УДК 539.3

Е. С. МАЛАХОВ

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ТРЁХ СТРУН

Исследуются нестационарные колебания системы трех струн, вызванные воздействием сосредоточенной нагрузки. Движения струн описываются одномерными неоднородными волновыми уравнениями. Определяются зависимости контактных сил, возникающих между струнами, с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Приведен пример численного расчета, в котором получены зависимости контактных сил и перемещений каждой из струн.

Ключевые слова: система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, метод регуляризации, интегральное уравнение Вольтерра.

Введение. Современное общество сложно представить без механизмов. Широкое распространение получили элементы конструкций механизмов, в которых используются канаты (металлические и неметаллические), и они в механике моделируются струнами. Модели струн так же можно использовать для расчета динамических нагрузок на линиях электропередач. Как правило, в жизни встречаются не одна, а несколько струн, примерами которых являются такие объекты как канатная дорога, контактная сеть троллейбуса, различные продольные растяжки и так далее. В случае нестационарных нагрузок систем струн необходимо учитывать волновой характер их нагружения при расчетах. Данная работа посвящена построению математической модели для системы трех струн под действием нестационарного нагружения, приложенного к одной из струн. Предполагается учесть влияние взаимодействия колеблющихся струн действием дополнительных сил, равны контактным реакциям, приложенным к струнам. С использованием предложенного в статье подхода можно рассчитывать параметры для систем струн при их импульсном нагружении.

Анализ публикаций. Задачи по исследованию поведения одной струны были давно и хорошо изучены еще в курсе классической математической физики. В работе [1] подробно изложен вывод уравнения колебаний струны, то есть одномерного волнового уравнения, и методы его решения. В книге [2] изложены решения ряда задач нестационарного деформирования элементов конструкций в виде стержней, мембран, балок, пластин, оболочек и так далее с подробным описанием методики их решения, и с аналогичным математическим аппаратом, использованному в этой работе. Важные сведения из операционного исчисления приводятся в [3], которое является удобным инструментом при решении систем линейных дифференциальных уравнений. В этой работе изложены прямое и обратное преобразование Лапласа, благодаря которым система в данной статье сводилась к уравнениям типа Вольтерра 1-го рода. В настоящее время можно встретить работы, посвященные нелинейной динамике струн [4]; работы, в которых изучается влияние на колебания струн дополнительных масс с вязкоупругими опорами [5, 6]. Отдельно упомянем работу [7], в которой описывается идентификация нелинейной возмущающей силы, действующей на натянутую струну. В ней решается подобная задача в более сложной постановке для одной струны, а в настоящей работе дана упрощенная постановка для системы струн с использованием более совершенных математических подходов (регуляризирующий алгоритм).

Цель и постановка задачи. Рассматривается система из трех закрепленных струн конечных длин, две из которых параллельны, а третья пересекает их, как показано на рис. 1. Влияние колеблющихся струн заменяем действием дополнительных сил, равным контактным реакциям. Целью данной работы является определение сил контактного взаимодействия между струнами в этой сложной системе. Знание этих сил позволяет определить перемещения в разных точках каждой из струн. К одной из струн приложена сосредоточенная нагрузка

$F_0(x,t) = P(t)\delta(x - x_0)$, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, x_0 – точка приложения нагрузки,

которая вызывает нестационарные колебания исследуемой системы.

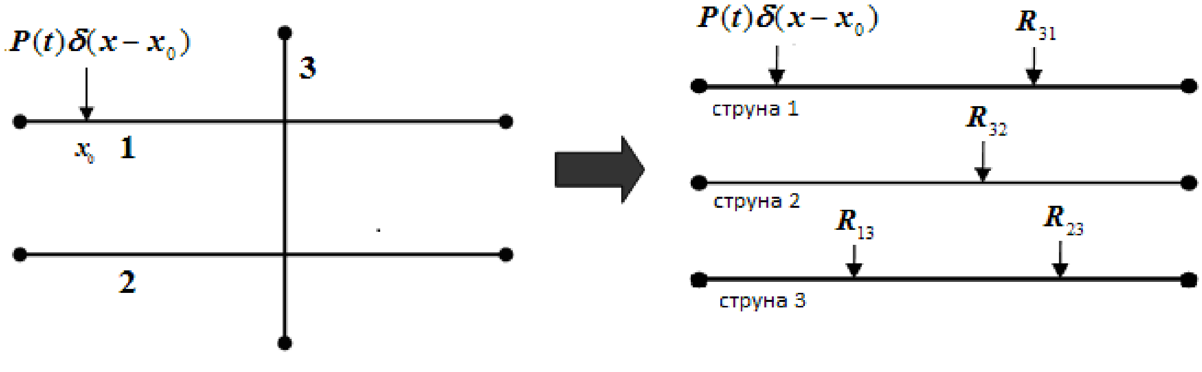


Рис. 1 – Исследуемая система струн.

Вначале рассмотрим более простой случай, когда на одну струну действует сосредоточенная нагрузка $F(x,t)$. В этом случае, колебания одной струны могут быть описаны одномерным волновым уравнением [1]:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} F(x,t), \tag{1}$$

где u – искомые перемещения, м; ρ – линейная плотность струны, м/кг; $F(x,t)$ – плотность распределения внешних сил, Н/м; $a = \sqrt{T/\rho}$ – скорость распространения волны (T – натяжение струны), м/с;

В случае трех струн можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\rho_1} F_0(x,t) + \dfrac{1}{\rho_1} R_{13};\; a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dfrac{1}{\rho_2} R_{23};\; a_3^2 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \dfrac{1}{\rho_3} R_{31} + \dfrac{1}{\rho_3} R_{32}, \end{cases} \tag{2}$$

где R_{ij} – сила контакта струн i и j. Данная система дополняется граничными условиями, которые представляют собой равенство нулю перемещений в точках закрепления струн (на концах отрезка):

$$u_1(0,t) = u_1(l_1,t) = 0;\; u_2(0,t) = u_2(l_2,t) = 0;\; u_3(0,t) = u_3(l_3,t) = 0, \tag{3}$$

где l_i – длина i струны, при нулевых начальных условиях:

$$u_1(x,0) = \frac{du_1(x,0)}{dt} = 0;\; u_2(x,0) = \frac{du_2(x,0)}{dt} = 0;\; u_3(x,0) = \frac{du_3(x,0)}{dt} = 0, \tag{4}$$

Предполагается, что в точке контакта двух струн их перемещения совпадают, то есть выполняются следующие кинематические условия:

$$u_1(x_{c13},t) = u_2(x_{c13},t);\; u_2(x_{c23},t) = u_3(x_{c23},t), \tag{5}$$

где x_{c13} – координата контакта первой и третьей струны; x_{c23} – координата контакта второй и третьей струны. И так же выполнены условия антисимметричности контактных сил $R_{ij} = -R_{ji}$.

Решение задачи. Используем *метод Фурье* для получения решения волнового уравнения (1). Разделяя переменные в однородном уравнении, получаем *задачу Штурма-Лиувилля* для определения собственных чисел и собственных функций. Решение неоднородной задачи строилось в виде разложения перемещений в ряд по синусам:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right). \tag{6}$$

Подставляем это разложение в (1), после этого используем свойство ортогональности: умножаем на $\sin(\pi k_1 x/l)$ и интегрируем в пределах от 0 до l. Благодаря этому вместо суммы получаем множество обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $u_k(t)$ следующего вида:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + a^2 \cdot \lambda_k^2 \cdot u_k(t) = \frac{2}{l\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi k x_0}{l}\right) \cdot P(t), \tag{7}$$

где $\lambda_k = \pi k/l$; $P(t)$ – изменение сосредоточенной нагрузки, $F(x,t) = P(t)\delta(x - x_0)$. Введем обозначение $C_{0k} = 2/l\rho \cdot \sin(\pi k x_0/l)$. Для определения неизвестных функций $u_k(t)$ получаем следующую *задачу Коши*:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + a^2 \cdot \lambda_k^2 \cdot u_k(t) = C_{0k} \cdot P(t);\; u(x,0) = \frac{du(x,0)}{dt} = 0. \tag{8}$$

Обозначаем $\omega_k = a \cdot \lambda_k$, и при помощи прямого интегрального преобразование Лапласа получаем:

$$s^2 \cdot u_k(s) + \omega_k^2 \cdot u_k(s) = C_{0k} \cdot P(t)$$

откуда связываем изображения равенством $u_k(s) = C_{0k} \cdot P(s)/(s^2 + \omega_k^2)$.

Выполняем обратное преобразование Лапласа, используя стандартные таблицы этого преобразования и *теорему о свертке* [8]. Приходим к следующей зависимости:

$$u_k(t) = \frac{C_{0k}}{\omega_k} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin(\omega_k (t - \tau)) d\tau. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получаем выражение для перемещений:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{0k}}{\omega_k} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin(\omega_k (t - \tau)) d\tau \cdot \sin(\lambda_k \cdot x). \tag{10}$$

Аналогично решению для одной струны (10), были получены уравнения для трех струн, которые представлены разложениями в ряды Фурье через неизвестные контактные силы R_{ij} и силу $P(t)$:

$$u_1(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{01,k}\cdot\int_0^t R_{13}(\tau)\sin(\omega_{1k}(t-\tau))d\tau+d_{0k}\cdot\int_0^t P(\tau)\sin(\omega_{1k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x\right);$$

$$u_2(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{02,k}\cdot\int_0^t R_{23}(\tau)\sin(\omega_{2k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{2k}\cdot x\right);$$

$$u_3(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{03,k}\cdot\int_0^t \left(R_{31}(\tau)+R_{32}(\tau)\right)\sin(\omega_{3k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{3k}\cdot x\right), \quad (11)$$

где были введены следующие обозначения:

$$C_{01,k}=\frac{-2}{l_1\rho_1\omega_{1k}}\cdot\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x_{c13}\right),\ d_{0k}=\frac{2}{l_1\rho_1\omega_{1k}}\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x_0\right),\ \lambda_{1k}=\frac{\pi k}{l_1},\ \omega_{1k}=a_1\cdot\lambda_{1k};$$

$$C_{02,k}=\frac{-2}{l_2\rho_2\omega_{2k}}\cdot\sin\left(\lambda_{2k}\cdot x_{c23}\right),\ \lambda_{2k}=\frac{\pi k}{l_2},\ \omega_{2k}=a_2\cdot\lambda_{2k};$$

$$C_{03,k}=\frac{-2}{l_3\rho_3\omega_{3k}}\cdot\left(\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x_{c13}\right)+\sin\left(\lambda_{2k}\cdot x_{c23}\right)\right),\ \lambda_{3k}=\frac{\pi k}{l_3},\ \omega_{3k}=a_3\cdot\lambda_{3k}.$$

Неизвестные контактные силы определялись из кинематических условий (5) и условия антисимметричности контактных сил, которые подставлялись в (11). Таким образом, получаем следующую систему двух интегральных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{01,k}\cdot\int_0^t R_{13}(\tau)\sin(\omega_{1k}(t-\tau))d\tau+d_{0k}\cdot\int_0^t P(\tau)\sin(\omega_{1k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x_{c13}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{02,k}\cdot\int_0^t R_{23}(\tau)\sin(\omega_{2k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{2k}\cdot x_{c13}\right);$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{02,k}\cdot\int_0^t R_{23}(\tau)\sin(\omega_{2k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{2k}\cdot x_{c23}\right)=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{03,k}\cdot\int_0^t \left(R_{13}(\tau)+R_{23}(\tau)\right)\sin(\omega_{3k}(t-\tau))d\tau\right)\cdot\sin\left(\lambda_{3k}\cdot x_{c23}\right). \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$K_{31}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{01,k}\cdot\sin(\omega_{1k}\cdot t)\cdot\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x_{c13}\right)\right);\ K_{13}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{02,k}\cdot\sin(\omega_{2k}\cdot t)\right)\cdot\sin\left(\lambda_{3k}\cdot x_{c13}\right);$$

$$K_{23}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{02,k}\cdot\sin(\omega_{2k}\cdot t)\right)\cdot\sin\left(\lambda_{2k}\cdot x_{c23}\right);\ K_{32}(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{03,k}\cdot\sin(\omega_{3k}\cdot t)\right)\cdot\sin\left(\lambda_{3k}\cdot x_{c23}\right);$$

$$K_{01}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(d_{0k}\cdot\sin(\omega_{1k}\cdot t)\right)\cdot\sin\left(\lambda_{1k}\cdot x_{c13}\right),\ u_{01}(t)=-\int_0^t P(\tau)K_{01}(t-\tau)d\tau.$$

После упрощений с учетом выше написанных соотношений система (12) свелась к двум *уравнениям Вольтерра* 1-го рода (13) относительно неизвестных функций $R_{ij}(t)$:

$$\left\{\int_0^t R_{13}(\tau)K_{31}(t-\tau)d\tau-\int_0^t R_{23}(\tau)K_{13}(t-\tau)d\tau=u_{01}(t);\int_0^t R_{13}(\tau)K_{32}(t-\tau)d\tau+\int_0^t R_{23}(\tau)\left(K_{32}(t-\tau)-K_{23}(t-\tau)\right)d\tau=0,\right. \quad (13)$$

где $K_{ij}(t-\tau)$ – несимметричные ядра, определяющие действие $i-$ой струны на $j-$ую; $u_{01}(t)$ – перемещения первой струны под действием приложенной нагрузки.

Запишем систему (13) в матричной форме:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{u} \quad (14)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{R}_{13}\\ \mathbf{R}_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^t K_{31}(t-\tau)d\tau & -\int_0^t K_{13}(t-\tau)d\tau\\ \int_0^t K_{32}(t-\tau)d\tau & \int_0^t \left(K_{32}(t-\tau)-K_{23}(t-\tau)\right)d\tau\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{R}_{13}(\tau)\\ \mathbf{R}_{23}(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{01}(t)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Вначале используем конечномерную аппроксимацию элементов матрицы $\mathbf{A}$, то есть, заменяем интегралы соответствующими интегральными суммами. Решение данной системы можно найти с помощью *обобщенного метода Крамера* $R_i = \Delta^{-1} \cdot \Delta_i$, но оно не будет устойчивым в силу неккоректности задачи. Для получения устойчивого решения интегральных уравнений Вольтера используют различные регуляризирующие алгоритмы, изложенные в работе [8]. Одним из наиболее эффективных классических методов, использованный в данной статье, является *метод регуляризации академика А.Н. Тихонова* [9]. Таким образом, при решении находим неизвестные контактные силы в следующей форме:

$$\mathbf{R}_{13} = \left(\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}\right)^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{u}_{01}; \ \mathbf{R}_{23} = -\left(\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}\right)^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{u}_{01},, \quad (15)$$

где $\Delta\mathbf{A}$ – определитель блочной матрицы $\mathbf{A}$; α – параметр регуляризации; $\mathbf{C}$ – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [2].

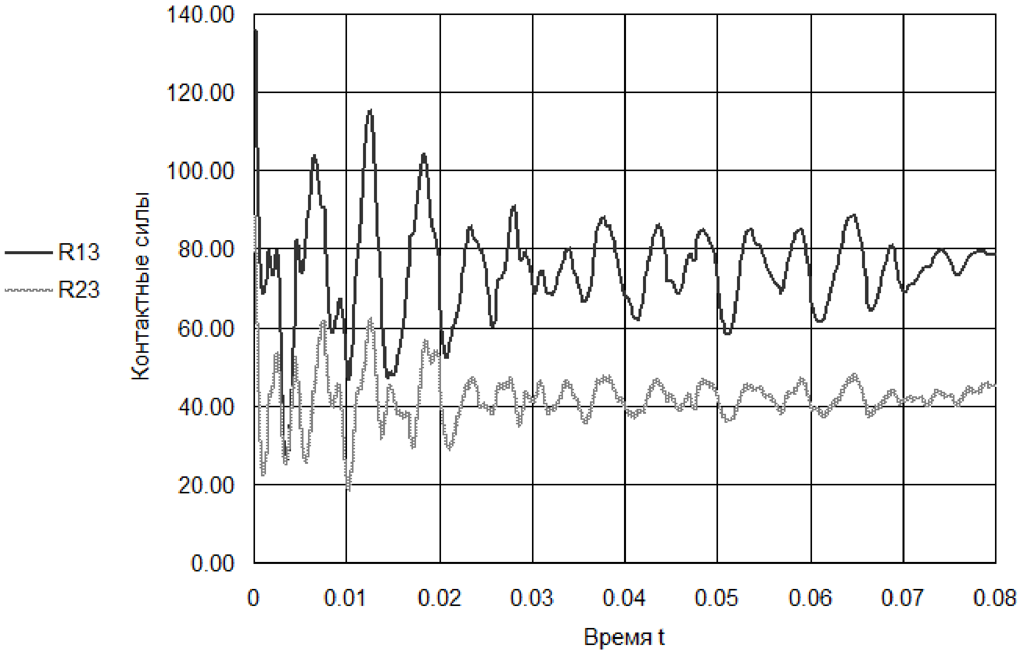


Рис. 2 – Значения модулей контактных сил.

Численный эксперимент. Расчет сил контактного взаимодействия проводился со следующими параметрами: $l_1 = 0.8$ м; $l_2 = 0.85$ м; $l_3 = 0.9$ м; свойства материала принимались одинаковыми для всех струн, то есть $\rho_i = 6.126 \cdot 10^{-3}$ кг/м; $a_i = 180$ м/с. Сила $P(t)$, которую приложили к первой струне, изменяется во времени как *функция Хевисайда*: $P(t) = q_0 \cdot H(t)$, где $q_0 = 100$ Н – интенсивность нагрузки. Исследуется промежуток времени $t = 0.08$ с. Вместо бесконечных сумм в выражении (15) бралось конечное число $K = 50$ членов ряда. Рис. 2 иллюстрирует изменения контактных сил во времени.

По известным контактным силам при помощи (11) можно определить перемещения в произвольных точках струн. На рис. 3 изображены перемещения каждой струны для их средних точек.

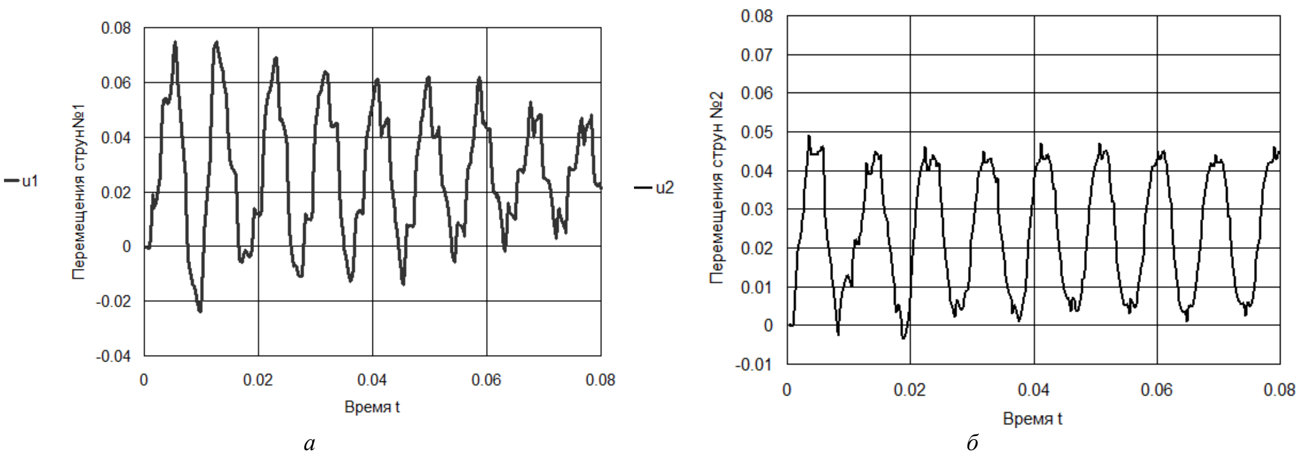
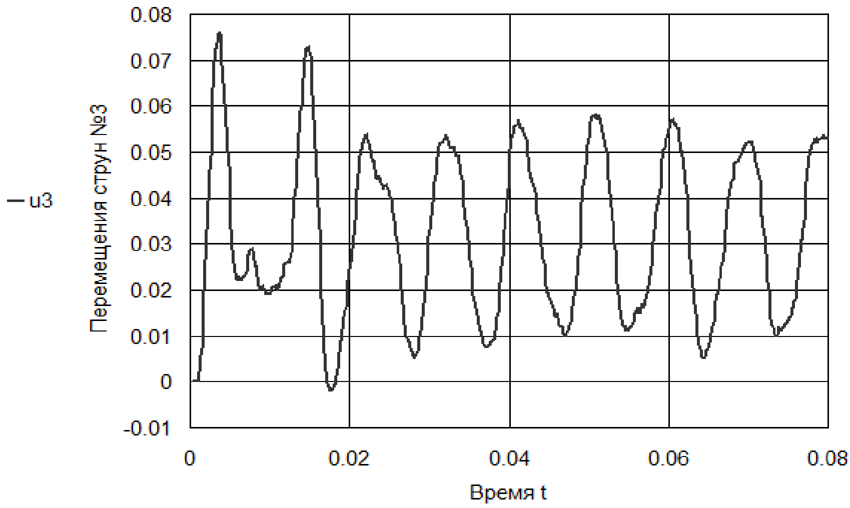


Рис. 3 – Перемещения струн под действием сосредоточенной нагрузки: *а* – струны № 1; *б* – струны № 2.



в

Рис. 3 – Перемещения струн под действием сосредоточенной нагрузки: *в* – струны № 3.

Выводы. В данной статье была решена задача для нестационарных колебаний системы трех струн под действием сосредоточенной нагрузки. При помощи метода регуляризации А. Н. Тихонова получено устойчивое решение, которое определяет силы контактного взаимодействия между струнами в зависимости от времени. Проведен численный расчет этих сил, а так же по известным контактным силам вычислены перемещения каждой струны в точке, отвечающей середине каждой струны.

Предложенный подход может быть использован при проектировании различных механических систем, которые моделируются струнами (канатные краны, контактные сети и так далее), и находятся под воздействием нестационарных нагрузок.

Список литературы: 1. *Араманович И.Г.*, *Левин В.И.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с. **2.** *Янютин Е.Г.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / *Е.Г. Янютин.*, *И.В. Янчевский*, *А.В. Воропай*, *А.С. Шарапата* // Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. **3.** *Дидкин В.А.*, *Прудников А.П.* Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. **4**. *Li-Qun Chen*, *Wei Zhang*, *Jean W. Zu*. Nonlinear dynamics for transverse motion of axially moving strings // Chaos, Solitons & Fractals, Volume 40, Issue 1, 15 April 2009, Pages 78 – 90. **5.** *Belotserkovskii P.M.* Transient vibration of an infinite string bearing a concentrated mass and supported by elastic-viscous suspensions // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 75, Issue 5, 2011, Pages 553 – 559. **6.** *Bingen Yang* Exact transient vibration of stepped bars, shafts and strings carrying lumped masses // Journal of Sound and Vibration, Volume 329, Issue 8, 12 April 2010, Pages 1191 – 1207. **7**. *Vincent Debut*, *Delaune X.*, *Antunes J.* Identification of the nonlinear excitation force acting on a bowed string using the dynamical responses at remote locations // International Journal of Mechanical Sciences, Volume 52, Issue 11, November 2010, Pages 1419 – 1436. **8.** *Верлань А.Ф.*, *Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с. **9.** *Тихонов А.Н.*, *Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 288 с.

Bibliography (transliterated): 1. Aramanovich, Y. G., and V. Y. Levin. *Uravnenija matematicheskoj fiziki*. Moscow: Nauka, 1969. Print. **2**. Janjutin, E. G., et al. *Zadachi impul'snogo deformirovanija elementov konstrukcii. Monografija*. Kharkov: HNADU, 2004. Print. **3**. Didkin, V. A., and A. P. Prudnikov. *Operacionnoe ischislenie*. Moscow: Vysshaja shkola, 1966. Print. **4**. Chen, Li-Qun, Wei Zhang and Jean W. Zu. "Nonlinear dynamics for transverse motion of axially moving strings." *Chaos*, *Solitons & Fractals*. Vol. 40. Issue 1. 2009. 78–90. Print. **5**. Belocerkovskij, P. M. "Transient vibration of an infinite string bearing a concentrated mass and supported by elastic-viscous suspensions." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 75. Issue 5. 2011. 553–559. Print. **6**. Bingen, Yang. "Exact transient vibration of stepped bars, shafts and strings carrying lumped masses." *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 329. Issue 8. 2010. 1191–1207. Print. **7**. Debut, V., X. Delaune, and J. Antunes. "Identification of the nonlinear excitation force acting on a bowed string using the dynamical responses at remote locations." *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 52. Issue 11. 2010. 1419–1436. Print **8**. Verlan', A. F., and V. S. Sizikov. *Integral'nye uravnenija: metody*, *algoritmy*, *programmy: spravochnoe posobie*. Kiev: Nauk. dumka, 1986. Print. **9**. Tihonov, A. N., and V. Ja. Arsenin. *Metody reshenija nekorrektnyh zadach*. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry, 1986. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Малахов Євген Сергійович – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

Малахов Евгений Сергеевич – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

Malakhov Evgeniy Sergeevich – postgraguate, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov, Kyiv; tel.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.