавляемой в развитых странах, разливается в непрерывнолитые заготовки различного типа. Кристаллизатор машины непрерывной разливки является ее важной составляющей, от работы которой во многом зависит процесс непрерывной разливки в целом. Кристаллизатор представляет собой медную водоохлаждаемую форму-металлоприемник, в которой начинает формироваться твердая оболочка (корочка) непрерывнолитой заготовки (НЛЗ). В этот период на неё воздействует комплекс теплофизических, гидродинамических и механических процессов, которые оказывают существенное влияние на зарождение и развитие большинства дефектов непрерывнолитой заготовки [1]. В связи с этим, совершенствованию методов исследования процессов, протекающих в кристаллизаторах машин непрерывного литья заготовок, уделяется много внимания.

Анализ последних исследований. На сегодняшний день в литературе представлен широкий спектр различных математических моделей формирования слитков в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок. Наиболее простые одномерные модели, как правило, применяют для решения сугубо тепловых задач охлаждения и затвердевания заготовок [2]. Разработка двухмерных моделей позволяет производить расчеты прочности и усадки поперечного сечения заготовки [3]. При решении гидродинамических задач, пространственная размерность модели должна быть представлена в трех измерениях [4]. Для численной реализации моделей наибольшее распространение получили *методы конечных разностей* (МКР) и *конечных элементов* (МКЭ). Последняя схема обладает рядом неоспоримых преимуществ: универсальность, возможность описания формы объекта практически любой сложности, неравномерная дискретизация расчетных сеток и др. [4]. Однако недостатком реализации МКЭ является относительно высокая ресурсоемкость при решении задач на персональных компьютерах.

Применение явной схемы МКР значительно сокращает требования вычислительной программы к машинным ресурсам. Однако основным требованием данного метода является то, что дискретизация моделируемого пространства должна производиться по строго ортогональным направлениям, в результате чего возникают сложности в описании объектов произвольной геометрической формы. Профиль слябовых непрерывнолитых заготовок имеет прямоугольную форму, что позволяет применять МКР при сохранении высокой точности аппроксимации пространства модели. Эти обстоятельства привели к широкому применению МКР для моделирования непрерывной разливки слябовых заготовок.

В большинстве представленных в литературе математических моделей непрерывной разливки, реализованных на базе МКР, применяется равномерная дискретизация геометрического пространства модели. Такой способ задания расчетной сетки не учитывает распределения температурных градиентов в теле модели, что ухудшает точность аппроксимации, и, как следствие – результатов расчета. В этом отношении МКР существенно проигрывает конечноэлементным методам, которые позволяют изменять плотность дискретизации в различных объемах модели в зависимости от величины температурных градиентов, что позволяет существенно уменьшить количество расчетных узлов при сохранении высокой точности аппроксимации искомой величины. В связи с этим, несомненный интерес представляет разработка конечноразностных методик, позволяющих оперировать неравномерными расчетными сетками, применение которых приближает эффективность МКР к эффективности конечноэлементных методов. При этом следует отметить, что на сегодняшний день в современной технической литературе уделяется мало внимания вопросу применения неравномерных расчетных сеток при моделировании процессов непрерывной разливки с использованием МКР.

Постановка задачи. Основной задачей данной работы является разработка дискретного аналога дифференциального уравнения теплопроводности

сти, позволяющего использовать неравномерную дискретизацию расчетной области с целью повышения точности и скорости численных расчетов. На основании этого уравнения составляется математическая модель затвердевания и усадки слябовой заготовки в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок и проводится анализ результатов моделирования.

Математическая модель. Моделирование нестационарного процесса охлаждения отливок основано на решении базового дифференциального уравнения теплопроводности [5]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) + Q_v, \quad (1)$$

где T – температура металла, °C; C – теплоемкость металла, Дж/(кг·°C); ρ – плотность металла, кг/м³; λ – теплопроводность металла, Вт/(м·°C); τ – время, с; Q_v – объемный источник тепла, Вт.

Применение МКР предусматривает замену бесконечно малых составляющих дифференциального уравнения конечными значениями, посредством дискретизации моделируемого пространства и применения гипотезы о линейном изменении температуры в пределах элемента. При этом, выражение (1) заменяется дискретным аналогом, из которого может быть получена система линейных уравнений. Обычно модель разбивают на равные по объёму и форме прямоугольные элементы, что значительно упрощает дискретный аналог дифференциального уравнения и алгоритм построения расчетной сетки. Однако, ввиду того, что такой подход обладает перечисленными выше недостатками, автором разработана конечноразностная модель, использующая неравномерную расчетную сетку.

Основным требованием к построению сетки для МКР является то, что узловые точки должны лежать на пересечениях линий, параллельных координатным осям, при этом варьируется только расстояние между этими линиями. Чем меньше шаг между линиями, тем (потенциально) точнее аппроксимация. В случае моделирования охлаждения слитка с учетом локальных коэффициентов теплоотвода желательнее повышать точность у корки слитка – на границе расчетной сетки. С учетом параболического характера распределения температуры в расчетной области предложено производить расчет линейных размеров сетки по уравнению:

$$\Delta x_i = \frac{L}{\sqrt{i}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где Δx_i – линейный размер i -того элемента, м; L – общий линейный размер модели, м; i – номер элемента; n – общее количество элементов; $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$ – нормирующий коэффициент.

Нумерация элементов должна быть направлена от краев сетки к тепловому центру рассматриваемого сечения.

В большинстве случаев в МКР не проводится точный вывод уравнений из (1). Вместо этого создаются упрощенные уравнения теплового баланса, оперирующие потоками, параллельными координатным осям и направленными от узла к узлу. При этом возникает понятие *контрольного объема* (КО), для которого производится расчет среднего значения теплового потока через его границы по направлениям координатных осей. На рис. 1 контрольные объемы выделены штриховкой.

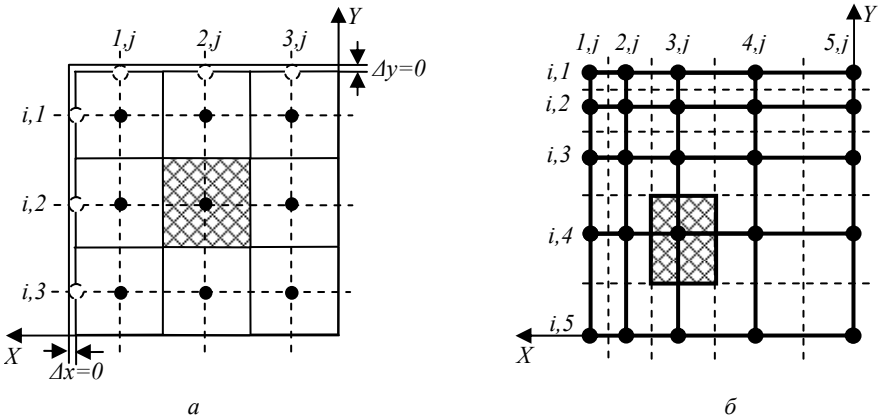


Рис. 1 – Пример дискретизации двухмерного моделируемого пространства с использованием равномерной (поз. а) и неравномерной (поз. б) расчетных сеток.

Границы КО определяются пересечением линий, проведенных по средним точкам между координатами узлов расчетной сетки. При применении равномерной расчетной сетки геометрические размеры контрольных объемов и элементов сетки совпадают, а тепловой центр контрольного объема находится в его геометрическом центре (рис. 1 а), что существенно упрощает формулирование дискретного аналога для дифференциального уравнения теплопроводности. При использовании неравномерной расчетной сетки появляется два варианта взаимного расположения КО и расчетных узлов сетки. В первом варианте расчетный узел располагается на пересечении диагоналей КО и ассоциируется с тепловым центром КО. Однако при этом варианте невозможно получить узел на границе сетки. Проблема решается введением вокруг сетки дополнительного слоя нулевой толщины, создающего узлы на «открытых» гранях контрольных объемов (рис. 1 а). Новые объемы не нарушают физики, поскольку имеют нулевую теплоемкость, нулевую теплопроводность вдоль границы и бесконечно большую теплопроводность от границы в сетку. Однако ввод дополнительных узлов увеличивает размер системы уравнений.

При втором подходе границы КО располагаются посередине между узлами расчетной сетки, которые в свою очередь смещаются относительно геометрического центра КО (рис. 1 б). Второй вариант расстановки узлов вы-

глядит проще, и узлы на границе можно получить без дополнительных приемов. Но смещение узлов относительно геометрических центров контрольных объемов усложняет вывод формул, связывающих поле температур с полем потоков, а также усложняет учет теплоемкости и других свойств материала, зависящих от температуры, что в свою очередь может повлиять на точность метода.

В данной работе представлена двухмерная модель поперечного сечения НЛЗ. Применительно к условиям теплообмена в кристаллизаторе, расчет может выполняться для четверти сечения НЛЗ. В таком случае, по осям симметрии X и Y откладываются половины ширины и толщины сечения соответственно. Также в расчётах необходимо учитывать толщину сечения, которая зависит от условий разливки. Толщина направлена по оси Z , соответствующей продольной оси машины непрерывного литья заготовок, вдоль которой движется плоская система координат поперечного сечения. Для этих условий разработан вариант дискретного аналога уравнения 1, предусматривающий возможность применения неравномерных расчетных сеток со смещенным расположением узлов относительно центра КО:

$$\rho \cdot C_{Эi,j} \cdot \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta \tau} V_{(i,j)} = (Qx_{(i+1,j)} + Qx_{(i-1,j)} + Qy_{(i,j+1)} + Qy_{(i,j-1)}), \quad (3)$$

где $C_{Эi,j}$ – эффективная теплоемкость материала в КО, ассоциированном с узлом (i, j) , Дж/кг, (кроме непосредственной зависимости от температуры, эта величина учитывает теплоту фазового перехода [5]); $T_{i,j}^k, T_{i,j}^{k+1}$ – температура в узле (i, j) , в момент времени k и $k+1$ соответственно, К; Qx, Qy – тепловые потоки по оси x и y соответственно, Вт; $V_{(i,j)}$ – локальный объем, ассоциированный с узлом (i, j) , м³; $\Delta \tau$ – шаг по времени, с,

$$V_{(i,j)} = \frac{(y_{(j+1)} + y_{(j-1)}) \cdot (x_{(i+1)} + x_{(i-1)})}{4} Z^k, \quad (4)$$

$x_{(i)}, y_{(i)}$ – координаты узла расчетной сетки по осям x и y соответственно, м; Z^k – толщина слоя поперечного сечения модели непрерывнолитого слитка, м.

Толщина слоя определяется в соответствии со скоростью разливки (v , м/с) формулой

$$Z^k = v / \Delta \tau. \quad (5)$$

Для расчета тепловых потоков по осям используются уравнения:

$$Qx_{(i-1,j)} = \left(\frac{\lambda_{(i-1,j)} + \lambda_{(i,j)}}{2} \right) \left(\frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{x_{(i)} - x_{(i-1)}} \right) Sy_{(j)}; \quad (6)$$

$$Qx_{(i+1,j)} = \left(\frac{\lambda_{(i+1,j)} + \lambda_{(i,j)}}{2} \right) \left(\frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{x_{(i+1)} - x_{(i)}} \right) Sy_{(j)}, \quad (7)$$

где λ – теплопроводность соответствующего узла, Вт/м·К; $S_{y(j)}$ – площадь границы контрольного объема параллельной осям Y, Z .

$$S_{y(j)} = \frac{y_{(j+1)} + y_{(j-1)}}{2} Z^k, \quad (8)$$

Тепловые потоки Q_y в направлении оси Y и площади $Sx_{(i)}$ в направлении осей X, Z рассчитываются аналогично уравнениям (6) – (8) с подстановкой соответствующих координат и величин.

Для узлов расположенных по наружной границе, тепловые потоки с внешней стороны определяются на основании граничных условий третьего рода. Коэффициент теплоотдачи рассчитывается для каждого внешнего узла с учетом условий контактного теплообмена и теплообмена излучением через газовый зазор [6]. При расчете контактного теплообмена учитывается толщина шлакового гарнисажа в зазоре между стенкой кристаллизатора и затвердевающей корочкой слитка. Толщина шлакового гарнисажа в начальный момент принимается в диапазоне 1–3 мм [7]. В дальнейшем, по высоте кристаллизатора толщина шлакового гарнисажа изменяется в зависимости от условий усадки поперечного сечения заготовки и конусности стенок кристаллизатора.

Усадка поперечного сечения определяется на основании данных об изменении линейных размеров элементов по ортогональным направлениям X и Y :

$$l_{i,j}^{k+1} = l_{i,j}^k \cdot \left(1 + \frac{(\alpha_{i,j}^{k+1} + \alpha_{i,j}^k)}{2} (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k) \right), \quad (9)$$

где $l_{i,j}^k, l_{i,j}^{k+1}$ – линейный размер расчетного элемента в текущий и следующий момент времени соответственно, м; α_i – коэффициент линейного расширения стали, зависящий от температуры, $^{\circ}C^{-1}$.

Следует учесть, что уравнение (9) описывает свободную усадку элементов расчетной сетки. Применение условия сплошности материала в модели позволит рассчитать геометрическую форму поперечного сечения заготовки, обусловленную процессом свободной усадки стали при ее затвердевании и охлаждении.

Теплофизические свойства моделируемых материалов оказывают существенное влияние на результаты расчетов. Рассматриваемые процессы охлаждения и кристаллизации стали протекают в широком интервале температур (1000 – 1600 $^{\circ}C$), для которого, в зависимости от химического состава стали, могут происходить различные полиморфные превращения, приводящие к изменению теплофизических свойств стали. С целью повышения адекватности результатов моделирования целесообразно использовать функциональные зависимости теплофизических свойств стали от температуры. В разработанной модели применяется кусочно-линейная аппроксимация значений основных теплофизических свойств стали. Узловые значения теплофизических параметров принимаются на основании имеющихся в литературе экспери-

ментальных данных для моделируемых марок стали (рис. 2).

Применение кусочно-линейной аппроксимации позволяет достаточно точно учитывать изменения свойств стали при относительно простом способе программной реализации.

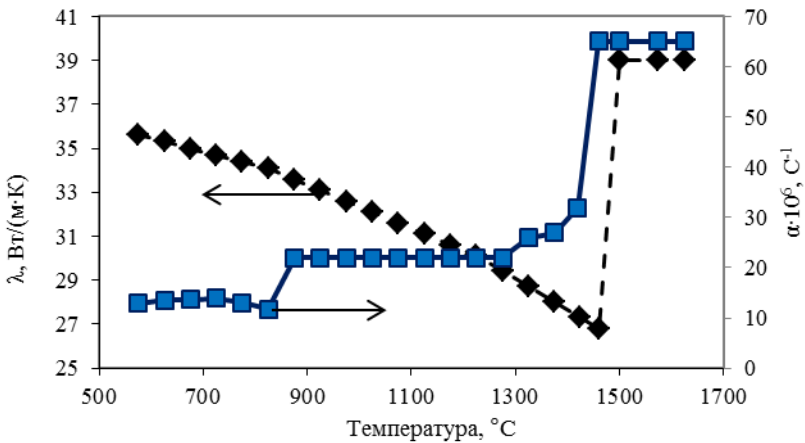


Рис. 2 – Зависимость величины теплопроводности и коэффициента термического сжатия от температуры низколегированной перитектической стали.

Результат работы программы. В результате использования представленной математической модели получаем тепловое поле и геометрическую форму поперечного сечения НЛЗ (рис. 3).

Прогнозирование геометрического профиля заготовки позволяет оценивать условия взаимодействия затвердевающей корочки со стенками кристаллизатора и роль их конусности в процессе формирования непрерывнолитой заготовки. Абсолютные значения величины усадки корочки стали по длине широкой грани существенно превосходят значения по длине узкой грани. Это приводит к искажению профиля заготовки в ее углах, что проиллюстрировано на рис. 3. Применение неравномерной расчетной сетки позволяет детально оценить характер искажений профиля заготовки (размеры элементов в углах заготовки на рис. 3 находятся на уровне 1,5 – 2 мм).

В представленных примерах расчета (рис. 3 б – з) рассмотрены несколько вариантов взаимодействия корочки стали со стенками кристаллизатора. На рис. 3 б конусность узких стенок кристаллизатора недостаточна для компенсации усадки твердой оболочки слитка. В этом случае происходит выпучивание узких граней сляба и формирование различных трещин в его углах.

Рис. 3 в – вариант избыточной конусности. В этом случае узкие стенки кристаллизатора воздействуют на корку стали, сформированную по широкой грани непрерывнолитой заготовки, поджимая ее в направлении оси заготовки. Усилия, приложенные к корке с двух сторон, могут вызывать ее деформацию и изменение условий контакта с широкими стенками кристаллизатора. Кроме этого, возрастает величина сил трения в углах нижней части кристаллизатора. В результате это приводит к повышенному износу рабочих

стенок кристаллизаторов и ухудшению качества поверхности непрерывнолитой заготовки.

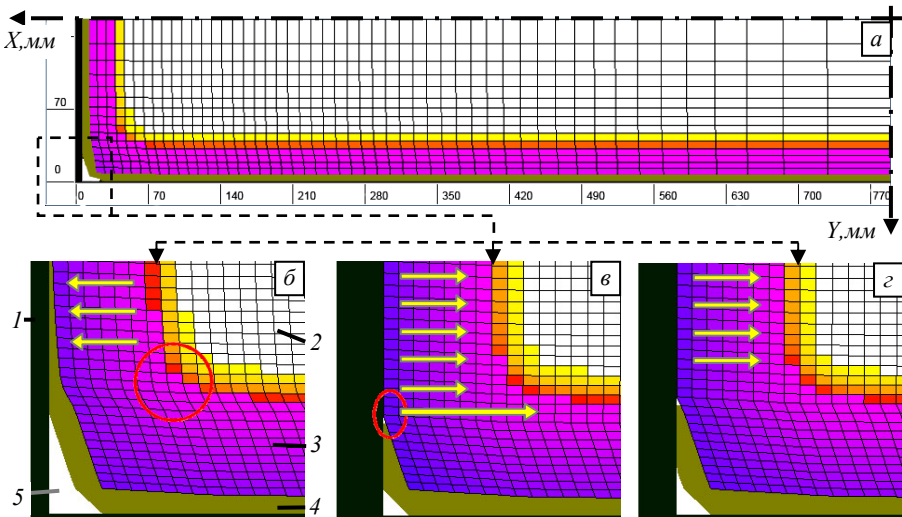


Рис. 3 – Результаты расчета теплового и геометрического профиля поперечного сечения НЛЗ в нижней точке кристаллизатора: *a* – общий вид расчетной сетки; *б* – недостаточная конусность; *в* – избыточная конусность; *з* – рациональная конусность; 1 – кристаллизатор; 2 – жидкая сталь; 3 – твердая корочка стали; 4 – шлаковый гарнисаж; 5 – газовый зазор.

Решая задачу оптимизации в рамках предложенной модели, возможно определение третьего варианта взаимодействия стенок кристаллизатора и корочки слитка – вариант рациональной конусности (рис. 3 *з*). Основным условием рациональной конусности стенок кристаллизатора является максимально точная компенсация усадки корочки стали сформированной по широкой грани слябовой заготовки.

Отдельный интерес представляет анализ распределения теплового потока по поверхности непрерывнолитой заготовки. Тепловой поток по основной площади широкой грани (рис. 4 *a*) монотонно уменьшается по мере продвижения расчетного сечения от мениска стали к выходу из кристаллизатора. Такой характер изменения величины теплового потока связан с уменьшением температуры поверхности слитка по мере роста толщины твердой корочки и увеличения ее теплового сопротивления. Резкое уменьшение теплового потока по краям широкой грани обусловлено термической усадкой корки твердой стали, сформированной по узкой грани, что сопровождается увеличением зазора между поверхностями слитка и кристаллизатора.

Тепловой поток по узкой грани сляба характеризуется большой неравномерностью. В отличие от широкой грани, посередине узкой происходит увеличение теплового потока. Это связано с уменьшением зазора между по-

верхностью заготовки и стенкой кристаллизатора, обусловленным величиной конусности его узких стенок. Пиковое значение теплового потока соответствует моменту плотного контакта корочки непрерывнолитой заготовки и рабочей стенки кристаллизатора. По краям узкой грани, также как и в случае с широкой гранью, происходит резкое уменьшение теплового потока, связанное с усадкой твердой оболочки стали.

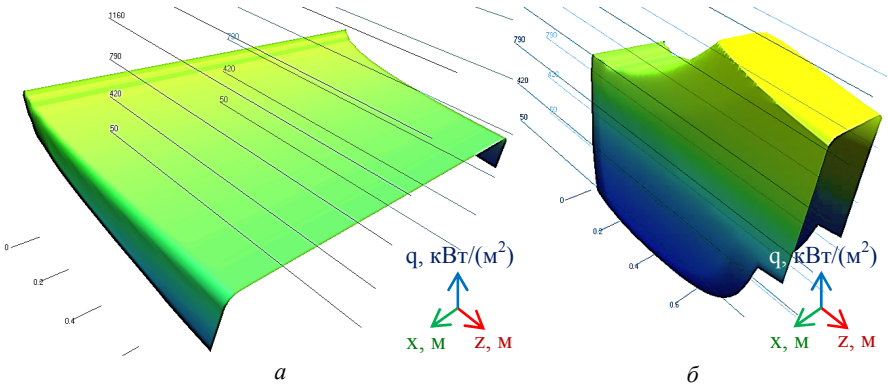


Рис. 4 – Распределение величины теплового потока: *а* – по широкой и *б* – по узкой граням непрерывнолитой заготовки.

Анализ результатов расчета позволяет сделать ряд заключений.

- На величину усадки корочки стали, сформированной по широкой грани заготовки, основное влияние оказывают свойства разливаемой стали и условия теплообмена по широким граням кристаллизатора. При этом локальные уменьшения коэффициента теплоотдачи в углах заготовки, вызванные изменением условий контакта и возникновением газового зазора, практически не оказывают влияния на величину усадки корочки в целом. Однако, негативное влияние резких изменений величины теплового потока в углах заготовки сказывается на термонапряженном состоянии твердой корочки стали, что в результате увеличивает вероятность образования трещин.

- Действие ферростатического давления на твердую оболочку слитка противоположно по направлению силам, возникающим в результате усадки. Преобладание силы ферростатического давления приводит к выпучиванию заготовки и возникновению растягивающих деформаций, сопровождающихся образованием трещин в твердой корочке стали. В этом случае стенки кристаллизатора выступают в роли формообразователя заготовки и принимают на себя воздействие ферростатического давления.

Перспективы дальнейших исследований. В представленной работе не приводится расчет и анализ влияния сил ферростатического давления на формирование твердой оболочки непрерывнолитой заготовки. Учитывая весомость данного фактора целесообразно учесть его в будущих работах.

Выводы. Предложенный вид конечноразностного дискретного аналога

дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности позволяет производить неравномерную геометрическую дискретизацию моделируемого пространства. Это, в свою очередь, позволяет учесть неравномерный характер распределения температурных градиентов по сечению заготовки и, тем самым, существенно повысить эффективность использования модели.

На базе предложенного подхода разработана математическая модель формирования непрерывнолитых слябов в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок, позволяющая повысить эффективность исследований процессов формирования теплового и геометрического профиля слябов. Результаты моделирования могут быть использованы при решении задач по оптимизации условий взаимодействия кристаллизатора и оболочки слитка.

Список литературы: 1. *Смирнов А.Н., Куберский С.В., Штенан Е.В.* Непрерывная разливка стали: Учебник. – Донецк: ДонНТУ, 2011. – 482 с. 2. *Шишкин В.А., Кузнецова Н.П., Чугункова М.С.* Исследование и совершенствование тепловой работы кристаллизатора машины непрерывного литья заготовок // Известия ВУЗов Черная Металлургия. – 2010. – №1. – С. 55 – 57. 3. *Ivanova A.A.* Criteria of the quality of the temperature field of a continuous-cast ingot // Metallurgist, Vol. 55, Nos. 9 – 10, January, 2012. – pp. 710 – 719. 4. *Jong-Кyu YOON* Applications of Numerical Simulation to Continuous Casting Technology // ISIJ International, Vol. 48 (2008), No. 7. – pp. 879 – 884. 5. *Патанкар С.В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течи в каналах. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 312 с. 6. *Дюдкин Д. А.* Качество непрерывнолитой стальной заготовки. – К.: Техніка, 1988. – 253 с. 7. *Ludlow, V., Harris, B., Riaz, S.*[etc.] Continuous casting mould powder and casting process interaction: why powders do not always work as expected // VII International Conference on Molten Slags Fluxes and Salts, The South African Institute of Mining and Metallurgy, 2004. – pp. 723 – 730.

Поступила в редколлегию 24.01.2014

УДК 669.189:621.746.62.001.57

Математическое моделирование профиля поперечного сечения сляба в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок / А. В. Федосов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 204 – 213. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Розроблено математичну модель процесів кристалізації і усадки слябів в кристаллизаторі машини безперервного лиття заготовок. В основі чисельного рішення моделі покладено метод кінцевих різниць, що дозволяє проводити нерівномірну дискретизацію розрахункової області. На основі цієї моделі проведені дослідження з викривлення профілю поперечного перерізу слябу під впливом робочих стінок кристаллизатора.

Ключові слова: метод кінцевих різниць, диференціальне рівняння, дискретний аналог, безперервнолитий злиток, кристаллизатор, машина безперервного лиття заготовок.

UDC 669.189:621.746.62.001.57

Mathematical modeling of the cross-sectional profile of the slab in the mold of continuous casting machine / A.V. Fedosov // Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 204 – 213. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of the slabs crystallization and shrinkage processes in the mold of continuous casting machine is developed. The numerical solution of the model is based on the method of finite differences that allows to apply irregular sampling of calculation area. On the basis of this model, studies towards the distortion of the slab cross-sectional profile exposed to the mold working walls are conducted.

Key words: Finite difference method, differential equation, discrete analog, the strand, mold, continuous casting machine.