УДК 513.85

А.Г. КОШОВИЙ, ст. викл., НАКУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків;
Г.І. КОШОВИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НАКУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ РОЗСІЮВАННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ ДОФРАКТАЛЬНИМИ ҐРАТКАМИ.

На основі методу інтегральних рівнянь наведена узагальнена математична модель процесу розсіювання акустичної хвилі дофрактальними ґратками. Детально досліджується випадок акустично жорсткої ґратки. Запропонована нова математична модель у вигляді особливих інтегральних рівнянь, до яких вже можна застосовувати прямі чисельні методи. Отримана мікросмужна асимптотика.

Ключові слова: акустичні хвилі, задача розсіювання, дофрактальна гратка, інтегральні рівняння, досконала множина.

Вступ. У випадку прямих задач теорії дифракції (у широкому розумінні), які полягають у вивченні поля заданих джерел при заданих геометричних і фізичних характеристиках розсіювачів, розробка теоретичних основ застосування методу інтегральних рівнянь для дослідження вказаного класу задач по суті є давно завершеною [1]. Правда, залишаються досить суттєві, з точки зору практичних застосувань, питання найбільш ефективної реалізації чисельних алгоритмів розв'язку конкретних задач. Зокрема, актуальним є поєднання добре розроблених класичних методів з новими теоріями, що виникають з практичних потреб. До них, зокрема, належить *теорія фракталів*, яка набула широкого розповсюдження при моделюванні різних об'єктів та явищ [2]. Зрозуміло, що нова теорія має бути розроблена на рівні, що відповідає класичному методу: *не варто мікроскопом забивати цвяхи*. Загальна теорія фракталів охоплює надзвичайно великий обсяг матеріалу і знаходиться у безперервному збагаченні за рахунок нових об'єктів моделювання. Тому саме поняття фрактал не має чіткого визначення і тлумачиться досить вільно. Це дає підстави багатьом науковцям ставитись до теорії фракталів без відповідної поваги.

Ніде не щільні досконалі множини на прямій. Окремі представники великої множини фракталів з'явились у досить поважних галузях науки і використовувались визначними математиками минулого. Найперше це *К. Вейєрштрас* зі своєю знаменитою функцією, далі *Г. Сміт*, який використовував відомий сучасникам *дисконтинуум Кантора* для побудови функції не інтегрованої за *Ріманом* раніше Г.Кантора – творця сучасної теорії множин [2]. Неможливо перерахувати, навіть досить відомих вчених, які мали справу з дивними математичними об'єктами, що зараз називаються фракта-

© А. Г. Кошовий, Г. І. Кошовий, 2014

лами. Щоправда вони не могли надавати їм певної уваги, бо не бачили їх практичного застосування.

Під назвою *ніде не щільних досконалих множин* (НЩДМ), що вивчаються у курсах теорії множин та загальної топології, фрактали увійшли до загальновизнаних підручників вишів [3]. Зрозуміло, що НЩДМ на прямій подавались не як вагомий інструмент математичного моделювання, а тільки як ілюстративний матеріал. Тому не проводився системний аналіз з точки зору практичного застосування у математичному моделюванні. Отже, якщо обмежитись тільки НЩДМ на прямій, які повністю задовольняють *означення фракталу, як множини розмірність Хаусдорфа (РХ) якої строго більше за топологічну розмірність*, то можна розробити досить потужну теоретичну базу для строгого поєднання теорії самоподібних фракталів (СПФ) з теорією дифракції. В статтях [4, 5] запропоновано системний підхід до розробки теорії СПФ зі змінною РХ з огляду на застосування цієї теорії для задач розсіювання електромагнітних хвиль дофрактальними ґратками. Там, зокрема, наведені структурні схеми побудови двох класів СПФ зі змінною РХ на основі одновимірних НЩДМ.

Для кожної стадії побудови СПФ визначені вихідні функції $x_m^n(t)$, де n – номер стадії побудови, а m пробігає значення від 1 до N – кількості сегментів даної стадії побудови. Якщо маємо справу з класом СПФ з РХ $\ln 2/\ln\kappa$, де коефіцієнт самоподібності $\kappa > 2$, то $N = 2^n$ [4]; коли ж обираємо клас СПФ з РХ $\ln 3/\ln\kappa$, $\kappa > 3$, то кількість сегментів $N = 3^n$ [5]. Зазначимо, що, подібним до зазначених статей чином, можна будувати і досліджувати класи СПФ з РХ $\ln l/\ln\kappa$, з $\kappa > l$, де l є натуральним числом, більшим за 3.

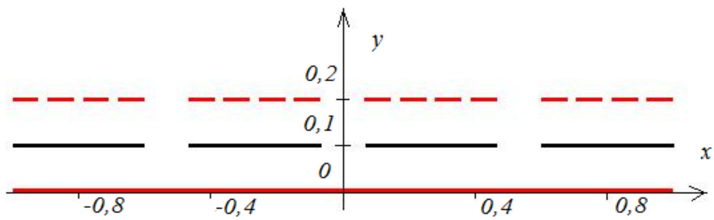

Рисунок – Процес побудови СПФ з РХ $\ln 4/\ln 5$.

На рисунку приведена геометрична ілюстрація початку процесу творення СПФ з РХ $\ln 4/\ln 5$ у якого *носієм* (*ініціатором*) є сегмент $[-1, 1]$, а *утворювачем* – чотири сегменти, що визначаються аналітично функціями

$$x_{1,4}^1(t) = \mp 4/5 + \alpha t,\ x_{2,3}^1(t) = \mp 4/15 + \alpha t, \text{ де } \alpha=0.2,\ |t| \le 1.$$

Вони наведені на прямій $y = 0.1$, а на прямій $y = 0.2$ зображені 16 сегментів другої стадії процесу творення СПФ (*дофрактал* другої стадії). Коли цей процес творення продовжувати необмежено, то виникне зазначений

СПФ. Доведення проводиться подібно до того, як це зроблено у статті [4].

У цьому випадку $N = 4^n$, а в загальному – $N = l^n$. Вихідні функції $x_m^n(t)$ при застосуванні методу інтегральних рівнянь (МІР) будуть відповідно вхідними. Математичний опис процесу розсіювання гармонічно залежної за часом акустичної хвилі ґраткою приводить до крайових задач *для рівняння Гельмгольца* [1]. Це *зовнішні задача Діріхле*, коли маємо акустично м'яку ґратку, та *задача Неймана*, коли ґратка є акустично жорсткою.

Основна перевага методу інтегральних рівнянь полягає у тому, що задачі поставлені у необмеженому просторі переводяться до задач у обмеженій області меншої топологічної розмірності.

Коли маємо планарну дофрактальну ґратку, то це буде математична модель у вигляді системи ІР за певною кількістю сегментів на прямій, впорядкованих у відповідності з певною стадією творення СПФ [4, 5]. Зазначена обставина є безумовно вирішальною з огляду чисельного аналізу. Зрозуміло, наявні переваги не досягаються без певних вад, пов'язаних, зокрема, з втратою єдиності розв'язку. Це зумовлює розробку аналітичних методів для подолання вказаних труднощів.

Узагальнена модель процесу розсіювання. Повернемось до задач розсіювання акустичної хвилі планарною дофрактальною стрічковою ґраткою. За *методом інтегральних рівнянь* (ІР) отримуємо систему

$$\sum_{m=1}^{N} \int_{-1}^{1} j_m^{1,2}(t) H_0^{(1)}(\left|x_\kappa^n(\tau) - x_m^n(t)\right|) d\tau = f_\kappa^{1,2}(\tau) \ \left|\tau\right| \le 1, \ \kappa = 1, ..., N. \tag{1}$$

Тут $H_0^{(1)}(z)$ – *функція Ханкеля*, яка має логарифмічну особливість при $z = 0$, тобто система ІР є особливою. Права частина залежить від того, чи є ґратка м'якою чи жорсткою. У першому випадку акустично м'якої ґратки права частина системи ІР визначається за формулою

$$\frac{\pi}{2i} f_\kappa^1(\tau) = e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)},$$

а у другому – акустично жорсткої ґратки

$$\frac{\pi}{2i} f_\kappa^2(\tau) = A_\kappa e^{ix_\kappa^n(\tau)} + B_\kappa e^{-ix_\kappa^n(\tau)} - \frac{4}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)},$$

тут q_1 та q_2 – складові напрямного вектора хвилі. Користуючись відомим рядом для функції Ханкеля досить просто виділяється логарифмічна особливість у найпростішому вигляді

$$\int_{-1}^{1} j_\kappa(t) \ln\left|\tau - t\right| dt + \sum_{m=1}^{N} \int_{-1}^{1} j_m(t) R_{\kappa m}(\tau, t) dt = f_\kappa(\tau). \tag{2}$$

В цьому рівнянні регулярні ядра мають наступний вигляд:

$$R_{mm}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\left|x_m(\tau) - x_m(t)\right|) - \ln\left|\tau - t\right|,$$

$$R_{\kappa m}(\tau,t)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}(|x_\kappa(\tau)-x_m(t)|)\,,\ \kappa\neq m\,.$$

Тут і надалі верхні індекси не будемо писати, бо це зрозуміло буде з коментарів, з якою стадією побудови ми маємо справу. У випадку акустично м'якої ґратки безпосередньо використовуються відповідні квадратурні формули і досить точно знаходяться вихідні змінні даної моделі $j_\kappa(t)$ [5, 6]. При дослідженні акустично жорстких ґраток за такою схемою діяти не можна, бо у правій частині маємо довільні сталі, за допомогою яких слід виділяти розв'язок системи ІР, що належить іншому класу функцій. Тут необхідно розробити спочатку аналітичний метод виключення невідомих сталих.

Виключення сталих. Оскільки за методом ІР у випадку задачі Неймана спочатку виникала система інтегро-диференціальних рівнянь, де під знаком похідної була функція Ханкеля, то доречно продиференціювати систему ІР за зовнішньою змінною. Та перед цим слід вказати на початкову умову при $\tau=0$:

$$\int_{-1}^{1} j_\kappa(t)\ln|t|\,dt+\sum_{m=1}^{N}\int_{-1}^{1} j_m(t)R_{\kappa m}(0,t)dt=f_\kappa(0)\,,\ \kappa=1,...,N\,. \tag{3}$$

Тут у правій частині маємо

$$f_\kappa(0)=a_\kappa+b_\kappa-\frac{4}{kq_2}e^{iq_1x_\kappa^n(0)}\,,\ a_\kappa=A_\kappa e^{ix_\kappa^n(0)}\,,\ b_\kappa=B_\kappa e^{-ix_\kappa^n(0)}\,.$$

Ці умови дають можливість виключити половину невідомих сталих. Решту сталих виключимо після диференціювання системи ІР за рахунок додаткових умов, що виділяють потрібний клас функцій, де будемо шукати розв'язок.

Після диференціювання (2) отримаємо систему ІР

$$\int_{-1}^{1}\frac{j_\kappa(t)}{\tau-t}dt+\sum_{m=1}^{N}\int_{-1}^{1} j_m(t)\frac{\partial}{\partial\tau}R_{\kappa m}(\tau,t)dt=i\alpha_n\left(a_\kappa e^{i\alpha_n\tau}-b_\kappa e^{-i\alpha_n\tau}-\frac{4q_1}{kq_2}e^{iq_1x_\kappa^n(\tau)}\right), \tag{4}$$

де вже маємо більш сильну особливість у вигляді *інтеграла Коші*. Відомо, що ІР з *ядром Коші* мають три класи розв'язків [7]. У нашому випадку слід шукати розв'язок у вигляді

$$j_\kappa(t)=\varphi_\kappa(t)\cdot\sqrt{1-t^2}\,,$$

де $\varphi_\kappa(t)$ є неперервною у сегменті $[-1,1]$.

Для цього виписуємо умови

$$\int_{-1}^{1}\frac{F_\kappa(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=0\,,$$

де

$$F_\kappa(\tau)=i\alpha_n\left(a_\kappa e^{i\alpha_n\tau}-b_\kappa e^{-i\alpha_n\tau}-\frac{4q_1}{kq_2}e^{iq_1x_\kappa^n(\tau)}\right)-\sum_{m=1}^{N}\int_{-1}^{1} j_m(t)\frac{\partial}{\partial\tau}R_{\kappa m}(\tau,t)dt,$$

і використовуємо їх для виключення сталих. Виконуємо інтегрування і отримаємо співвідношення

$$i\alpha_n \pi J_0(\alpha_n)(a_\kappa - b_\kappa) = i\alpha_n \frac{4q_1}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(0)} \pi J_0(\alpha_n q_1) +$$

$$+\sum_{m=1}^{N} \int_{-1}^{1} d\tau \int_{-1}^{1} \frac{\partial R_{\kappa m}(\tau,t)}{\partial \tau} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-\tau^2}}, \ \kappa = 1, ..., N. \qquad (5)$$

Коли об'єднаємо їх з попередніми співвідношеннями (3), то отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_κ та b_κ. Тобто є достатньо умов, щоб виключити сталі a_κ та b_κ, та мати систему інтегральних рівнянь з ядром Коші. Для цього знайдені a_κ та b_κ підставимо до (4) і у випадку ортогонального набігання акустичної хвилі $(q_1 = 0, q_2 = 1)$ отримуємо асиметричну систему ІР першого роду

$$\int_{-1}^{1} j_\kappa(t)\left[\frac{1}{\tau - t} + 2\alpha_n \sin\alpha_n \tau \ln|t|\right] dt + \sum_{m=1}^{N} \int_{-1}^{1} j_m(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau} R_{mm}(\tau,t) + 2\alpha_n \sin\alpha_n \tau R_{\kappa m}(0,t) -\right.$$

$$\left. -\frac{2\cos\alpha_n\tau}{\pi J_0(\alpha_n)} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial\tau} R_{\kappa m}(\tau,t) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right] dt = -\frac{4}{k}\alpha_n \sin\alpha_n\tau, |\tau| \le 1, \ \kappa = 1, ..., N.$$

Ця система завдяки накладеним вище $2N$ умовам (3) та (5) рівносильна попередній системі ІР (1) з верхнім індексом 2 та невідомими сталими у правій частині. Вона належить до добре теоретично вивчених і має вже єдиний розв'язок [7]. Його наближено можна знайти, використовуючи прямі чисельні методи, або асимптотичні вирази, звузивши діапазон параметрів задачі та явні розв'язки найпростіших ІР [5]. Зокрема з отриманої математичної моделі також безпосередньо випливає асимптотичний вираз $j_m^2(t) \approx -4\alpha_n^2 \sqrt{1-t^2} / \pi k$, який співпадає з отриманим раніше з системи ІР (1) [5]. Таким чином, доречно вважати систему особливих ІР (6) загальною математичною моделлю процесу розсіювання акустичної хвилі дофрактальною ґраткою з акустично жорсткими стрічками, яка є більш ефективною, ніж попередня.

Висновки. Наведена узагальнена математична модель процесу розсіювання акустичної хвилі дофрактальними стрічковими ґратками у вигляді системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. У випадку акустично жорсткої ґратки загальна математична модель симетричного типу перетворена до більш ефективної асиметричної системи інтегральних рівнянь з ядром Коші, до якої вже безпосередньо можна застосовувати прямі чисельні методи, зокрема *метод механічних квадратур*. З отриманої математичної моделі також безпосередньо випливає мікросмужна асимптотика.

Список літератури: **1.** *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 311 с. **2.** *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр. **3.** *Александров П С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977, 368 стр. 4**.** *Кошовий А.Г., Кошовий Г.І.* Одновимірні самоподібні фрактали та їх використання у моделюванні. Вісник Національного політехнічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011 – №42 – С.82 – 88. **5.** *Koshovy G.I.* Systems approach to investigating prefractal diffraction gratings. Telecommunications and Radio Engeneering. №71(6), 2012, 487 – 500pp. **6.** *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев. Наук. Думка, 1984, 343с. **7.** *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.

Надійшла до редколегії 07.03.2014

УДК 513.85

Метод інтегральних рівнянь в задачах розсіювання акустичних хвиль дофрактальними гратками / А. Г. Кошовий, Г. І. Кошовий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 94 – 99. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

На основе метода интегральных уравнений приведена обобщенная математическая модель процесса рассеяния акустической волны предфрактальными решетками. Подробно исследуется случай акустически жесткой решетки. Предложена новая математическая модель в виде особых интегральных уравнений, к которым уже можно применять прямые численные методы. Получена микрополосковая асимптотика.

Ключевые слова: акустические волны, задача рассеивания, дофрактальная сетка, интегральные уравнения, совершенное множество.

UDC 513.85

Method of integral equations for the problems of scattering of acoustic waves by prefractal gratings / A. G. Koshoviy, G.I. Koshoviy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 94 – 99. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of scattering of acoustic waves by prefractal gratings, based on the integral equations method, has been summarized. The case of an acoustically rigid grating has been studied in details. A new mathematical model in the form of singular integral equations, to which it is possible to apply direct numerical methods, is offered. A microstrip asymptotics is obtained.

Key words: acoustic waves, diffraction problem, prefractal grating, integral equations, perfect set.

УДК 517.07

Л.В. КУРПА, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ОСЕТРОВ, ст. викл., НТУ «ХПІ»;
Т.В. ШМАТКО, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПІ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Предложен метод исследования спектра собственных частот и форм колебаний пологих оболочек неканонических форм в плане, изготовленных из функционально-градиентных материалов. Метод основывается на совместном применении уточненной теории первого порядка типа Ти-

© Л. В. Курпа, А. А. Осетров, Т. В. Шматко, 2014