
УДК 539

Моделювання процесу високошвидкісного різання на базі незалежного підходу Лагранжа-Ейлера / В. Л. Хавін, Л. В. Автономова, С. І. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 214 – 223. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассмотрено решение связанной динамической термоупругопластической контактной задачи взаимодействия режущего инструмента и обрабатываемого материала на основе метода конечных элементов в формулировке независимого подхода Лагранжа-Эйлера (ALE). Численная реализация проведена методом конечных элементов с помощью пакета ABAQUS/Explicit.

Ключевые слова: математическое моделирование, термоупругопластическая контактная задача, процесси різання, незалежний підхід Лагранжа-Эйлера, конечный элемент.

UDC 539

Modelling the high-speed cutting process on the basis of the Lagrange-Euler arbitrary approach / V. L. Navin, L. V. Avtonomova, S. I. Marusenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 214 – 223. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

The coupled dynamic thermal elastoplastic contact problem of cutting tool - processed material interaction is solved by the finite element method (FEM). The Lagrange-Euler (ALE) arbitrary approach is utilized. The numerical implementation is carried out by the FEM using the ABAQUS / Explicit software.

Key words: mathematical modeling, thermal elastoplastic contact problem, the cutting process, the Euler-Lagrange approach, final element modelling.

УДК 539.3

В.И. ЩЕГЛОВ, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПІ»

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Установлен эффект уменьшения диаметра внутренней граничной сферы упругого полого шара и граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью в результате их нагрева, вызванного действием на них сферических температурных полей специального вида, при положительности коэффициента линейного расширения и определенном характере зависимости от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона их материала.

Ключевые слова: полый шар, граничная сфера, нагрев, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения.

Введение и цель работы. При решении технических задач формообразования и тепловой сборки соединений с натягом в машиностроении возникает необходимость расчета векторных полей перемещений граничных поверхностей упругих тел, вызванных воздействием на эти тела различных температурных полей. Принципиально важным для решения вышеуказанных технических задач является нахождение у рассматриваемых упругих тел формы и размеров граничных поверхностей, образовавшихся в результате их термоупругих деформаций.

Целью настоящей работы является нахождение формы и размеров граничных поверхностей упругого полого шара и упругого пространства с шаровой полостью при воздействии на них сферических температурных полей, моделирующих нагрев этих тел, сконцентрированный вблизи внутренней граничной сферы – для полого шара и граничной сферы – для упругого пространства с шаровой полостью.

Постановка задачи. Пусть рассматриваются однородные и изотропные упругий полый шар, обозначаемый B , с граничными концентрическими сферами радиуса R_0 и R_2 ($R_0 < R_2$) и упругое пространство с шаровой полостью радиуса R_0 , обозначаемое Π . Центральные сечения указанных выше упругих тел B и Π показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

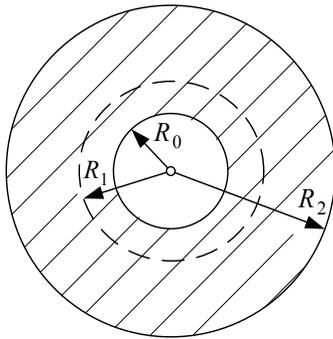


Рис. 1 – Сечение упругого полого шара.

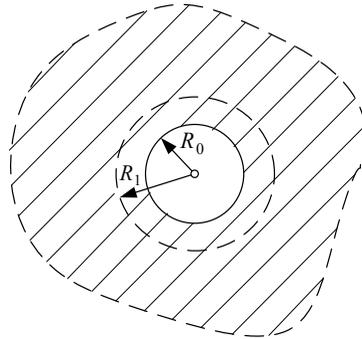


Рис. 2 – Сечение упругого пространства с шаровой полостью.

Все точки этих упругих тел имеют одинаковую исходную температуру, равную T_0 , при которой эти тела находятся в ненапряженном состоянии. На рассматриваемые упругие тела B и Π действует температурное поле, вызывающее равномерный их нагрев до температуры T_n ($T_n > T_0$) во всех точках замкнутого подмножества этих тел, представляющего собой полый шар B_1 , одна из граничных сфер которого совпадает с граничной сферой радиуса R_0 упругих тел B или Π , а другая граничная сфера тела B_1 имеет радиус $R_1 < R_2$. Остальные точки тел B и Π после воздействия температурного поля имеют исходную температуру T_0 . Сечение полого шара B_1 показано на

рис. 1 и рис. 2. Требуется в рамках математической модели *несвязной квазистатической термоупругости* определить форму граничных поверхностей тел B и Π и их размеры после воздействия на эти тела вышеописанных температурных полей. Коэффициент теплопроводности материала тел B и Π считается не зависящим от температуры в пределах ее изменения от T_0 до T_n .

Решение задачи. В силу сферической симметрии нагреваемых тел B и Π , а также того, что температурные поля, вызывающие их нагрев, являются сферическими, приходим к выводу, что граничные поверхности тела B в результате его нагрева будут иметь форму концентрических сфер, а граничная поверхность тела Π – форму сферы. Будем рассматривать как нагреваемые тела B и Π , так и функции распределения температурных полей, вызывающих их нагрев, в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром граничных сфер тела B или центром граничной сферы тела Π . Функции распределения температурных полей, возникающих в телах B и Π в результате их вышеописанного нагрева, в выбранной сферической системе координат имеют вид:

для полого шара

$$T = T_0 + (T_n - T_0)H(1 - r/R_1),$$

$$R_0 \leq r \leq R_2;$$

для упругого пространства с шаровой полостью

$$T = T_0 + (T_n - T_0)H(1 - r/R_1), \quad (1)$$

$$r \geq R_0,$$

где $H(p)$, $p \in (-\infty, +\infty)$ – *единичная функция Хэвисайда*, равная 1 при $p \geq 0$ и равная 0 при $p < 0$; r, φ, θ – координаты точки тел B и Π во введенной выше сферической системе координат; φ, θ – *азимутальный* и *зенитный* угол точки соответственно.

Функции распределения (1) рассматриваемых температурных полей, возникающих в результате нагрева тел B и Π , моделируют нагрев этих тел, сконцентрированный вблизи внутренней граничной сферы тела B или граничной сферы тела Π . Температурные поля, возникающие в телах B и Π в процессе нагрева, задаются функциями распределения:

для полого шара

$$T = T_0 + (T_n - T_0)f(\tau/\tau_n)H(1 - r/R_1),$$

$$R_0 \leq r \leq R_2, 0 \leq \tau \leq \tau_n;$$

для упругого пространства с шаровой полостью

$$T = T_0 + (T_n - T_0)f(\tau/\tau_n)H(1 - r/R_1), \quad (2)$$

$$r \geq R_0, 0 \leq \tau \leq \tau_n,$$

где τ_n – время, прошедшее от начала до окончания нагрева тела B или тела Π ; τ – время, отсчитываемое от начала нагрева тела B или тела Π ($0 \leq \tau \leq \tau_n$); $f(p)$ – числовая функция, возрастающая и гладкая на $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Функции (2) являются решениями неоднородного уравнения теплопроводности при объемных плотностях распределения мощности источников

тепла, задаваемых обобщенными функциями. При $\tau = \tau_n$ функции (2) равны соответствующим функциям (1).

Решение задачи определения размеров граничных поверхностей тел B и Π в результате их указанного выше нагрева (при $\tau = \tau_n$) рассмотрим в двух следующих случаях:

1. Когда предполагается, что в процессе нагрева упругих тел B и Π ($0 \leq \tau \leq \tau_n$) модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и коэффициент линейного расширения α их материала не зависят от температуры в пределах её изменения от T_0 до T_n .

2. Когда учитывается при решении задачи зависимость от температуры модуля Юнга E , коэффициента Пуассона ν и коэффициента линейного расширения α материала упругих тел B и Π .

В первом случае формулы для вычисления отличных от тождественно нуля физических компонент σ_r , σ_φ и σ_θ тензора напряжений тела B , приведенные в работе [1], позволяют найти следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\text{при } R_0 \leq r \leq R_1 && \text{при } R_1 < r \leq R_2 \\ \sigma_r(r) &= -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right) \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3}; && \sigma_r(r) = -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \frac{1 - R_0^3 / R_1^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} \left(1 - \frac{r^3}{R_2^3}\right); \\ \sigma_\varphi(r) &= \sigma_\theta(r) = && \sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = \\ &= -\frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(2 + \frac{R_0^3}{r^3}\right) \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3}; && = \frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right) \frac{1 + 2(r^3 / R_2^3)}{1 - R_0^3 / R_2^3}, \quad (3) \end{aligned}$$

где $t_n = T_n - T_0$; E , ν , α – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения материала полого шара соответственно.

Используя закон Гука, находим формулы для вычисления компонент ε_φ и ε_θ тензора деформаций полого шара B при любом $r \in [R_0, R_2]$:

$$\begin{aligned} &\text{при } R_0 \leq r \leq R_1 && \text{при } R_1 < r \leq R_2 \\ \varepsilon_\varphi(r) &= \varepsilon_\theta(r) = \alpha t_n \left[1 - \frac{1}{3(1-\nu)} \times && \varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \frac{1}{3(1-\nu)} \frac{1 - R_0^3 / R_1^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} \frac{R_1^3}{r^3} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} (2(1-2\nu) + (1+\nu) \frac{R_0^3}{r^3})\right]; && \times \left. [1 + \nu + 2(1-2\nu) \frac{r^3}{R_2^3}]\right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Учитывая связь единственной, отличной от тождественного нуля, компоненты Ir вектора перемещений \vec{I} упругого тела B с компонентой ε_θ тензора деформаций, находим:

$$\begin{aligned} &\text{при } R_0 \leq r \leq R_1 && \text{при } R_1 < r \leq R_2 \\ Ir(r) &= r\varepsilon_\theta(r) = \alpha t_n r \left\{1 - \frac{1}{3(1-\nu)} \times && Ir(r) = r\varepsilon_\theta(r) = \frac{\alpha t_n}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} [2(1 - 2\nu) + (1 + \nu) \frac{R_0^3}{r^3}]; \quad \times \frac{1 - R_0^3 / R_1^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} \{1 + \nu + 2(1 - 2\nu) \frac{r^3}{R_2^3}\}. \quad (5)$$

Из формул (5) при $r = R_0$ и $r = R_2$ находим значение единственной, отличной от тождественного нуля, компоненты Ir вектора перемещений \vec{I} в точках граничных сфер полого шара B :

$$Ir(R_0) = \alpha_0 R_0 t_{cp}; \quad Ir(R_2) = \alpha_0 R_2 t_{cp}, \quad (6)$$

где t_{cp} – среднее значение изменения температуры нагрева полого шара при воздействии на него температурного поля (1); α_0 – коэффициент линейного расширения материала упругого полого шара при $T = T_0$.

Осуществляя предельный переход $R_2 \rightarrow +\infty$ в формулах (3), (4), (5) находим выражения для σ_r , $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$, Ir во всех точках упругого пространства с шаровой полостью:

при $R_0 \leq r \leq R_1$

$$\sigma_r(r) = -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right),$$

$$\sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = -\frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(2 + \frac{R_0^3}{r^3}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \alpha t_n \left\{1 - \frac{1}{3(1-\nu)} \times [2(1-2\nu) + (1+\nu)R_0^3/r^3]\right\},$$

$$Ir(r) = \frac{\alpha t_n (1+\nu)}{3(1-\nu)} r \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right),$$

при $R_1 < r \leq R_2$

$$\sigma_r(r) = -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right);$$

$$\sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = \frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right);$$

$$\varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \frac{\alpha t_n (1+\nu)}{3(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right) \frac{R_1^3}{r^3};$$

$$Ir(r) = \frac{\alpha t_n (1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^2} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right). \quad (7)$$

Из формул (7) при $r = R_0$ находим значение компоненты Ir вектора перемещений \vec{I} на граничной сфере упругого пространства с шаровой полостью:

$$Ir(R_0) = 0. \quad (8)$$

Необходимо отметить, что согласно работе [2] коэффициент Пуассона материала упругих тел B и Π удовлетворяет условию: $-1 < \nu < 0,5$. Коэффициент линейного расширения материала тел B и Π с учетом существования инварных сплавов может быть как положительным, так и равным нулю или отрицательным. Ввиду существования *эливарных сплавов* модуль Юнга материала исследуемых тел может при нагревании как уменьшаться, так и увеличиваться или не изменяться (по этим вопросам см. работу [3]).

Таким образом, при применении к исследованию деформаций упругих тел B и Π математической модели несвязной квазистатической термоупругости и предположения о неизменности в результате их нагрева модуля Юн-

га, коэффициента Пуассона, коэффициента линейного расширения и коэффициента теплопроводности их материала установлено, что в результате воздействия на нагреваемые тела температурных полей (1) граничные их сферы остаются сферами; диаметры граничных сфер пологого шара увеличиваются при $\alpha_0 > 0$, уменьшаются при $\alpha_0 < 0$ и остаются неизменными при $\alpha_0 = 0$, радиусы граничных сфер изменяются на величину, задаваемую формулами (6); диаметр граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью в результате нагрева температурным полем (1) остается неизменным.

Необходимо отметить, что при воздействии на упругий полый шар температурного поля, задаваемого произвольной кусочно-непрерывной на $[R_0, R_2]$ функцией распределения, диаметры граничных сфер упругого полого шара увеличиваются при $\alpha_0 t_{cp} > 0$, уменьшаются при $\alpha_0 t_{cp} < 0$ и остаются неизменными при $\alpha_0 t_{cp} = 0$. При воздействии на упругое пространство с шаровой полостью температурного поля, задаваемого кусочно-непрерывной на $[R_0, R_1]$ функцией распределения, равной T_0 при $r > R_1$, диаметр ее граничной сферы остается неизменным.

Второй случай решения поставленной выше задачи о термоупругой деформации граничных сфер полого шара и граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью рассматривается, когда учитывается температурная зависимость модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала рассматриваемых упругих тел. Как и ранее предполагаем, что вызывающие термоупругие деформации этих упругих тел температурные поля являются сферическими и задаются в указанной выше сферической системе координат функциями (1). Функция распределения изменения температуры упругих тел B и Π зависит только от r – расстояния точки тела от начала координат и в дальнейшем обозначается $t(r)$. Тогда имеют место следующие равенства:

для полого шара

для упругого пространства с шаровой полостью

$$t(r) = \begin{cases} t_n = T_n - T_0, & R_0 \leq r \leq R_1; \\ 0, & R_1 < r \leq R_2; \end{cases} \quad t(r) = \begin{cases} t_n = T_n - T_0, & R_0 \leq r \leq R_1; \\ 0, & r > R_1. \end{cases} \quad (9)$$

В силу того, что воздействующие на рассматриваемые упругие тела температурные поля являются сферическими, имеем равенство нулю двух физических компонент (I_φ, I_θ) вектора перемещений \vec{I} в каждой точке этих тел, а физическая компонента I_r зависит только от переменной r . В дальнейшем функцию, выражающую зависимость I_r от r будем обозначать $u(r)$, то есть имеет место равенство $I_r = u(r)$. Аналогично для физических компонент тензора деформаций: $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0$ и для физических компонент тензора напряжений: $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\varphi\theta} = 0$.

В каждом из открытых полых шаров $B1: R_0 < r < R_1$ и $B2: R_1 < r < R_2$, являющихся подмножеством рассматриваемого полого шара $B: R_0 \leq r \leq R_2$, выполняются равенства:

$$\varepsilon_r = u'(r), \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = u(r)/r$$

– следствие связи физических компонент тензора деформаций с физическими компонентами вектора перемещений;

$$u'' + (2/r)u' - (2/r^2)u = 0$$

– следствие закона Гука, уравнений равновесия рассматриваемых упругих тел и связи физических компонент тензора деформаций и вектора перемещений. При рассмотрении упругого пространства с шаровой полостью имеют место такие же соотношения в открытом полом шаре $B1$ и в пространстве с шаровой полостью радиуса R_0 , обозначаемом $B3$ (точки граничной сферы не принадлежат $B3$). В случае рассмотрения термоупругих деформаций полого шара функция $u(r)$, являясь решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u = 0, \quad (10)$$

на (R_0, R_1) и (R_1, R_2) , имеет вид

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad R_0 < r < R_1; \quad u(r) = D_1 r + \frac{D_2}{r^2}, \quad R_1 < r < R_2. \quad (11)$$

и является непрерывной на сегменте $[R_0, R_2]$. Коэффициенты C_1, C_2, D_1, D_2 однозначно определяются из следующих условий:

$$u(R_1 + 0) = u(R_1 - 0); \quad (12)$$

$$\sigma_r(R_0) = 0; \quad (13)$$

$$\sigma_r(R_2) = 0; \quad (14)$$

$$\sigma_r(R_1 + 0) = \sigma_r(R_1 - 0), \quad (15)$$

причём функции $u(r)$ и $\sigma_r(r)$ являются непрерывными на $[R_0, R_2]$.

Решая систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, D_1, D_2 , полученную из условий (11) – (15), находим выражения для постоянных C_1, C_2, D_1, D_2 через $R_0, R_1, R_2, \nu_1 = \nu(T_n), \nu_2 = \nu(T_0), E_1 = E(T_n), E_2 = E(T_0), \alpha_1 = \alpha(T_n)$, где, следуя работе [4], $\alpha(T_n)$ – среднее значение коэффициента линейного расширения материала полого шара в диапазоне изменения температуры от T_0 до T_n . Тогда, используя равенство (1), получаем: при $R_0 \leq r \leq R_1$

$$u(r) = \alpha_1 t_n r \frac{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right] - \frac{R_0^3}{r^3}}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]}; \quad (16)$$

при $R_1 < r \leq R_2$

$$u(r) = \alpha_1 t_n r \frac{\frac{R_1^3}{R_2^3} + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_1} \frac{E_1}{E_2} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{1+\nu_2}{2(1-2\nu_2)} \frac{R_2^3}{r^3}\right]}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]} \quad (17)$$

Используя равенство (17), находим

$$u(R_2) = \alpha_1 t_n R_2 \frac{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3}}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]} - 1 \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что при $\alpha_1 > 0$ диаметр внешней граничной сферы увеличивается, при $\alpha_1 < 0$ – уменьшается, а при $\alpha_1 = 0$ – остаётся неизменным.

Используя равенство (16), находим

$$u(R_0) = \alpha_1 t_n R_0 \frac{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right] - 1}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]} \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что при $\alpha_1 > 0$ и

$$R_0 < R_1 < R_2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\right) / \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_1}\right)} \quad (20)$$

диаметр внутренней граничной сферы полого шара уменьшается. Условие (20) может выполняться, только если имеет место неравенство

$$\frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} < 1. \quad (21)$$

Условие (21) выполняется, например, для полого шара, если модуль Юнга материала с ростом температуры от T_0 до T_n уменьшается, а коэффициент Пуассона увеличивается. В случае, когда для материала полого шара условие (21) не выполняется, при $\alpha_1 > 0$ диаметр внутренней граничной сферы полого шара увеличивается, при $\alpha_1 < 0$ – уменьшается, а при $\alpha_1 = 0$ – остаётся неизменным. Если условие (21) выполняется, то для удобства установления тех случаев нагрева тела B , при которых диаметр его внутренней граничной сферы увеличивается, уменьшается или не изменяется, введем в рассмотрение величину \tilde{R}_1 :

$$\tilde{R}_1 = R_2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\right) / \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_1}\right)} < R_2. \quad (22)$$

Тогда, если $\tilde{R}_1 \leq R_0$:

для любого $R_1 \in (R_0, R_2)$ диаметр внутренней граничной сферы тела B при $\alpha_1 > 0$ – увеличивается, при $\alpha_1 < 0$ – уменьшается, при $\alpha_1 = 0$ – не изменяется;

если $\tilde{R}_1 > R_0$:

для любого $R_1 \in (R_0, \tilde{R}_1)$ диаметр внутренней граничной сферы тела B при $\alpha_1 > 0$ – уменьшается, при $\alpha_1 < 0$ – увеличивается, при $\alpha_1 = 0$ – не изменяется; для любого $R_1 \in (\tilde{R}_1, R_2)$ диаметр граничной сферы тела B при $\alpha_1 > 0$ – увеличивается, при $\alpha_1 < 0$ – уменьшается, при $\alpha_1 = 0$ – не изменяется; если $R_1 = \tilde{R}_1$, то диаметр внутренней граничной сферы полого шара не изменяется.

В случае рассмотрения упругого пространства с шаровой полостью функция $u(r)$ задается равенством:

$$u(r) = \begin{cases} C_1 r + C_2 / r^2, & R_0 < r < R_1; \\ D / r^2, & r > R_1. \end{cases} \quad (23)$$

Коэффициенты C_1, C_2, D , входящие в представление (23), однозначно определяются путем удовлетворения условиям (12), (13), (15). Тогда при $R_0 < r < R_1$ имеет место равенство

$$u(r) = \alpha_1 t_n \frac{\left[\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right) \right] r - \frac{R_0^3}{r^2}}{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{2(1 - 2\nu_1)}{1 + \nu_1} + \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right)}. \quad (24)$$

Из формулы (24), учитывая непрерывность функции $u(r)$ на $[R_0, +\infty)$ получаем:

$$u(R_0) = -\alpha_1 t_n R_0 \frac{\left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right) \left(1 - \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \right)}{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{2(1 - 2\nu_1)}{1 + \nu_1} + \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right)}. \quad (25)$$

В случае $\alpha_1 > 0$, убывания модуля Юнга и возрастания коэффициента Пуассона материала упругого пространства с шаровой полостью при возрастании температуры материала от T_0 до T_n имеем в силу формулы (25) неравенство $u(R_0) < 0$. То есть в указанном случае при воздействии сферического температурного поля рассматриваемого вида на упругое пространство с шаровой полостью диаметр граничной сферы уменьшается.

Из формулы (25) в общем случае следует, что при выполнении условия $\alpha_1 [1 - (E_1 : E_2)(1 + \nu_2) : (1 + \nu_1)] > 0$

диаметр граничной сферы уменьшается, при

$$\alpha_1[1 - (E_1 : E_2)(1 + \nu_2) : (1 + \nu_1)] < 0$$

– увеличивается, а при

$$\alpha_1[1 - (E_1 : E_2)(1 + \nu_2) : (1 + \nu_1)] = 0$$

– не изменяется.

Результаты моделирования. Рассмотрим пример расчета диаметра внутренней граничной сферы полого шара при воздействии на него температурного поля (1). Материал полого шара – медь, $R_0 = 25$ мм, $R_2 = 150$ мм, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T_n = 100^\circ\text{C}$. В расчетах использовались следующие значения коэффициентов E, ν, α : $E = 13,2$ кг/мм², $\nu = 0,31$, $\alpha = 16,4 \cdot 10^{-6}$ 1/К при $T = 0^\circ\text{C}$; $E = 12,8$ кг/мм², $\nu = 0,315$, $\alpha = 17,1 \cdot 10^{-6}$ 1/К при $T = 100^\circ\text{C}$.

В качестве среднего значения α в диапазоне температур $0 - 100^\circ\text{C}$ принято $16,83 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Значения коэффициентов E, ν, α при $T = 0^\circ\text{C}$ и $T = 100^\circ\text{C}$ выбирались из различных информационных источников, в том числе из работы [5].

Согласно формуле (22) находим $\tilde{R}_1 = 41,89$ мм (с точностью до сотой доли мм). Рассмотрим три характерных случая.

1) $R_1 = \tilde{R}_1$. Тогда, при учете температурной зависимости E, ν, α получаем с точностью до сотой доли мкм $u(R_0) = 0$. Следовательно, диаметр внутренней граничной сферы тела B не изменяется. Пренебрегая зависимостью E, ν, α от температуры нагрева полого шара, получаем $u(R_0) = 0,71$ мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы тела B увеличивается на 1,42 мкм.

2) $R_1 = 30$ мм $< \tilde{R}_1$. Тогда, при учете температурной зависимости E, ν, α получаем $u(R_0) = -0,38$ мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы тела B уменьшается (в результате нагрева) на 0,76 мкм. При пренебрежении температурной зависимостью E, ν, α получаем $u(R_0) = 0,14$ мкм, то есть, в результате нагрева, диаметр внутренней граничной сферы увеличивается на 0,28 мкм;

3) $R_1 = 50$ мм $> \tilde{R}_1$. Тогда, учитывая температурную зависимость E, ν, α материала полого шара, находим $u(R_0) = 0,57$ мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы увеличивается на 1,14 мкм. Пренебрегая температурной зависимостью E, ν, α материала полого шара при нагреве, получаем $u(R_0) = 1,33$ мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы тела B увеличивается на 2,66 мкм.

Выводы. При использовании для исследования термоупругих деформаций полого шара и упругого пространства с шаровой полостью математической модели несвязной квазистатической термоупругости с учетом зависи-

мости от температуры модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала нагреваемых упругих тел проявляется эффект уменьшения диаметра внутренней граничной сферы полого шара при воздействии на него сферического температурного поля вида (1) и выполнении условия (20) и $\alpha_1 > 0$, а также эффект уменьшения диаметра граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью при воздействии на него сферического температурного поля вида (1), когда выполняются условия (21) и $\alpha_1 > 0$. Этот эффект не проявляется, если при расчетах пренебречь зависимостью от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала нагреваемых полого шара и упругого пространства с шаровой полостью.

Список литературы: 1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Том 1 / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко – М.: Машиностроение, – 1968. – 831 с. 2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, – 1970. – 939 с. 3. Арзамасов Б.Н. [и др.] Материаловедение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, – 2004. – 648 с. 4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, – 1975. – 216 с. 5. Машиностроение: Энциклопедия. Т. 1.-2. Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен / под ред К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение, – 1999. – 600 с.

Поступила в редколлегию 12.03.2014

УДК 539.3

Об одном эффекте деформирования упругого полого шара при воздействии на него сферического температурного поля специального вида / В.И.Шеглов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 223 – 233. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.

Встановлено ефект зменшення діаметру внутрішньої межової сфери пружної порожньої кулі та межової сфери пружного простору з кулевою порожністю в результаті їх нагрівання, яке визване дією на них сферичних температурних полів спеціалізованого виду, при додатності коефіцієнту лінійного розширення та визначеному характері залежності від температури модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона їх матеріалу.

Ключові слова: полая куля, межова сфера, нагрівання, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного розширення.

UDC 539.3

On an effect of deformation of a resilient hollow ball under the influence of a spherical temperature field of a special type / V.I. Shcheglov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 223 – 233. Bibliogr.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

The effect of diminishing of the diameter of the internal border sphere of a resilient hollow ball and the border sphere of a resilient space with a ball cavity as a result of heating, caused by acting on them of spherical temperature fields of a special type, is exposed for the positive coefficient of linear expansion and certain character of dependence of Young's modulus and Poisson's ratio of the material on the temperature.

Key words: hollow ball, border sphere, heating, Young's modulus, Poisson's ratio, coefficient of linear expansion.