

Marchenko, A. P., et al. *Dvygyny vnutrishn'ogo zgorjannja: serija pidruchnykiv u 6 tomah. Vol. 5. Ekologizacija DVZ*. Ed. A. P. Marchenko, and A. F. Shehovcov. Kharkiv: Prapor, 2004. Print. 7. Markov, V. A., R. M. Bashirov and I. I. Gambitov. *Toksichnost' otrabotavshih gazov dizelej. 2<sup>nd</sup> ed. pererab. i dop.* Moscow: Izd-vo MGTO im. M. Je. Baumana, 2002. Print. 8. Vambol', S. O., O. P. Strokov and O. M. Kondratenko. "Stendovi vyprobuvannja avtotraktornogo dyzelja 2Ch10,5/12 za standartyzovany my cyklamy dlja vyznachennja efektyvnosti roboty FTCh." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. Ser.: *Avtomobile- ta traktorobuduvannja*. No. 10 (1053). 2014. 11–18. Print. 9. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and N. M. Karasichenko. "Eksperimental'noe issledovanie dejstvujushhego maketa fil'trujushhego elementa fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoy iz prirodnogo ceolita. Chast' 1." *Dvygyny vnutrishn'ogo zgorjannja*. No. 1. 2013. 88–92. Print. 10. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov S. P. Hozhainov. "Eksperimental'noe issledovanie dejstvujushhego maketa fil'trujushhego elementa fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoy iz prirodnogo ceolita. Chast' 2." *Dvygyny vnutrishn'ogo zgorjannja*. No. 2. 2013. 92–97. Print. 11. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and S.A. Vambol'. "Regeneracija fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoy iz prirodnogo ceolita." *Dvigateli vnutrennego sgoranija*. No. 2. 2014. 76–81. Print.

Поступила (received) 02.03.2015

УДК 517.984.4

**А.В. КОРОБСКАЯ**, канд. пед. наук, доц., ХНУ им. В. Н. Каразина,  
Харьков

## ОПЕРАТОР ДВОЙНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Изучен оператор двойного интегрирования в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D$  – прямоугольник. Осуществлено включение данного оператора в узел. Показано, что вычисление характеристической функции узла связано с решением краевой задачи Дарбу-Гурса с данными на характеристиках. Рассмотрено сужение данного оператора на подпространство функций  $f(x; y) \in L^2(D)$  вида  $f(x; y) = f(xy)$ . Оператор сужения включен в узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Оказалось, что она является интегральным оператором, который действует в этом же пространстве функций ( $f(x; y) = f(xy)$ ).

**Ключевые слова:** оператор двойного интегрирования, узел, гильбертово пространство, ортопроектор, характеристическая функция.

**Введение.** Теория модельных представлений несамосопряженных операторов является развивающимся направлением функционального анализа. Первые фундаментальные исследования в этом направлении были получены в работах *М. С. Лившица* [1; 2] по теории характеристических функций, которые впоследствии стали основным инструментом спектрального анализа несамосопряженных операторов. Предложенный *М. С. Лившицом* подход дал предпосылки к изучению различных типов операторов и их характеристических функций. Так, в контексте нашего исследования заслуживают внимания работы по теории спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов [3], треугольных и жордановых представлений линейных операторов [4], операторов в гильбертовом пространстве [5].

**Анализ исследования.** Для несамосопряженных операторов аналогом спектральных разложений являются *треугольные модели*. Основным анали-

тическим инструментом, при помощи которого строятся треугольные модели, является *характеристическая оператор-функция М. С. Лившица*. В работах М. С. Лившица [1; 2] рассмотрены несамосопряженные операторы в случае конечномерности пространства неэрмитовости, в том числе оператор интегрирования со спектром в нуле, обладающий одноклеточностью. Отметим, что оператор двойного интегрирования, представленный в работе, в данном аспекте не изучался. При этом оператор двойного интегрирования не является диссипативным и имеет бесконечномерную мнимую компоненту, а отвечающая ему характеристическая функция обладает свойством монодромности.

**Постановка задачи.** Изучить оператор двойного интегрирования вида

$$(Af)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds,$$

который действует в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D$  – прямоугольник, и сужение оператора двойного интегрирования вида

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}$$

на подпространство

$$L_0 = \left\{ f(x, y) \in L^2(D) : f(x, y) = f(xy) \right\}.$$

Осуществить включение данных операторов в узел, описать параметры узла, вычислить характеристические функции узлов.

**Метод вычисления.** Рассмотрим оператор  $A : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ , где

$$D = [0, a] \times [0, b], \quad 0 < a, b < \infty,$$

$$L^2(D) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R}^2 : \iint_D |f(x, y)|^2 dx dy < \infty \right\},$$

$$(Af)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds. \quad (1)$$

Найдем к оператору (1) сопряженный оператор  $A^*$ , то есть  $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$ . Представим оператор  $A$  в виде произведения двух операторов:  $A = A_1 A_2$ , где

$$(A_1 f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad (A_2 f)(y) = \int_0^y f(s) ds.$$

Действительно, по *теореме Фубини* получаем

$$(A_1(A_2 f)(y))(x) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds = (Af)(x, y).$$

Вычислим сопряженный оператор для  $A_1$ :

$$\langle A_1 f, g \rangle = \int_0^a \left( \int_0^x f(t) dt \right) \overline{g(x)} dx = \int_0^a f(t) \int_t^a \overline{g(x)} dx dt = \langle f, A_1^* g \rangle.$$

Значит, по определению сопряженного оператора получим

$$(A_1^* f)(x) = \int_x^a f(t) dt. \text{ Аналогично, для } A_2 \text{ имеем } (A_2^* f)(y) = \int_y^b f(s) ds. \text{ Тогда}$$

сопряженный к  $A$  оператор  $A^* = (A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* = A_1^* A_2^*$  имеет вид:

$$(A^* f)(x, y) = \int_x^a \int_y^b f(t, s) dt ds.$$

Включим оператор  $A$  в узел, поскольку  $A$  – линейный, ограниченный оператор. В нашем случае  $H = L^2(D)$ .

Построим гильбертово пространство  $E$ . Вычислим  $B = -i(A - A^*)$ . Обозначим  $\overline{BH} = E$ . Найдем замыкание образа оператора  $B$ :

$$\frac{1}{i}(A - A^*)f(x, y) = \frac{1}{i} \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \frac{1}{i} \int_x^a \int_y^b f(t, s) dt ds := g(x, y).$$

Тогда

$$g''_{xy}(x, y) = \frac{1}{i} f(x, y) - \frac{1}{i} f(x, y) = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует, что  $g'_y(x, y) = \varphi(y)$ . Значит,

$$g(x, y) = \int_0^y \varphi(s) ds + C(x) = D(y) + C(x).$$

Итак, пространство  $E$  имеет вид:

$$E = \{u(x) + c + v(y) \in L^2(D)\}. \quad (3)$$

Пространство  $E$  можно представить в виде ортогональной суммы

$$E = E_1 \oplus E_0 \oplus E_2, \text{ где } E_0 = \mathbb{C},$$

$$E_1 = \left\{ u(x) \in L^2(0, a) : \int_0^a u(x) dx = 0 \right\}, E_2 = \left\{ v(y) \in L^2(0, b) : \int_0^b v(y) dy = 0 \right\}.$$

Возьмем  $g(x, y) \in E$ :  $g(x, y) = u(x) + c + v(y)$ , ( $u \perp c$ ,  $u \perp v$ ,  $v \perp c$ ).

Введем в  $E$  (3) скалярное произведение для  $g \in E$ :

$$g(x, y) = u(x) + c + v(y) \text{ и } \tilde{g} \in E : \tilde{g}(x, y) = \tilde{u}(x) + \tilde{c} + \tilde{v}(y) :$$

$$\langle g, \tilde{g} \rangle = \int_0^a u(x) \overline{\tilde{u}(x)} dx + c \overline{\tilde{c}} + \int_0^b v(y) \overline{\tilde{v}(y)} dy,$$

$$\|g\|^2 = \int_0^a |u(x)|^2 dx + |c|^2 + \int_0^b |v(y)|^2 dy.$$

Очевидно, что пространство  $E$  является гильбертовым пространством.

Определим оператор  $\varphi: L^2(D) \rightarrow E$ . Сначала зададим ортопроекторы  $P_k: L^2(D) \rightarrow E_k$ , ( $k = 0, 1, 2$ ) такие, что:

$$P_1: L^2(D) \rightarrow E_1: (P_1 f)(x) = \frac{1}{b} \int_0^b f(x, y) dy - \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (4)$$

$$P_2: L^2(D) \rightarrow E_2: (P_2 f)(y) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x, y) dx - \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (5)$$

$$P_0: L^2(D) \rightarrow E_0: (P_0 f)(x) = \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Покажем, что  $P_1 f \in E_1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^a ((P_1 f)(x, y)) dx &= \int_0^a \left( \frac{1}{b} \int_0^b f(x, y) dy - \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{b} \iint_D f(x, y) dx dy - \frac{1}{b} \iint_D f(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Аналогично,  $P_2 f \in E_2$ ,  $P_0 f \in E_0$ .

Несложно проверить, что операторы  $P_1, P_2, P_0$  являются ортогональными проекторами, то есть  $P_i^2 = P_i$ ,  $P_i^* = P_i$ ,  $P_i P_j = 0$ ,  $i \neq j$ .

Определим ортопроектор

$$\varphi = P_1 + P_0 + P_2, \quad (7)$$

где  $\varphi: L^2(D) \rightarrow E$ ,  $\varphi = \varphi^*$ , а  $P_1, P_0, P_2$  имеют вид (4), (6), (5), соответственно.

Найдем  $\sigma: E \rightarrow E$  такое, что  $\sigma = \sigma^*$ .

$$A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi; \quad \sigma = \left( (A - A^*) / i \right) \Big|_E.$$

$$(A - A^*) f(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \int_0^a \int_0^b f(t, s) dt ds.$$

Вычислим, как действует оператор  $A - A^*$  на  $u(x)$ ,  $c$ ,  $v(y)$ .

Для любого  $c \in \mathbb{C} = E_0$ :

$$(A - A^*)(c) = \int_0^x \int_0^y c dt ds - \int_0^a \int_0^b c dt ds = -abc + xbc + yac.$$

Подействуем на получившуюся функцию оператором  $\varphi$ :

$$P_0(-abc + xbc + yac) = \frac{1}{ab} \iint_D (-abc + xbc + yac) dx dy = 0;$$

$$P_1(-abc + xbc + yac) = \frac{1}{b} \int_0^b (-abc + xbc + yac) dy -$$

$$-\frac{1}{ab} \iint_D (-abc + xbc + yac) dx dy = xbc - \frac{abc}{2};$$

$$P_2(-abc + xbc + yac) = \frac{1}{a} \int_0^a (-abc + xbc + yac) dx -$$

$$-\frac{1}{ab} \iint_D (-abc + xbc + yac) dx dy = yac - \frac{abc}{2};$$

$$\varphi(-abc + xbc + yac) = (P_1 + P_0 + P_2)(-abc + xbc + yac) = xbc + yac - abc \in E.$$

Получили, что:

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} xbc - abc/2 \\ 0 \\ yac - abc/2 \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2.$$

Для любой функции  $u(x) \in E_1$ :

$$\begin{aligned} (A - A^*)(u) &= \int_0^x \int_0^y u(t) dt ds - \int_{xy}^{ab} u(t) dt ds = \\ &= y \int_0^x u(t) dt - (b - y) \int_x^a u(t) dt = -b \int_x^a u(t) dt. \end{aligned}$$

Поддействуем на полученную функцию оператором  $\varphi$  (7):

$$P_0 \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) = \frac{1}{ab} \iint_D \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx dy = -\frac{b}{a} \int_0^a xu(x) dx;$$

$$\begin{aligned} P_1 \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) &= \frac{1}{b} \int_0^b \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dy - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx dy = \\ &= -b \int_x^a u(t) dt + \frac{b}{a} \int_0^a tu(t) dt; \end{aligned}$$

$$P_2 \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) = \frac{1}{a} \int_0^a \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx dy = 0.$$

Итак, мы имеем, что

$$\sigma \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} -b \int_x^a u(t) dt + \frac{b}{a} \int_0^a tu(t) dt \\ -\frac{b}{a} \int_0^a xu(x) dx \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2.$$

Для любой функции  $v(y) \in E_2$  :

$$\begin{aligned} (A - A^*)(v) &= \int_0^x \int_0^y v(s) dt ds - \int_x^a \int_y^b v(s) dt ds = \\ &= x \int_0^y v(s) ds - (a-x) \int_y^b v(s) ds = -a \int_y^b v(s) ds . \end{aligned}$$

Применим к данной функции оператор  $\varphi$  (7):

$$\begin{aligned} P_0 \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) &= -\frac{a}{ab} \iint_D \left( \int_y^b v(s) ds \right) dx dy = -\frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy ; \\ P_1 \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) &= \frac{1}{b} \int_0^b \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dy - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dx dy = 0 ; \\ P_2 \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) &= \frac{1}{a} \int_0^a \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dx - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dx dy = \\ &= -a \int_y^b v(s) ds + \frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy . \end{aligned}$$

Получили, что:

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy \\ -a \int_y^b v(s) ds + \frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2 .$$

Итак, имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.** Если  $\sigma \in E = E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$  имеет вид:

$$\sigma \begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} -b \int_x^a u(t) dt + \frac{b}{a} \int_0^a tu(t) dt & -\frac{b}{a} \int_0^a xu(x) dx & 0 \\ xbc - \frac{abc}{2} & 0 & yac - \frac{abc}{2} \\ 0 & -\frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy & -a \int_y^b v(s) ds + \frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy \end{pmatrix} , \quad (8)$$

то выполняется узловое соотношение:

$$A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi ,$$

где оператор  $A$  определен формулой (1), а оператор  $\varphi$  равен (7).

Итак, построили оператор  $\sigma : E \rightarrow E$ .

Нами доказана следующая теорема.

**Теорема 1. Совокупность**

$$\Delta = (A, L^2(D), \varphi, E, \sigma) \quad (9)$$

образует узел, где  $A$  определяется условием (1),  $\varphi$  – условием (7),  $E$  – условием (3),  $\sigma$  – условием (8).

**Характеристическая функция.** Вычислим характеристическую функцию узла (9):

$$S_{\Delta}(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma.$$

Обозначим  $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f(x, y)$ , тогда  $\varphi^* \sigma g = (A - \lambda I)f$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)f &= Af - \lambda f = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \lambda f(x, y) = \varphi^* \sigma(u(x) + c + v(y)) = \\ &= \frac{1}{i} \left( -b \int_x^a u(t) dt - a \int_y^b v(s) ds + xbc + yac - abc \right). \end{aligned}$$

Получим, что:

$$\int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \lambda f(x, y) = \frac{1}{i} \left( -b \int_x^a u(t) dt - a \int_y^b v(s) ds + xbc + yac - abc \right). \quad (10)$$

Подставим в равенство (10)  $x = y = 0$ :

$$-\lambda f(0, 0) = -abc/i.$$

Продифференцируем равенство (10) по  $x$ :

$$\int_0^y f(x, s) ds - \lambda f'_x(x, y) = \frac{1}{i} (bu(x) + bc)$$

и положим  $y = 0$ , тогда  $-\lambda f'_x(x, 0) = (b/i)(u(x) + c)$ .

Продифференцируем (10) по  $y$ :

$$\int_0^x f(t, y) dt - \lambda f'_y(x, y) = \frac{1}{i} (av(y) + ac)$$

и положим  $x = 0$ , тогда  $-\lambda f'_y(0, y) = (a/i)(v(y) + c)$ .

Продифференцируем (10) по  $x$  и  $y$ , тогда

$$f(x, y) - \lambda f''_{xy}(x, y) = 0,$$

и получаем краевую задачу Дарбу-Гурса вида:

$$\begin{cases} f(x, y) - \lambda f''_{xy}(x, y) = 0, & \lambda f(0, 0) = abc/i, \\ -\lambda f'_x(x, 0) = \frac{b}{i}(u(x) + c), & -\lambda f'_y(0, y) = \frac{a}{i}(v(y) + c). \end{cases} \quad (11)$$

Зная решение задачи (11) построим  $\tilde{u}(x) \in E_1$ ,  $\tilde{v}(y) \in E_2$ ,  $\tilde{c} \in E_0$ :

$$\left\{ -\lambda f(a, b) = \frac{ab\tilde{c}}{i}, -\lambda f'_x(x, b) = \frac{b}{i}(\tilde{u}(x) + \tilde{c}), -\lambda f'_y(a, y) = \frac{a}{i}(\tilde{v}(y) + \tilde{c}). \right. \quad (12)$$

Константа  $\tilde{c}$  корректно определена, то есть одинаковая для всех этих равенств, что нетрудно проверить, интегрируя соответствующие уравнения систем (11) и (12).

Преобразовав начально-краевые условия (11) и (12), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda f(a, 0) + \lambda f(0, 0) &= \frac{1}{i}abc, & -\lambda f(0, b) + \lambda f(0, 0) &= \frac{1}{i}abc, \\ -\lambda f(a, b) + \lambda f(0, b) &= \frac{1}{i}ab\tilde{c}, & -\lambda f(a, b) + \lambda f(a, 0) &= \frac{1}{i}ab\tilde{c}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Учитывая равенство  $f(x, y) = \lambda f''_{xy}(x, y)$  и условия из (11), (12), (13), подействуем на  $f(x, y)$  оператором  $\varphi$  вида (7):

$$P_1 f = \frac{1}{b} \int_0^b \lambda f''_{xy}(x, y) dy - \frac{1}{ab} \iint_D \lambda f''_{xy}(x, y) dx dy = \frac{1}{i} (u(x) - \tilde{u}(x)).$$

$$P_2 f = \frac{1}{a} \int_0^a \lambda f''_{xy}(x, y) dx - \frac{1}{ab} \iint_D \lambda f''_{xy}(x, y) dx dy = \frac{1}{i} (v(y) - \tilde{v}(y)),$$

$$P_0 f = \frac{1}{i} (c - \tilde{c}).$$

Таким образом, получим следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть дан узел (9), тогда характеристическая функция данного узла  $S_\Delta(\lambda)$  определяется отображением:

$$S_\Delta(\lambda) \begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{c} \\ \tilde{v}(y) \end{pmatrix},$$

где  $\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$ , при этом компоненты вектора  $\begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{c} \\ \tilde{v}(y) \end{pmatrix}$  задаются формулами (12) через решение  $f(x, y)$  задачи Дарбу-Гурса (11), причем гра-

ничные условия системы (11) задаются компонентами вектора  $\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix}$ .

**Сужение оператора.** Рассмотрим сужение оператора двойного интегрирования (1) на подпространство  $L_0$ , которое содержится в пространстве  $L^2(D)$ :

$$L_0 = \{f(x, y) \in L^2(D) \mid f(x, y) = f(xy)\};$$



$L_0 \subset L^2(D)$ , поскольку функция, зависящая от произведения аргументов, является интегрируемой.

Вычислим норму в этом пространстве:

$$\|f(xy)\|_{L_0}^2 = \int_0^a \int_0^b |f(xy)|^2 dx dy = \int_0^a \frac{dx}{x} \int_0^{bx} |f(t)|^2 dt.$$

Зададим скалярное произведение в  $L_0$ :

$$\langle f, g \rangle_{L_0} = \int_0^a \frac{d(bx)}{bx} \int_0^{bx} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^l f(t) \overline{g(t)} dt \int_t^l \frac{ds}{s} = \int_0^l f(t) \overline{g(t)} dt \ln \frac{l}{t}.$$

Вычислим, как действует оператор (1) на подпространстве  $L_0$ . Легко видеть, что:

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^x \frac{dy}{ty} \int_0^{ty} f(t) dt = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}.$$

Таким образом,

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}. \quad (14)$$

Найдем сопряженный оператор к (14) из соотношения

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle:$$

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^l (Af)(t) \overline{g(t)} \ln \frac{l}{t} dt = \int_0^l f(\xi) d\xi \frac{\ln \frac{l}{\xi}}{\ln \frac{l}{\xi}} \int_{\xi}^l \overline{g(t)} \ln \frac{t}{\xi} \ln \frac{l}{t} dt = \langle f, A^*g \rangle.$$

$$\text{Итак, } (A^*f)(t) = \frac{1}{\ln \frac{l}{t}} \int_t^l f(\xi) \ln \frac{\xi}{t} \ln \frac{l}{\xi} d\xi.$$

Включим оператор (14) в узел.

Пусть  $H = L_0$ . Построим гильбертово пространство  $E$ . Вычислим  $B = (A - A^*)/i$ . Обозначим  $\overline{BH} = E$ . Найдем замыкание образа оператора  $B$ . Обозначим  $\psi(t) = -i(A - A^*)f$ , тогда

$$\psi(t) = \frac{1}{i} \left( \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi} - \frac{1}{\ln \frac{l}{t}} \int_t^l f(\xi) \ln \frac{\xi}{t} \ln \frac{l}{\xi} d\xi \right).$$

Покажем, что функции  $\psi(t)$  заполняют все пространство  $L_0$ . Для этого продифференцируем  $\psi(t)$  по  $t$ :

$$\psi'(t) = \frac{1}{i} \left( \int_0^t \frac{f(\xi)}{t} d\xi - \int_t^l \frac{f(\xi)}{t} \frac{\ln \frac{l}{\xi}}{\ln \frac{l}{t}} \left( \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} - 1 \right) d\xi \right).$$

Подставляя в это выражение  $f(\xi) = \xi^n$ , получим степенную функцию. Значит, в качестве  $E$  можно взять все пространство  $L_0$ ;

$$\varphi: L_0 \rightarrow E = L_0,$$

а в качестве  $\varphi$  можно взять единичный оператор  $\varphi = I$ ;

$$\sigma: E \rightarrow E, \sigma = \sigma^*, A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi, \sigma = ((A - A^*)/i)|_E.$$

$$\sigma f = \frac{1}{i} \int_0^t f(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} d\xi \ln \frac{l}{t} + \frac{1}{i} \int_t^l f(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} \ln \frac{l}{\xi} d\xi. \quad (15)$$

Таким образом, оператор  $A: L_0 \rightarrow L_0$  включили в узел:

$$\Delta = (A, L_0, I, L_0, \sigma). \quad (16)$$

где оператор  $A$  имеет вид (14), а  $\sigma$  определяется формулой (15).

Вычислим характеристическую функцию узла (16):

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma.$$

Обозначим  $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f$ , тогда

$$\varphi^* \sigma = (A - \lambda I) f \quad \text{или} \quad \sigma g = (A - \lambda I) f.$$

Итак,  $Af - \lambda f = \sigma g$ . С учетом (14) и (15) получим:

$$\int_0^t f(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi - \lambda f(t) = \frac{1}{i} \int_0^t g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} \cdot \ln \frac{l}{t} d\xi + \frac{1}{i} \int_t^l g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} \ln \frac{l}{\xi} d\xi,$$

а, умножив обе части равенства на  $\ln \frac{t}{l}$ , приходим к уравнению вида:

$$-\int_0^t f(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi \cdot \ln \frac{t}{l} + \lambda f(t) \ln \frac{t}{l} = \frac{1}{i} \left[ -\int_0^t g(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi \cdot \ln \frac{t}{l} + \int_t^l g(\xi) \ln \frac{t}{\xi} \ln \frac{l}{\xi} d\xi \right] \quad (17)$$

Продифференцируем (17) по  $t$  и преобразуем:

$$\begin{aligned} & -\int_0^t (f(\xi) + ig(\xi)) d\xi \cdot \ln \frac{t}{l} + \lambda f'(t) \cdot \ln \frac{t}{l} + \lambda f(t) - \\ & - \int_0^t [f(\xi) + ig(\xi)] \cdot \ln \frac{t}{\xi} d\xi + i \int_t^l g(\xi) \ln \frac{l}{\xi} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим

$$\psi(t) = \int_0^t (f(\xi) + ig(\xi)) \ln \frac{t}{\xi} d\xi, \quad (19)$$

тогда

$$\psi'_i(t) = \int_0^t (f(\xi) + ig(\xi)) \cdot \frac{1}{t} d\xi. \quad (20)$$

Применяя теорему о среднем к равенству (19)

$$\psi(t) = [f(c) + ig(c)] \cdot \ln \frac{t}{c} \cdot t,$$

где  $c \in (0; t)$ , и переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  легко видеть, что  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$ , то есть имеет место начальное условие вида:

$$\psi(0) = 0. \quad (21)$$

При этом равенство (18) примет вид:

$$t \ln \frac{t}{l} \cdot (\lambda f'_i(t) - \psi'_i(t)) + \lambda f(t) - \psi(t) + i \int_t^l g(\xi) \ln \frac{l}{\xi} d\xi = 0. \quad (22)$$

Пусть

$$\lambda f(t) - \psi(t) = \Phi(t), \quad (23)$$

тогда из (22) получим:

$$t \ln \frac{t}{l} \Phi'_i(t) + \Phi(t) + i \int_t^l g(\xi) \ln \frac{l}{\xi} d\xi = 0. \quad (24)$$

Продифференцируем (24) по  $t$  и преобразуем:

$$t \ln \frac{t}{l} \Phi''_i(t) + \left( \ln \frac{t}{l} + 2 \right) \Phi'_i(t) + ig(t) \ln \frac{t}{l} = 0. \quad (25)$$

Сделаем в уравнении (25) замену

$$\Phi'_i(t) = Y(t) \quad (26)$$

и преобразуем его, тогда получим линейное уравнение вида:

$$Y'(t) + \frac{\ln \frac{t}{l} + 2}{t \ln \frac{t}{l}} Y(t) + i \frac{g(t)}{t} = 0. \quad (27)$$

Решая уравнение (27), получим:

$$Y(t) = -\frac{i}{t \ln^2 \frac{t}{l}} \int_0^t g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi + \frac{IC}{t \ln^2 \frac{t}{l}}. \quad (28)$$

Из (20), (23), (26) вытекает начальное условие

$$Y(0) = \lambda f'(0) - f(0) - ig(0).$$

Причем, применяя теорему о среднем к уравнению (28), получаем решение уравнения (27) в виде:

$$Y(t) = -\frac{i}{t \ln^2 \frac{t}{l}} \int_0^t g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi. \quad (29)$$

Отсюда, учитывая замену (26) приходим к уравнению

$$\Phi(x) = -i \int_0^x \frac{1}{t \ln^2 \frac{t}{l}} \left( \int_0^t g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi \right) dt. \quad (30)$$

Поменяв порядок интегрирования в (30), получим:

$$\Phi(x) = -i \int_0^x g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi \int_{\xi}^x \frac{dt}{t \ln^2 \frac{t}{l}} + C_2,$$

то есть

$$\Phi(t) = -i \int_0^t g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + C_2. \quad (31)$$

Поскольку  $\Phi(t) = \lambda f(t) - \psi(t)$  и действует условие (21), то имеем следующее начальное условие:  $\Phi(0) = \lambda f(0)$ . Тогда с учетом теоремы о среднем из (31) получим

$$\Phi(t) = -i \int_0^t g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0). \quad (32)$$

Из (19), (23) и (32) следует, что

$$\lambda f(t) - \int_0^t [f(\xi) + ig(\xi)] \cdot \ln \frac{t}{\xi} d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0). \quad (33)$$

Прибавив к обеим частям равенства (33)  $i\lambda g(t)$ , получим:

$$\begin{aligned} & \lambda [f(t) + ig(t)] - \int_0^t [f(\xi) + ig(\xi)] \cdot \ln \frac{t}{\xi} d\xi = \\ & = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0) + i\lambda g(t). \end{aligned} \quad (34)$$

В равенстве (34) сделаем замену

$$X(t) = f(t) + ig(t), \quad (35)$$

тогда

$$\lambda X(t) - \int_0^t X(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0) + i\lambda g(t). \quad (36)$$

Продифференцируем равенство (36) по  $t$ :

$$\lambda X'(t) - \int_0^t X(\xi) \frac{1}{t} d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^2 \frac{t}{l}} \cdot \frac{1}{t} d\xi + i\lambda g'_t. \quad (37)$$

Умножим обе части равенства (37) на  $t$ :

$$\lambda t X'(t) - \int_0^t X(\xi) d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^2 \frac{t}{l}} d\xi + i\lambda t g'_t. \quad (38)$$

Продифференцируем равенство (38) по  $t$ , а затем обе части равенства умножим на  $t/\lambda$ , тогда получим уравнение вида:

$$t^2 X''_{tt}(t) + tX'_t(t) - \frac{1}{\lambda} tX(t) = -itg(t) + 2i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^3 \frac{t}{l}} d\xi + i\lambda t g'_t(t) + i\lambda t^2 g''_{tt}(t). \quad (39)$$

Обозначим

$$\tilde{f}(t) = -itg(t) + 2i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^3 \frac{t}{l}} d\xi + i\lambda t g'_t(t) + i\lambda t^2 g''_{tt}(t), \quad (40)$$

тогда уравнение (39) примет вид:

$$t^2 X''_{tt}(t) + tX'_t(t) - \frac{1}{\lambda} tX(t) = \tilde{f}(t). \quad (41)$$

Соответствующее однородное уравнение для (41) представляет собой *модифицированное уравнение Бесселя* вида:

$$t^2 X''_{tt}(t) + tX'_t(t) - \frac{1}{\lambda} tX(t) = 0. \quad (42)$$

Из [6] следует, что решение уравнения (42) представимо в виде:

$$X_{одн.}(t) = Z_0(2\sqrt{-t/\lambda}) = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t), \quad (43)$$

где

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\lambda)^k}{k! \Gamma(k+1)}, \quad (44)$$

$$Y_0(t) = \frac{1}{\pi} \ln(-t/\lambda) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\lambda)^k}{k! \Gamma(k+1)} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\lambda)^k \Gamma'(k+1)}{(k!)^3} \quad (45)$$

являются *бесселевыми функциями* первого и второго рода, соответственно.

Применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению (41), получаем соответствующее частное решение уравнения (41):

$$X_{\text{частн.}}(t) = \left( -\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot J_0(t) + \left( \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t). \quad (46)$$

где  $W(Y_0(\xi); J_0(\xi)) = J_0(\xi)Y_0'(\xi) - Y_0(\xi)J_0'(\xi)$  – определитель Вронского.

Таким образом, общее решение уравнения (41) представляет собой следующую сумму решения однородного уравнения (43) и соответствующего частного решения (46):

$$X(t) = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t) - J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + Y_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi. \quad (47)$$

Найдем начальные условия дифференциального уравнения (41).

Применяя в уравнении (38) теорему о среднем и переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$ , получим первое начальное условие:

$$(tX'(t))|_{t=0} = i\tilde{g}_0, \quad (48)$$

где  $\tilde{g}_0 = (tg'(t))|_{t=0}$ .

Тогда с учетом (48) из равенства (47), умноженного на  $t$ , получим:

$$(tX'_t(t))|_{t=0} = C_1(tJ'_0(t))|_{t=0} + C_2(tY'_0(t))|_{t=0},$$

поскольку  $(tJ_0(t))|_{t=0} = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow 0}(tY_0(t)) = 0$ .

С учетом того, что

$$\lim_{t \rightarrow 0}(tJ'_0(t)) = 0 \text{ и } \lim_{t \rightarrow 0}(tY'_0(t)) = 1/\pi, \text{ имеем } (tX'_t(t))|_{t=0} = 1/\pi \cdot C_2,$$

то есть

$$C_2 = i\pi\tilde{g}_0. \quad (49)$$

Подставив равенство (49) в (47), получим:

$$X(t) = C_1 J_0(t) - J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t). \quad (50)$$

Поскольку  $J_0(0) = 1$ , а  $\left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , в силу

того, что

$$i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ быстрее, чем } Y_0(t) \approx (1/\pi) \ln(-t/\lambda)$$

при  $t \rightarrow 0$ . Тогда

$$(X(t))|_{t=0} = 0, \quad (51)$$

Из (50) следует, что общее решение уравнения (41) с учетом граничных условий (48) и (51) имеет вид:

$$X(t) = -J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t). \quad (52)$$

Из замены (35), следует, что

$$f(t) + ig(t) = -J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t).$$

Таким образом, решение уравнения (17) имеет вид:

$$f(t) = -ig(t) - J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t), \quad (53)$$

где  $J_0(t)$  – из (44),  $Y_0(t)$  – из (45),  $\tilde{f}(t)$  – из (40).

Вернемся к характеристической функции узла (16):

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma,$$

где  $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f$ , а  $f$  из (53).

Таким образом, получили следующую теорему.

**Теорема 3.** *Характеристическая функция узла (16) равна  $(S(\lambda)g)(t) = g(t) - if(t)$ , где  $f(t)$  имеет вид (53), а  $g(t) \in L_0$  – подпространство функций  $f(x; y) = f(xy)$  из  $L^2(D)$ .*

**Выводы.** Таким образом, в данной работе изучен оператор двойного интегрирования вида  $(Af)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds$ , который действует в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D = [0, a] \times [0, b]$ . Установлено, что характеристическая функция этого оператора является функцией монодромии для задачи Дарбу-

Гурса с данными на характеристиках. В работе также рассмотрено сужение оператора двойного интегрирования вида

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}$$

на подпространство

$$L_0 = \{f(x, y) \in L^2(D) \mid f(x, y) = f(xy)\}.$$

Осуществлено включение данных операторов в узел, описаны параметры узла, вычислены характеристические функции узлов.

Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для моделирования случайных процессов в рамках корреляционной теории.

**Список литературы:** 1. *Лившиц М.С., Янцевич А.А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с. 2. *Лившиц М.С.* О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Математический сборник. – 1954. – Т. 34 (76). – №1. – С. 145–198. 3. *Золотарев В.А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Х.: ХНУ, 2003. – 342 с. 4. *Бродский М.С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с. 5. *Надь Б. С., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с. 6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; перевод с нем. С. В. Фомина. – Изд. четв., испр. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Livshic, M. S. *Teorija operatornyh uzlov v gil'bertovyh prostranstvah.* Kharkiv: Izd-vo Khark. un-ta, 1971. Print. 2. Livshic, M. S. "O spektral'nom razlozhenii linejnyh nesamosoprjazhennyh operatorov." *Matematicheskij sbornik.* Vol. 34 (76). No. 1. 1954. 145–198. Print. 3. Zolotarev, V. A. *Analiticheskie metody spektral'nyh predstavlenij nesamosoprjazhennyh i ne-unitarnykh operatorov.* Kharkiv: KhNU, 2003. Print. 4. Brodskij, M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavlenija linejnyh operatorov.* Moscow: Nauka, 1969. Print. 5. Nad', B. S., and Ch. Fojash. *Garmnicheskij analiz operatorov v gil'bertovom prostranstve.* Moscow: Mir, 1970. Print. 6. Kamke, Je. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam.* Transl. from german. S. V. Fomin. 4th ed., ispr. Moscow: Nauka, 1971. Print.

Поступила(received) 15.04.2015

УДК 621.43

**А.М. ЛЕВТЕРОВ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков;

**Л.И. ЛЕВТЕРОВА**, вед. инженер, ИПМаш НАНУ, Харьков;

**В.Д. САВИЦКИЙ**, инженер, ИПМаш НАНУ, Харьков

### **ОСОБЕННОСТИ ЭМИССИИ ОКСИДОВ АЗОТА ПРИ РАБОТЕ ДИЗЕЛЯ НА БИОДИЗЕЛЬНОМ ТОПЛИВЕ И ВОЗМОЖНЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ СНИЖЕНИЯ**

Представлен анализ и попытки объяснения в научных публикациях особенностей образования оксидов азота при работе двигателя с воспламенением от сжатия на метиловых и этиловых эфирах жирных кислот (биодизельное топливо) и обозначены методы снижения содержания  $NO_x$  в отработавших газах. Исследование сгорания биодизельных топлив осложняется их многообрази-