kami i tablicami. Moscow: Nauka, 1979. Print. **10.** Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkcii (Formuly, grafiki, tablicy)*. Ed. L. I. Sedova. Moscow: Nauka, 1964. Print. **11.** D'jakonov, V. P. *Spravochnik po algoritmam i programma na jazyke BASIC dlja personal'nyh EVM: Spravochnik*. Moscow: Nauka, 1989. Print. **12.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Zadachi i uprazhnenija po teorii verojatnostej: Ucheb. posobie dlja stud. vtuzov*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademija», 2003. Print. **13.** Gurskij, E. I. *Teorija verojatnostej s elementami matematicheskoj statistiki*. Moscow: Vysshaja shkola, 1971. Print. **14.** Kramer, G. *Matematicheskie metody statistiki*. Ed. A. N. Kolmogorova. Moscow: Mir, 1975. Print.

Надійшла (received) 25.09.2015

Вамболь Сергій Олександрович – доктор технічних наук, професор, зав. кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Вамболь Сергей Александрович – доктор технических наук, профессор, зав. кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Vambol' Sergij Oleksandrovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Міщенко Ігорь Вікторович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Мищенко Игорь Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Mishchenko Igor Viktorovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Вамболь Віола Владиславівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри хімії, екології та експертиз них технологій, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Вамболь Виола Владиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры химии, экологии и экспертизных технологий, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Vambol' Viola Vladislavovna – Candidate of Technical Sciences, Docent, Docent at the Department of Chemistry, Ecology and Expertise Technology, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Кондратенко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Кондратенко Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Kondratenko Oleksandr Mykolajovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

УДК 389.14+658.16(075.8)

С. О. ВАМБОЛЬ, І. В. МІЩЕНКО, В. В. ВАМБОЛЬ, О. М. КОНДРАТЕНКО

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА 3

У даній, завершальній частині дослідження наведено визначення і проілюстровано параметри бета-розподілу для тіл кочення підшипників, а саме оцінено збіжність ітераційного процесу визначення цих параметрів, оцінено початкові і центральні моменти розподілу, збіг початкових моментів першого і другого порядку проілюстровано відповідними гістограмами і графіками. Наведені дані демонструють доцільність застосування математичного апарату бета-розподілу до вимірюваних фізичних величин, що чинять нелінійний вплив на механічні характеристики об’єкту дослідження. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу, для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

Вступ. У *метрології* існує підхід до побудови *універсальних сімей розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімей розподілів Пірсона (бета-розподілу)*, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до *нормального*, а отже вирізняється варіативністю і гнучкістю вирішення задачі апроксимації, але ще не повністю досліджений і не набув широкого використання. У попередніх частинах дослідження застосовано типовий закон розподілу (нормальний) до найпростішого елементу деталей машин – тіла кочення кулькового підшипника – як до тривимірного об’єкту найпростішої геометричного форми та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним, для знаходження справжнього або близького до нього закону [1], а також здійснено описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу, особливості застосування узагальненого бета-розподілу до об'єкту дослідження, а також проаналізовано придатність нормального закону розподілу за оцінками коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, початкових і центральних моментів неперервних розподілів [2].

Аналіз літературних джерел. При проведенні дослідження проаналізовано 32 наукових джерела інформації, повний перелік яких подано у першій частині даного дослідження [1]. У тому ж джерелі наведено *мету*, *об'єкт*, *предмет* і перелік *задач дослідження*. У даній частині дослідження буде вирішено задачу визначення параметрів бета-розподілу для об'єкту дослідження.

Визначення параметрів бета-розподілу. Для узагальненого бета-розподілу математичне очікування $m_1(p,q)$, дисперсія $D(p,q)$, коефіцієнти асиметрії Sk й ексцесу Ex мають вигляд:

$$m_1(p,q)=\frac{J_{\mathrm{P}\min}q+J_{\mathrm{P}\max}p}{p+q},\quad D(p,q)=\frac{\left(J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min}\right)^2 pq}{(p+q)^2(p+q+1)}, \tag{1}$$

$$Sk=\frac{2(q-p)}{p+q+2}\sqrt{\frac{p+q+1}{pq}}, \tag{2}$$

$$Ex=\frac{6\left((p-q)^2(p+q+1)-pq(p+q+2)\right)}{pq(p+q+2)(p+q+3)}. \tag{3}$$

Замінюючи $m_1(p,q)$ і $D(p,q)$ на відповідні вибіркові оцінки $\tilde{m}_1$ і $\tilde{S}^2$ (визначені за формулами з табл. 1.1 та 1.2 у [1]), скористуємось співвідношеннями для визначення параметрів розподілу (p,q):

$$p=\frac{\tilde{m}_1-J_{\mathrm{P}\min}}{J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min}}\cdot\left[\frac{\left(\tilde{m}_1-J_{\mathrm{P}\min}\right)\left(J_{\mathrm{P}\max}-\tilde{m}_1\right)}{\tilde{S}^2}-1\right], \tag{4}$$

$$q=\frac{J_{\mathrm{P}\max}-\tilde{m}_1}{J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min}}\cdot\left[\frac{\left(\tilde{m}_1-J_{\mathrm{P}\min}\right)\left(J_{\mathrm{P}\max}-\tilde{m}_1\right)}{\tilde{S}^2}-1\right]. \tag{5}$$

Ці вирази враховують моменти 1-го та 2-го порядків, що є цілком природним, але можна визначати параметри (p,q) за умов збігу 1-го та 3-го або 4-го початкових моментів. В роботі [3] проведено аналіз можливості опису бета-розподілом типу I щільності імовірності амплітуд напружень, які описуються *розподілом Релея* при вузькосмуговому випадковому процесі навантаження, та розподілами амплітуд за схематизацією за методом повних циклів при широкосмуговому процесі. При цьому як необхідна була умова рівності моментів 1-го та одного з вищих порядків.

Рівняння, які необхідно використати для пошуку (p,q), є нелінійними, тому рішення системи нелінійних рівнянь можна отримати наближеними з деякою точністю [4, 5]. Дві невідомих обумовлюють систему, яка складається з двох рівнянь, одне з яких складено відносно 1-го початкового моменту, а друге відносно моменту більш високого $n-$го порядку. Загальний вираз цієї системи, в якій присутні моменти (8) у [1] та вибіркові оцінки моментів $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_n$, має наступний вигляд:

$$F_1(p,q)=m_1(p,q)-\tilde{m}_1=0;\; F_n(p,q)=m_n(p,q)-\tilde{m}_n=0. \tag{6}$$

Початковим наближенням рішення цієї системи є величини (p,q), які визначені за формулами (5) – (6) у [1], що після підстановки в (6) дає два значення $F_1(p,q)$ і $F_n(p,q)$.

Далі складається *матриця Якобі* $W(p,q)$, в якій елементами є частинні похідні за змінними (p,q), що має наступний вид:

$$W(p,q)=\begin{pmatrix}\partial F_1(p,q)/\partial p & \partial F_1(p,q)/\partial q\\ \partial F_n(p,q)/\partial p & \partial F_n(p,q)/\partial q\end{pmatrix}. \tag{7}$$

З урахуванням виразу (6) отримуємо

$$\frac{\partial F_n(p,q)}{\partial p}=\frac{\Gamma(p)\Gamma'_p(p+q)-\Gamma'_p(p)\Gamma(p+q)}{\left[\Gamma(p)\right]^2}\times\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min)}\right)^k J_{\mathrm{P}\min}^{n-k}\frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)}+$$
$$+\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min)}\right)^k J_{\mathrm{P}\min}^{n-k}\times\frac{\Gamma'_p(p+k)\Gamma(p+q+k)-\Gamma'_p(p+q+k)\Gamma(p+k)}{\left[\Gamma(p+q+k)\right]^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F_n(p,q)}{\partial q}=\frac{\Gamma'_q(p+q)}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min)}\right)^k J_{\mathrm{P}\min}^{n-k}\frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)}-$$
$$-\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(J_{\mathrm{P}\max}-J_{\mathrm{P}\min)}\right)^k J_{\mathrm{P}\min}^{n-k}\frac{\Gamma'_q(p+q+k)\Gamma(p+k)}{\left[\Gamma(p+q+k)\right]^2}. \tag{9}$$

Далі визначається детермінант матриці за наступною формулою:

$$\Delta = \det W(p,q) = \partial F_1(p,q)/\partial p \cdot \partial F_n(p,q)/\partial q - \partial F_1(p,q)/\partial q \cdot \partial F_n(p,q)/\partial p, \tag{10}$$

його нерівність нулю означатиме неособливість цієї матриці, і після складається зворотна до неї матриця $W^{-1}(p,q)$, елементами якої у випадку матриці розміром (2×2) є:

$$W^{-1}(p,q) = \begin{pmatrix} W_{22}(p,q)/\Delta & -W_{12}(p,q)/\Delta \\ -W_{21}(p,q)/\Delta & W_{11}(p,q)/\Delta \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Нове наближене значення на першому ітераційному кроці позначаємо (p^*, q^*) і визначаємо за формулою (12).

Аналогічно проводяться подальші обчислення, які завершуються після досягання заданої точності для змінних. За необхідності можна скласти систему рівнянь з урахуванням значень початкових моментів ще більших порядків, але доцільність цього в даній роботі не розглядається.

$$\begin{pmatrix} p^* \\ q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \partial F_n(p,q)/\partial q & -\partial F_1(p,q)/\partial q \\ -\partial F_n(p,q)/\partial p & \partial F_1(p,q)/\partial p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1(p,q) \\ F_n(p,q) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Таблиця 1 – Збіжність ітераційного процесу

Ітераційний крок	$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}11130$ мм (збіг 1-го та 2-го початкових моментів)	$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}11130$ мм (збіг 1-го та 3-го початкових моментів)	$N = 3000$, $m_d = 1{,}59$ мм, $\sigma_d = 0{,}11130$ мм (збіг 1-го та 4-го початкових моментів)
0	$p = 3{,}83067531$, $q = 7{,}73589558$	$p = 3{,}83067531$, $q = 7{,}73589558$	$p = 3{,}83067531$, $q = 7{,}73589558$
1	$F_1(p,q) = 1{,}81899 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = 1{,}08530 \cdot 10^{-5}$	$F_1(p,q) = 1{,}81899 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = -0{,}00155647$	$F_1(p,q) = 1{,}81899 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = -0{,}00507299$
	$p = 3{,}83206259$, $q = 7{,}73869715$	$p = 3{,}73425370$, $q = 7{,}54117593$	$p = 3{,}61465942$, $q = 7{,}29965997$
2	$F_1(p,q) = -4{,}4565 \cdot 10^{-11}$ $F_2(p,q) = 3{,}57200 \cdot 10^{-9}$	$F_1(p,q) = 2{,}99775 \cdot 10^{-9}$ $F_2(p,q) = 3{,}79792 \cdot 10^{-5}$	$F_1(p,q) = 6{,}93854 \cdot 10^{-9}$ $F_2(p,q) = 0{,}000299854$
	$p = 3{,}83206306$, $q = 7{,}73869809$	$p = 3{,}73649545$, $q = 7{,}54570314$	$p = 3{,}62604224$, $q = 7{,}32264729$
3	$F_1(p,q) = 2{,}72848 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = 1{,}8194 \cdot 10^{-12}$	$F_1(p,q) = -8{,}0945 \cdot 10^{-11}$ $F_2(p,q) = 2{,}14618 \cdot 10^{-8}$	$F_1(p,q) = -5{,}2751 \cdot 10^{-10}$ $F_2(p,q) = 9{,}29593 \cdot 10^{-7}$
	$p = 3{,}83206306$, $q = 7{,}73869809$	$p = 3{,}73649673$, $q = 7{,}54570571$	$p = 3{,}62607778$, $q = 7{,}32271906$
4	$F_1(p,q) = 0{,}0$ $F_2(p,q) = 4{,}5475 \cdot 10^{-13}$	$F_1(p,q) = 0{,}0$ $F_2(p,q) = 2{,}14618 \cdot 10^{-8}$	$F_1(p,q) = -1{,}8190 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = 8{,}1855 \cdot 10^{-12}$
	$p = 3{,}83206306$, $q = 7{,}73869809$	$p = 3{,}73649673$, $q = 7{,}54570571$	$p = 3{,}62607778$, $q = 7{,}32271906$
5	$F_1(p,q) = 0{,}0$ $F_2(p,q) = 0{,}0$	$F_1(p,q) = 0{,}0$ $F_2(p,q) = -4{,}547 \cdot 10^{-13}$	$F_1(p,q) = -1{,}8190 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = -1{,}364 \cdot 10^{-12}$
	$p = 3{,}83206306$, $q = 7{,}73869809$	$p = 3{,}73649673$, $q = 7{,}54570571$	$p = 3{,}62607778$, $q = 7{,}32271906$
6	–	–	$F_1(p,q) = 1{,}8190 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p,q) = 1{,}3642 \cdot 10^{-12}$
	–	–	$p = 3{,}62607778$, $q = 7{,}32271906$

Присутність у виразах (10), (12) частинних похідних від гамма-функції за змінними p і q приводить до необхідності отримання аналітичного виразу для *гамма-функції* $\Gamma(z)$, де $z = p + q + i$ (i приймає значення 0, 1, 2, 3 ...). Скориставшись *формулою Стірлінга* (10) у [1], маємо (не показані останні два доданки в дужках)

$$\Gamma'(z) \approx e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \ldots\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\ln z - \frac{1}{2z}\right) - \left(\frac{1}{12z^2} + \frac{1}{144z^3} - \frac{139}{17280z^4} - \frac{571}{622080z^5} + \ldots\right)\right]. \tag{13}$$

В той же час можна скористатися відомим [6 – 9] співвідношенням

$$\Gamma'(z) = \Psi(z)\Gamma(z), \tag{14}$$

де $\Psi(z)$ – *псі-функція*, або *дігамма функція* $\Psi(z) = d[\ln(z)]/dz$, асимптотична формула для якої має вигляд

$$\Psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6}. \tag{15}$$

Для перевірки точності запропонованих формул було проведено порівняння з відомим значенням $\Psi(1) = -C = -0,57721566490...$ (*стала Ейлера*). За формулою (14) $\Gamma'(1) = \Psi(1) \approx -0,57896825$ (з урахуванням $\Gamma(1) = 1$), а за формулою (13) $\Gamma'(1) \approx -0,579128335$. В подальшому за необхідності обчислення похідної від гамма-функції в роботі використовується формула (14).

Приклад розрахунку. В табл. 6 у [1] відображені для вибірки $N = 3000$ з параметрами $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,11130$ мм ітераційні кроки щодо вирішення системи (6) за умов збігу певних початкових моментів. Для всіх розрахунків початковим наближенням є $p = 3,83067531$, $q = 7,73589558$, яке отримано з (4) і (5). Необхідна точність в розрахунках не задавалася. Аналіз даних з табл. 1 показує, що за умов вдалого початкового наближення значень (p, q) ітераційний процес маю швидку збіжність. Для вибірок з різними N і σ_d були проведені числові розрахунки з розрахунків параметрів бета-розподілу. В табл. 3 і 4 для значень $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм приведені величини початкових і центральних моментів відповідних розподілів (момент $\mu_1 = 0$ для усіх розподілів). Жирним шрифтом показані ті моменти, рівність яких необхідна при розрахунках уточненого значення параметрів бета-розподілу.

Таблиця 2 – Початкові і центральні моменти розподілу

$N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм					
Моменти розподілу		Емпіричний розподіл (гістограма)	Теоретичний розподіл $g(J_P)$	Бета розподіл $f(J_P)$ $p = 3,8306753$ $q = 7,7358956$	Бета розподіл $f(J_P)$ $p^* = 3,8320631$ $q^* = 7,7386981$
Початкові	m_1	**0,64436396**	0,64438131	0,64436396	**0,64436396**
	m_2	**0,44775301**	0,44783132	0,44776386	**0,44775301**
	m_3	0,33424155	0,33432263	0,33268507	0,33266268
	m_4	0,26720866	0,26714242	0,26213568	0,26210310
Центр.	μ_2	0,03254810	0,03260404	0,03255895	0,03254810
	μ_3	0,00378001	0,00372963	0,00220255	0,00220114
	μ_4	0,00398597	0,00388699	0,00295176	0,00294986
	Коефіцієнти асиметрії та ексцесу				
	Sk	0,64373057	0,63351739	0,37490468	0,37485140
	Ex	0,76255408	0,65653920	–0,21554531	–0,21547850

Таблиця 3 – Початкові і центральні моменти розподілу

$N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм					
Моменти розподілу		Емпіричний розподіл (гістограма)	Теоретичний розподіл $g(J_P)$	Бета розподіл $f(J_P)$ $p = 3,8306753$ $q = 7,7358956$	Бета розподіл $f(J_P)$ $p^* = 3,6260778$ $q^* = 7,3227191$
Початкові	m_1	**0,64436396**	0,64438131	0,64436396	**0,64436396**
	m_2	0,44775301	0,44783132	0,44776386	0,44944721
	m_3	0,33424155	0,33432263	0,33268507	0,33616354
	m_4	**0,26720866**	0,26714242	0,26213568	**0,26720866**
Центр.	μ_2	0,03254810	0,03260404	0,03255895	0,03424231
	μ_3	0,00378001	0,00372963	0,00220255	0,00242694
	μ_4	0,00398597	0,00388699	0,00295176	0,00325277
	Коефіцієнти асиметрії та ексцесу				
	Sk	0,64373057	0,63351739	0,37490468	0,38301451
	Ex	0,76255408	0,65653920	–0,21554531	-0,22587001

Як бачимо, проведене уточнення (p^*, q^*) за умов рівності моментів 1-го та 2-го порядків практично не відрізняється від базового значення, в той же час, для комбінації з моментами більш високих порядків відмінності (p^*, q^*) від початкових (p, q) більш суттєві.

За результатами проведених досліджень для кожної низки значень N і σ_d були побудовані серії з чотирьох рисунків, на яких представлені графіки емпіричного розподілу (гістограма) у порівнянні відповідно з нормальним, теоретичним і бета розподілами, а також зведений сумісний графік останніх трьох розподілів.

На цих рисунках цифрами позначені: 1 – нормальний розподіл (пунктирна крива), 2 – теоретичний розподіл (штрих-пунктирна крива), 3 – бета-розподіл (суцільна крива). Як приклад, для даних $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм на рис. 1 показані гістограма і нормальний закон, а на рис. 2 показані всі розподіли.

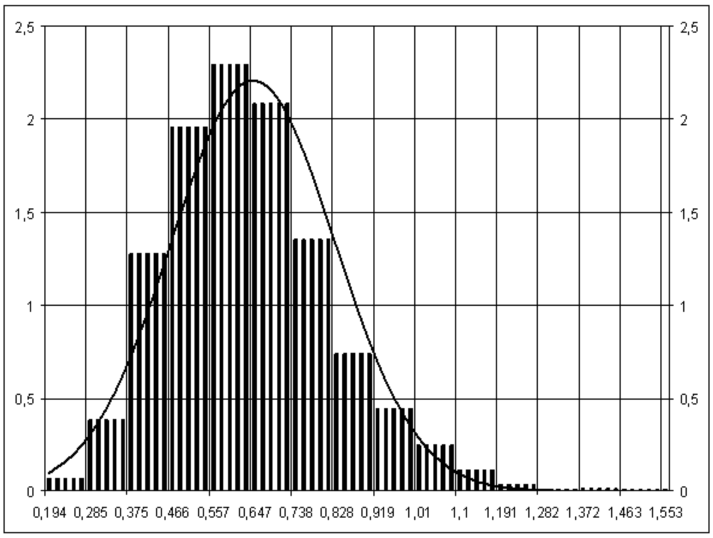

Рис. 1 – Збіг початкових моментів 1-го та 2-го порядку для $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм: гістограма – емпіричний розподіл; суцільна крива – нормальний розподіл.

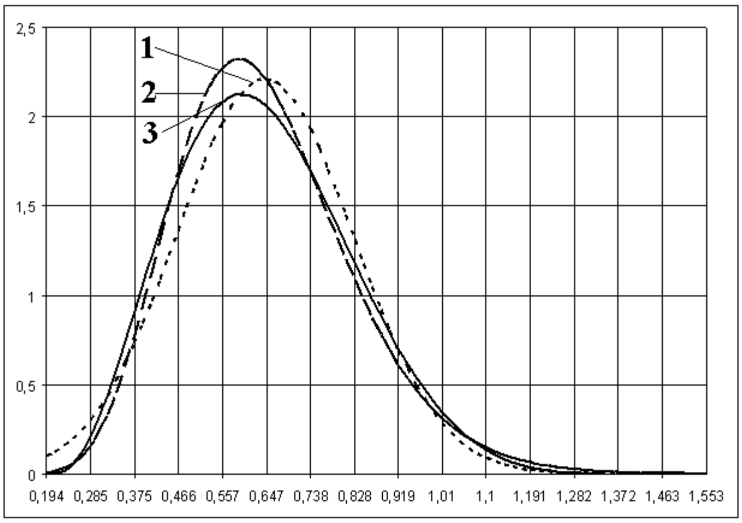

Рис. 2 – Збіг початкових моментів 1-го та 2-го порядку для $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм: крива 1 – нормальний розподіл; крива 2 – теоретичний розподіл; крива 3 – бета-розподіл

Висновки. Таким чином, в роботі розглянута задача апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису, які представлені у вигляді вибірки та на їх основі побудовані гістограми, за допомогою бета-розподілу.

У даній, завершальній частині дослідження наведено розроблену методику та числові і графічні результати застосування математичного апарату бета-розподілу до об'єкту дослідження, для тіл кочення підшипників, а саме оцінено збіжність ітераційного процесу визначення цих параметрів, оцінено початкові та центральні моменти розподілу, збіг початкових моментів першого і другого порядку проілюстровано відповідними гістограмами і графіками. Наведені дані демонструють доцільність застосування математичного апарату бета-розподілу до вимірюваних фізичних величин, що чинять нелінійний вплив на механічні характеристики об'єкту дослідження.

За цими даними можна зробити висновок про те, що мети дослідження досягнуто, а задачі дослідження виконано у повному обсязі.

Вперше показано переваги застосування бета-розподілу для апроксимації емпіричного закону розподілу будь-яких даних вимірювань на прикладі геометричних характеристик тіл кочення підшипників.

Отримана методологія і математичний апарат для застосування бета-розподілу придатні для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Список літератури: **1.** *Вамболь С.О.*, *Міщенко І.В.*, *Кондратенко О.М.*, *Бурменко О.А.* Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 1 // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 36 – 44. **2.** *Вамболь С.О.*, *Міщенко І.В.*, *Вамболь В.В.*, *Кондратенко О.М.* Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 2 // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 41 (1150). – С. 11 – 16. **3.** *Жовдак В.А.*, *Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Х.: Харьковский государственный политехнический университет, 1999. – 120 с. **4.** *Демидович Б.П.*, *Марон И.А.* Основы вычислительной математики / Под общ. ред. *Б.П. Демидовича*. – 2-е изд. – М.: Госуд. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 660 с. **5.** *Дэннис Дж.*, *Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с. **6.** *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 249 с. **7.** *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Под ред. *К.И. Бабенко*. – М.: Мир, 1980. – 608 с. **8.** Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. *М. Абрамовица* и *И. Стиган*. – М.: Наука, 1979. – 832 с. **9.** *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Лёш Ф.* Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Под ред. *Л.И. Седова*. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Vambol', S. O., et al. "Aproksymatcija zakonu rozpodilu eksperymental'nyh danyh za dopomogoju beta-rozpodilu. Chastyna 1." *Visnyk Nacional'nogo tehnichnogo universutetu «KhPI». Zbirnyk naukovuh prac'. Ser.: Matematychne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 36–44. Print. **2.** Vambol', S. O., et al. "Aproksymatcija zakonu rozpodilu eksperymental'nyh danyh za dopomogoju beta-rozpodilu. Chastyna 2." *Visnyk Nacional'nogo tehnichnogo universutetu «KhPI». Zbirnyk naukovuh prac'. Ser.: Matematychne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 41 (1150). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 11–16. Print. **3.** Zhovdak, V. A., and I. V. Mishhenko. *Prognozirovanije nadezhnosti elementov konstrukcij s uchetom tehnologicheskih i ekspluatacionnyh faktorov*. Kharkov: Khar'kovskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet, 1999. Print. **4.** Demidovich, B. P., and I. A. Maron. *Osnovy vychislitel'noj matematiki*. Ed. B. P. Demidovich. Moscow: Gosud. izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1963. Print. **5.** Dennis, Dzh., and R. Shnabel'. *Chislennye metody bezuslovnoj optimizacii i reshenija nelinejnyh uravnenij*. Moscow: Mir, 1988. Print. **6.** Kuznecov, D. S. *Special'nye funkcii*. Moscow: Vysshaja shkola, 1962. Print. **7.** Ljuk, Ju. *Special'nye matematicheskie funkcii i ih approksimacii*. Ed. K. I. Babenko. Moscow: Mir, 1980. Print. **8.** *Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafikami i tablicami*. Ed. M. Abramovic, and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. Print. **9.** Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkcii (Formuly, grafiki, tablicy)*. Ed. L. I. Sedov. Moscow: Nauka, 1964. Print.

Надійшла (received) 29.09.2015

Вамболь Сергій Олександрович – доктор технічних наук, професор, зав. кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Вамболь Сергей Александрович – доктор технических наук, профессор, зав. кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Vambol' Sergij Oleksandrovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Міщенко Ігорь Вікторович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Мищенко Игорь Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Mishchenko Igor Viktorovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Вамболь Віола Владиславівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри хімії, екології та експертиз них технологій, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Вамболь Виола Владиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры химии, экологии и экспертизных технологий, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Vambol' Viola Vladislavovna – Candidate of Technical Sciences, Docent, Docent at the Department of Chemistry, Ecology and Expertise Technology, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Кондратенко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Кондратенко Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Kondratenko Oleksandr Mykolajovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.