Мищенко Виктор Олегович – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Mishchenko Viktor Olegovich– Doctor of Technical Sciences, Associate professor, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Паточкін Борис Вікторович – аспірант, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 705-42-81; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

Паточкин Борис Викторович – аспирант, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (057) 705-42-81; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

Patochkin Boris Viktorovich – postgraduate, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (057) 705-42-81; tel.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

УДК 517.955.8

Е. А. НАБОКА

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПЛАСТИН БЕРГЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ВНУТРЕННИМ И ГРАНИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ЧАСТЬ 2

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично защемленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границ. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра γ, пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. В этой части работы описана структура верхнего предела аттрактора при $\gamma \to \infty$. Установлено, что он совпадает с множеством $diag(\tilde{\mathfrak{A}} \times \tilde{\mathfrak{A}})$ – диагональю прямого произведения двух экземпляров аттрактора системы, описывающей колебания одной пластины. Также при дополнительных условиях на функции демпфирования доказано, что и сам аттрактор системы двух связанных пластин совпадает с множеством $diag(\tilde{\mathfrak{A}} \times \tilde{\mathfrak{A}})$ для достаточно больших значений параметра γ.

Ключевые слова: модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

Обзор результатов части 1. Явления синхронизации различных составных механических, химических, биологических, социальных систем вызывают большой интерес в литературе (смотрите [1 – 13]).

В данной серии работ изучается синхронизация механической системы, состоящей из двух упруго связанных пластин с частично защемленной и частично свободной границей и нелинейными диссипационными силами, действующими как во внутренних частях пластин, так и на свободных участках их границ. Соответствующая математическая модель, известная в литературе как *модель Бергера* нелинейных колебаний пластины [14], имеет следующий вид:

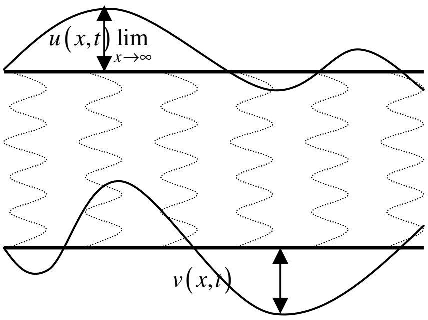

Рис. 1 – Система связанных пластин: $u(x,t)$, $v(x,t)$ – вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя.

$$u = u(x,t),\ v = v(x,t),\quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \geq 0;$$

$$\begin{cases} u_{tt} + B(u_t) + \Delta^2 u + \left(Q - \beta \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega \right) \Delta u + \gamma (u - v) = p, \\ v_{tt} + B(v_t) + \Delta^2 v + \left(Q - \beta \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega \right) \Delta v + \gamma (v - u) = p, \end{cases} \quad x \in \Omega,\ t > 0; \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u^0, \quad v\big|_{t=0} = v^0, \quad u_t\big|_{t=0} = u^1, \quad v_t\big|_{t=0} = v^1; \qquad (2)$$

$$u = \partial_\nu u = v = \partial_\nu v = 0, \quad x \in \Gamma_0; \qquad (3)$$

$$\Delta u + (1-\mu)\Sigma_1 u = 0,\ \ \Delta v + (1-\mu)\Sigma_1 v = 0,\ \ x \in \Gamma_1; \qquad (4)$$

$$\begin{matrix} \partial_n \Delta u + (1-\mu)\Sigma_2 u = d(x) g(u_t) + \sigma u - \left(Q - \beta \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega \right) \partial_n u, \\ \partial_n \Delta v + (1-\mu)\Sigma_2 v = d(x) g(v_t) + \sigma v - \left(Q - \beta \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega \right) \partial_n v, \end{matrix} \quad x \in \Gamma_1; \qquad (5)$$

где Ω – плоская область, занимаемая пластинами в состоянии покоя; граница области $\partial\Omega = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$; $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \varnothing$, Γ_0 – защемленная часть границы, Γ_1 – ее свободная часть; функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ описывают вертикальные отклонения пластины относительно состояния покоя; операторы $B(z)=\tilde{d}(x)b(z)$ и $d(x)g(z)$ отвечают за механизм диссипации во внутренней части пластины и на ее границе; функция $p=p(x)\in L_2(\Omega)$ описывает поперечные нагрузки, приложенные к пластине; слагаемое $\gamma(u-v)$ учитывает связь пластин системы, причем коэффициент $\gamma\geq 0$ пропорционален интенсивности связи; граничные операторы Σ_i определены равенствами:

$$\Sigma_1 z = 2n_1n_2 z_{x_1x_2} - n_1^2 z_{x_2x_2} - n_2^2 z_{x_1x_1}, \quad \Sigma_2 z = \partial_\tau((n_1^2-n_2^2)z_{x_1x_2} + n_1n_2(z_{x_2x_2}-z_{x_1x_1})),$$

где $n=(n_1,n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, а τ – единичный касательный вектор; константы β,μ,σ положительные, а константа Q принимает произвольное вещественное значение.

Предполагаем, что операторы внутреннего и внешнего демпфирования удовлетворяют следующим условиям:

Условия 1. (внутреннее демпфирование)

$B(z)=\tilde{d}(x)b(z):\ \tilde{d}(x)\in L_\infty(\Omega);\ \tilde{d}(x)>0,\ x\in\Omega;\ b(z)\in C^1(\mathbb{R});\ b(0)=0;\ b'(z)>0, \forall z\in\mathbb{R};$

$\exists\, m_1, M_1>0: m_1\leq b'(z)\leq M_1\left(1+zb(z)\right), |z|\geq 1;$

Условия 2. (граничное демпфирование)

$d(x)\in L_\infty(\Gamma_1),\ d(x)>0,\ x\in\Gamma_1;\ g(z)\in C^1(\mathbb{R});\ g(0)=0;\ g'(z)\geq m_2>0, \forall z\in\mathbb{R};$

$\exists M_2>0: g'(z)\leq M_2(1+zg(z)), |z|\geq 1.$

Задача (1) – (5) порождает семейство динамических систем (H,S_t^γ) с *фазовым пространством*

$$H=[H^2_{\Gamma_0}(\Omega)]^2\times[L_2(\Omega)]^2$$

и *эволюционным оператором* $S_t^\gamma: H\to H$, действующим по правилу

$$S_t^\gamma\left(u^0,v^0,u^1,v^1\right)=\left(u(x,t),v(x,t),u_t(x,t),v_t(x,t)\right),$$

где пара функций $u(x,t), v(x,t)\in C([0,T];H^2_{\Gamma_0}(\Omega))\bigcap C^1([0,T];\mathrm{L}_2(\Omega))$ – единственное *слабое решение* задачи (1) – (5) для начальных данных (u^0,v^0,u^1,v^1).

Для любого $\gamma\geq 0$ динамическая система (H,S_t^γ) обладает *компактным глобальным аттрактором* $\mathfrak{A}^\gamma$. Аттрактор совпадает с неустойчивым многообразием $M_+(N^\gamma)$, исходящим из множества стационарных точек системы N^γ. Кроме того, семейство аттракторов $\{\mathfrak{A}^\gamma\}$ ограничено в пространстве H равномерно по параметру γ. Для траекторий системы из аттрактора справедливо следующее неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)-v(t)\|\leq C/\gamma, \tag{6}$$

для некоторого $C\in(0;\infty)$ и $(u(t),v(t),u_t(t),v_t(t))\subset\mathfrak{A}^\gamma,\ \gamma>0$.

Нас интересует предельное поведение аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ при $\gamma\to\infty$. Данное поведение описывается при помощи специальной структуры – *верхнего предела аттрактора* [15]. Напомним, что верхним пределом аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ при $\gamma\to\infty$ называется множество

$$\mathfrak{A}(\infty)=\bigcap_{N\geq N_0}\left[\bigcup_{\gamma\geq N}\mathfrak{A}^\gamma\right]_H,\ \ N_0\geq 0,$$

где $[\bullet]_H$ означает замыкание множества по норме пространства H. В первой части нашей работы [16] доказано, что верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ при $\gamma\to\infty$ лежит на диагонали фазового пространства системы H:

$$\mathfrak{A}(\infty)\subset diagH=\left\{(z^0,z^0,z^1,z^1):\ \ (z^0,z^1)\in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)\times L_2(\Omega)\right\}. \tag{8}$$

Соотношение (8) означает асимптотическую синхронизацию динамики системы (1) – (5) при $t\to\infty,\gamma\to\infty$:

$$\lim_{\gamma\to\infty}\lim_{t\to\infty}\left(\|u(t,\gamma)-v(t,\gamma)\|_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega)}+\|u_t(t,\gamma)-v_t(t,\gamma)\|_{L_2(\Omega)}\right)=0.$$

Цель работы. В настоящей статье мы подробно опишем структуру множества $\mathfrak{A}(\infty)$, а также, при дополнительном предположении на функцию внутреннего демпфирования $b(z)$:

$$b'(z)\geq m_1>0,\ z\in\mathbb{R}, \tag{9}$$

установим синхронизацию системы для конечных, но достаточно больших, значений параметра связи $\gamma\geq\gamma_0>0$ при $t\to\infty$. Кроме того, мы покажем, что синхронизация динамики системы происходит с экспоненциальной скоростью:

$$\left\|u(t)-v(t)\right\|^2_{H^2(\Omega)}+\left\|u_t(t)-v_t(t)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le Ce^{-\delta(t-t_0)},\qquad(10)$$

при $t\ge t_0>0,\gamma\ge\gamma_0>0$ для некоторых $C,\delta>0$.

Вспомогательная задача. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, описывающую нелинейные колебания одной пластины с частично защемленной и частично свободной границей:

$$z_{tt}+B(z_t)+\Delta^2 z+\left(Q-\beta\int_\Omega\left|\nabla z\right|^2 d\Omega\right)\Delta z=p,\quad x\in\Omega,t>0;\qquad(11)$$

$$z\,|_{t=0}=z^0,\quad z_t\big|_{t=0}=z^1;\qquad(12)$$

$$z=\partial_\nu z=0,\ \ x\in\Gamma_0;\qquad(13)$$

$$\Delta z+(1-\mu)\Sigma_1 z=0,\ \ x\in\Gamma_{1;}\qquad(14)$$

$$\partial_n\Delta z+(1-\mu)\Sigma_2 z=d(x)g(z_t)+\sigma z-\left(Q-\beta\int_\Omega\left|\nabla z\right|^2 d\Omega\right)\partial_n\,z,\quad x\in\Gamma_1.\qquad(15)$$

Считаем, что операторы и константы в задаче (11) – (15) те же, что и в задаче (1) – (5), в частности, выполнены *условия 1* на операторы внутреннего и внешнего демпфирования.

Задача (11) – (15) корректно разрешима в пространстве $\tilde H=H^2_{\Gamma_0}(\Omega)\times L_2(\Omega)$, то есть имеет единственное *слабое* (в смысле определения 2 из [16]) решение $z(x,t)\in C([0,T];H^2_{\Gamma_0}(\Omega))\bigcap C^1([0,T];\mathrm{L}_2(\Omega))$ для любых начальных данных $(z^0,\mathrm{z}^1)\in\tilde H$. Аналогично задаче (1) – (5) задача (11) – (15) порождает в пространстве $\tilde H$ динамическую систему, обладающую компактным глобальным аттрактором $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Определим оператор $S_t: diagH\to diagH$ следующим образом:

$$S_t\left(z^0,z^0,z^1,z^1\right)=\left(z(x,t),z(x,t),z_t(x,t),z_t(x,t)\right),\ \ \forall\left(z^0,z^0,z^1,z^1\right)\in diagH,$$

где $z(x,t)$ – слабое решение задачи (11) – (15) для начальных данных (z^0,z^1). Отметим, что определенный таким образом оператор S_t совпадает с ограничением на пространство $diagH$ оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ:

$$S_t\left(z^0,z^0,z^1,z^1\right)=S_t^\gamma\left(z^0,z^0,z^1,z^1\right),\forall\left(z^0,z^0,z^1,z^1\right)\in diagH,t\ge0,\gamma\ge0.$$

Рассмотрим динамическую систему $\left(diagH,S_t\right)$. Очевидно, эта динамическая система обладает компактным глобальным аттрактором

$$\mathfrak{A}=diag\left(\tilde{\mathfrak{A}}\times\tilde{\mathfrak{A}}\right)=\left\{\left(z^0,z^0,z^1,z^1\right):\left(z^0,z^1\right)\in\tilde{\mathfrak{A}}\right\}.\qquad(16)$$

Аттрактор $\mathfrak{A}$ является подмножеством аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ для любого неотрицательного γ, а именно имеет место равенство

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^\gamma\bigcap diagH,\quad\forall\gamma\ge0.\qquad(17)$$

Действительно, ввиду инвариантности множества $\mathfrak{A}^\gamma\bigcap diagH$ относительно оператора S_t^γ а, следовательно (поскольку на множестве $diagH$ операторы совпадают), и оператора S_t, используя свойство притяжения аттрактором траекторий из ограниченных множеств, имеем

$$0=\lim_{t\to\infty}\sup\left\{dist_H\left(S_t a,\mathfrak{A}\right),a\in\mathfrak{A}^\gamma\bigcap diagH\right\}=\sup\left\{dist_H\left(a,\mathfrak{A}\right),a\in\mathfrak{A}^\gamma\bigcap diagH\right\}.$$

Последнее равенства в силу компактности множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^\gamma\bigcap diagH$ означает включение $\mathfrak{A}^\gamma\bigcap diagH\subset\mathfrak{A}$. Из соотношения (17) следует, что множество $\mathfrak{A}$ инвариантно относительно оператора S_t^γ. Используя эту инвариантность и повторяя рассуждения, приведенные выше, получим включение $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}^\gamma$.

Основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 на операторы внутреннего и внешнего демпфирования задачи (1) – (5). Тогда*

1. *Верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ динамической системы (H,S_t^γ), порождаемой задачей (1) – (5), совпадает с аттрактором $\mathfrak{A}$ динамической системы $(diagH,S_t)$, определенным соотношением (16)*;

2. *Если наряду с условиями 1 выполнено неравенство (9), то аттрактор* $\mathfrak{A}^{\gamma}$ *динамической системы* (H, S_t^{γ}) *совпадает с аттрактором* $\mathfrak{A}$ *для достаточно больших значений параметра* γ.

Доказательство теоремы 1. Для того, чтобы доказать первое утверждение теоремы, нам потребуется установить некоторые свойства верхнего предела аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1. Тогда множество* $\mathfrak{A}(\infty)$ *компактно в пространстве* H *и инвариантно относительно оператора* S_t^{γ} *для любого неотрицательного значения параметра* γ, *то есть*

$$S_t^{\gamma}\mathfrak{A}(\infty) = \mathfrak{A}(\infty), \quad \forall t \ge 0, \gamma \ge 0. \tag{18}$$

При доказательстве *леммы 1* используются следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия 1.*

Рассмотрим траектории $(u_i(t), v_i(t), u_{it}(t), v_{it}(t))$, $t \in [0,T]$ *динамической системы* (H, S_t^{γ}) *для некоторого неотрицательного значения параметра* γ. *Пусть* $R > 0$ *такое, что*

$$\|u_i(t)\|^2_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega)} + \|v_i(t)\|^2_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega)} + \|u_{it}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|v_{it}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le R, t \in [0,T], \forall i.$$

Тогда для разности $w_i(t) = u_i(t) - v_i(t)$ *выполнено неравенство*

$$\frac{1}{2}\left(\|w_{it}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + a\big(w_i(t), w_i(t)\big) + \sigma\|w_i(t)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right) + \gamma\|w_i(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le \varepsilon + \frac{C(R,\varepsilon)}{t-s} + C(R, t-s, \varepsilon)\sup_{\tau\in[s,t]}\|w_i(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \ s < t, s, t \in [0,T], \forall i, \tag{19}$$

где

$$a(y,z) = \int_{\Omega}\Big(\mu\Delta y\Delta z + (1-\mu)\big(y_{x_1x_1}z_{x_1x_1} + y_{x_2x_2}z_{x_2x_2}\big) + 2(1-\mu)\,y_{x_1x_2}z_{x_1x_2}\Big)d\Omega,$$

константы $\varepsilon > 0, 0 < \delta < 1$, $C(R,\varepsilon), C(R,\mathrm{T},\varepsilon) > 0$ *не зависят от* γ.

Утверждение 2. *Обозначим* $w_{ij}(t)$ *разность* $w_{ij}(t) = (u_i(t) - u_j(t)) + (v_i(t) - v_j(t))$. *Тогда*

$$\frac{1}{2}\left(\|w_{ijt}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + a\big(w_{ij}(t), w_{ij}(t)\big) + \sigma\|w_{ij}(t)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right) \le \tilde{\varepsilon} + \frac{C(R,\tilde{\varepsilon})}{t-s} +$$
$$+C(R, t-s, \tilde{\varepsilon})\Big(lot\big(u_i - u_j\big) + lot\big(v_i - v_j\big) + sot\big(u_i - v_i\big) + sot\big(u_j - v_j\big)\Big), s < t, s, t \in [0,T], \forall i, j, \tag{20}$$

где

$$lot(z) = \sup_{\tau\in[s,t]}\|z(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, 0 < \delta < 1, \quad sot(z) = \sup_{\tau\in[s,t]}\left(\|z(\tau)\|_{H^2(\Omega)} + \|z_t(\tau)\|_{L_2(\Omega)}\right),$$

константы $\tilde{\varepsilon} > 0$, $C(R,\tilde{\varepsilon}), C(R, t-s, \tilde{\varepsilon}) > 0$ *не зависят от* γ.

Условия вида (19), (20) в литературе носят название *стабилизационных неравенств* и пришли в теорию динамических систем из теории управления (смотрите, напр., [17]). С разнообразными применениями стабилизационных неравенств для исследования бесконечномерных динамических систем можно познакомится в работах [12, 13, 18 – 24].

Доказательство леммы 1.

Покажем, что множества $\Omega_N = \left[\bigcup_{\gamma \ge N}\mathfrak{A}^{\gamma}\right]_H$ компактны для любого $N \ge N_0$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такая бесконечная последовательность точек $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4)$, что

$$dist_H\big(a_i, a_j\big) \ge 10\delta', \ \delta' > 0, \ i \ne j.$$

Не теряя общности, мы можем считать, что все точки последовательности принадлежат аттракторам $\mathfrak{A}^{\gamma}$ для различных значений параметра γ, то есть

$$a_i \in \mathfrak{A}^{\gamma_i} : \ \gamma_i \ne \gamma_j, \text{если } i \ne j, \ \gamma_i \to \infty, \text{если } i \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность полных траектории $(u^{\gamma_i}(t), v^{\gamma_i}(t), u_t^{\gamma_i}(t), v_t^{\gamma_i}(t))$, $t \in \mathbb{R}$ из аттракторов $\mathfrak{A}^{\gamma_i}$ таких, что для некоторого $\tilde{T} > 0$, выбор которого мы обоснуем ниже, имеем

$$\left(u^{\gamma_i}\left(\tilde{T}\right), v^{\gamma_i}\left(\tilde{T}\right), u_t^{\gamma_i}\left(\tilde{T}\right), v_t^{\gamma_i}\left(\tilde{T}\right)\right) = a_i.$$

Применим к рассматриваемой последовательности траекторий неравенства (19), (20).

Положим в неравенстве (20) $s = 0,\ t = \tilde{T},\ \tilde{\varepsilon} = \left(\delta'\right)^2/10$, выбирая $\tilde{T}$ настолько большим, чтобы

$$C\left(R,\tilde{\varepsilon}\right)/\tilde{T} \le \left(\delta'\right)^2/10.$$

Функции $u^{\gamma_i}(t), v^{\gamma_i}(t)$ ограничены в пространстве $H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$, а их производные $u_t^{\gamma_i}(t), v_t^{\gamma_i}(t)$ – в пространстве $L_2(\Omega)$, равномерно по $t \in \mathbb{R},\ \gamma \ge 0$. Следовательно, последовательности $\left\{u^{\gamma_i}(t)\right\},\ \left\{v^{\gamma_i}(t)\right\}$ сходятся по норме пространства $C(-\tau, \tau; H^{1+\delta}(\Omega))$ при любых $0 < \delta < 1$. Поэтому можно выбрать такой номер $N_1 > 0$, что

$$C\left(R,\tilde{T},\tilde{\varepsilon}\right)\left(lot\left(u^{\gamma_i} - u^{\gamma_j}\right) + lot\left(v^{\gamma_i} - v^{\gamma_j}\right)\right) \le \left(\delta'\right)^2/10 \text{ при } i,\ j \ge N_1.$$

Используем (19), чтобы оценить слагаемые

$$sot\left(u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\right) = \sup_{\tau\in\left[0,\tilde{T}\right]}\left(\left\|u^{\gamma_i}(\tau) - v^{\gamma_i}(\tau)\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|u_t^{\gamma_i}(\tau) - v_t^{\gamma_i}(\tau)\right\|_{L_2(\Omega)}\right).$$

Пусть в (19) $\varepsilon = (\delta')^2/(60\cdot C(R,\tilde{T},\tilde{\varepsilon})),\ s = 0,\ t = \tilde{T} + T_0$, где T_0 настолько большое, что

$$2\cdot C\left(R,\varepsilon\right)\cdot C\left(R,\tilde{T},\tilde{\varepsilon}\right)/\left(\tilde{T} + T_0\right) = \left(\delta'\right)^2/30.$$

Выберем номер N_2 таким, чтобы

$$2\cdot C\left(R,\tilde{T}+T_0,\varepsilon\right)\cdot C\left(R,\tilde{T},\tilde{\varepsilon}\right)\cdot \sup_{t\in\left[0,\tilde{T}+T_0\right]}\left\|u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\right\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \le \left(\delta'\right)^2/30 \text{ при } i \ge N_2.$$

Отметим, что такой выбор возможен ввиду (6). Переходя в обеих частях (19) к супремуму по $t \in \left[0,\tilde{T}+T_0\right]$, при данном выборе параметров имеем

$$sot\left(u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\right) \le \varepsilon + \frac{C\left(R,\varepsilon\right)}{\tilde{T}+T_0} + C\left(R,\tilde{T}+T_0,\varepsilon\right)\sup_{t\in\left[0,\tilde{T}+T_0\right]}\left\|u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\right\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \le \frac{\delta'}{10\cdot C\left(R,\tilde{T},\tilde{\varepsilon}\right)}. \tag{21}$$

Используя полученные неравенства в (20), приходим к оценке

$$\left\|w_{ijt}\left(\tilde{T}\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + a\left(w_{ij}\left(\tilde{T}\right), w_{ij}\left(\tilde{T}\right)\right) + \sigma\left\|w_{ij}\left(\tilde{T}\right)\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \le {\left(\delta'\right)^2}/{4},$$

где $w_{ij} = (u^{\gamma_i} - u^{\gamma_j}) + (v^{\gamma_i} - v^{\gamma_j}),\ i,\ j \ge N_0 = \max\left\{N_1, N_2\right\}$, откуда

$$\left\|\left(a_i^1 - a_j^1\right) + \left(a_i^2 - a_j^2\right)\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|\left(a_i^3 - a_j^3\right) + \left(a_i^4 - a_j^4\right)\right\|_{L_2(\Omega)} \le {\delta'}/{2}.$$

Из соотношения (21) также следует, что

$$\left\|u^{\gamma_i}(t) - v^{\gamma_i}(t)\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|u_t^{\gamma_i}(t) - v_t^{\gamma_i}(t)\right\|_{L_2(\Omega)} \le {\delta'}/{5},\quad t \in \left[0,\tilde{T}+T_0\right], i \ge N_0.$$

Оценить расстояния между точками a_i, a_j для достаточно больших номеров i, j ($i,\ j \ge N_0$):

$$dist_H\left(a_i, a_j\right) = \left\|a_i^1 - a_j^1\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|a_i^2 - a_j^2\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|a_i^3 - a_j^3\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|a_i^4 - a_j^4\right\|_{L_2(\Omega)} \le \left\|\left(a_i^1 - a_j^1\right) + \left(a_i^2 - a_j^2\right)\right\|_{H^2(\Omega)} +$$

$$+\left\|a_i^1 - a_i^2\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|a_j^1 - a_j^2\right\|_{H^2(\Omega)} + \left\|\left(a_i^3 - a_j^3\right) + \left(a_i^4 - a_j^4\right)\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|a_i^3 + a_i^4\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|a_j^3 + a_j^4\right\|_{L_2(\Omega)} \le \delta',$$

что противоречит исходному предположению. Следовательно, множества Ω_N компактны для любого $N \ge N_0$, и верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ компактен в H как пересечение замкнутых компактных в H множеств.

Покажем теперь, что множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ. Поскольку $\mathfrak{A}(\infty)$ лежит на диагонали пространства H, где операторы $S_t^\gamma,\ \gamma \ge 0$ совпадают с оператором S_t, нам достаточно установить, что множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно S_t.

Покажем сначала, что имеет место включение

$$S_t\mathfrak{A}\left(\infty\right) \subset \mathfrak{A}\left(\infty\right),\ \forall t \ge 0. \tag{22}$$

Предположим, (22) не выполняется и существуют такие точка $a \in \mathfrak{A}(\infty)$ и $t_0 > 0$, что $S_{t_0}a \notin \mathfrak{A}(\infty)$. Точка a не может принадлежать аттрактору $\mathfrak{A}^\gamma$ ни при каком значении параметра $\gamma \ge 0$, следовательно, она является предельной точкой некоторой последовательности $\left\{a^\gamma\right\}_{\gamma\to\infty},\ a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$. Так как аттракторы $\mathfrak{A}^\gamma$ инвариантны относительно соответствующего эволюционного оператора S_t^γ, имеем $S_{t_0}^\gamma a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$. По доказанному выше множество Ω_N компактно в H при некотором $N \ge N_0$, следовательно, последовательность $\left\{S_{t_0}^\gamma a^\gamma\right\} \subset \left[\bigcup_{\gamma \ge N} \mathfrak{A}^\gamma\right]_H$ содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\left\{S_{t_0}^{\gamma'} a^{\gamma'}\right\}_{\gamma' \ge N},\ S_{t_0}^{\gamma'} a^{\gamma'} \to \tilde{a} \in \mathfrak{A}(\infty) \text{ при } \gamma' \to \infty.$$

Покажем, что $\tilde{a} = S_{t_0} a$. Рассуждение проведем методом от противного. Предположим, что $\tilde{a} \ne S_{t_0} a$, то есть

$$dist_H\left(\tilde{a}, S_{t_0} a\right) = \theta > 0. \tag{23}$$

Рассмотрим последовательность полных траекторий $(u^{\gamma'}(t), v^{\gamma'}(t), u_t^{\gamma'}(t), v_t^{\gamma'}(t)) \subset \mathfrak{A}^{\gamma'}$, $t \in \mathbb{R}$, таких, что $(u^{\gamma'}(T), v^{\gamma'}(T), u_t^{\gamma'}(T), v_t^{\gamma'}(T)) = a^{\gamma'}$ для некоторого $T > 0$, значение которого будет выбрано ниже, а также траекторию $(z(t), z(t), z_t(t), z_t(t)) \subset diagH$, $t \ge 0$, такую что $(z(T), z(T), z_t(T), z_t(T)) = a.$ Данные траектории ограничены в пространстве H равномерно по t и $\gamma' \ge 0$:

$$\left\|u^{\gamma'}(t)\right\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \left\|v^{\gamma'}(t)\right\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \left\|u_t^{\gamma'}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\|v_t^{\gamma'}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le R,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \gamma' \ge 0.$$

Рассуждая как при доказательстве первого утверждения *теоремы 3* в [16], мы можем получить следующую оценку

$$E_w(t) \le E_w(s) e^{C_1(R)(t-s)},\ 0 \le s < t \tag{24}$$

для функционала

$$E_w(t) == \frac{1}{2}\left(\|w_{1t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w_{2t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_1, w_1) + a(w_2, w_2) + \sigma\|w_1\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \sigma\|w_2\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right) + + \frac{\gamma'}{2}\left\|u^{\gamma'} - v^{\gamma'}\right\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$w_1 = u^{\gamma'} - z,\ w_2 = v^{\gamma'} - z.$$

Положим теперь в (24) $s = T$, $t = t_0 + T$, выбирая T настолько большим, чтобы слагаемое $C(R,\varepsilon)/T$ при $\varepsilon = 0.1 \cdot \theta \exp(-C_1(R) t_0)$ в (19) не превосходило ε. Далее, ввиду (6), мы можем выбрать γ' такими, что компактный член $\sup_{\tau \in [T, t_0+T]} \left\|u^{\gamma'}(\tau) - v^{\gamma'}(\tau)\right\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}^2$ в (19) не превосходит ε. Тогда из (19) при указанном выборе значений T и γ' получаем

$$\gamma'\left\|u^{\gamma'}(T) - v^{\gamma'}(T)\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le 0.3 \cdot \theta \exp\left(-C_1(R) t_0\right).$$

Далее, поскольку точка a – предельная точка последовательности $\left\{a^{\gamma'}\right\}$ при $\gamma' \to \infty$, мы можем выбрать γ' настолько большими, что сумма первых шести слагаемых $E_w(T)$ будут меньше ε. Тогда из (24) следует $E_w(t_0 + T) < \theta$, что противоречит (23). Полученное противоречие означает справедливость включения (22).

Обратное включение $S_t \mathfrak{A}(\infty) \supset \mathfrak{A}(\infty), \forall t \ge 0$ доказывается аналогично.

Лемма 1 доказана полностью. Докажем теперь первое утверждение *теоремы 1*, а именно, установим равенство $\mathfrak{A}(\infty) = \mathfrak{A}$, где множество $\mathfrak{A}$ определено соотношением (16).

Верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ – ограниченное множество в пространстве $diagH$ по норме пространства H, следовательно, притягивается к аттрактору $\mathfrak{A}$ при $t \to \infty$. Кроме того, множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно оператора S_t, и мы можем записать

$$0 = \lim_{t \to \infty} \sup\left\{dist_H\left(S_t a, \mathfrak{A}\right), a \in \mathfrak{A}(\infty)\right\} = \sup\left\{dist_H\left(a, \mathfrak{A}\right), a \in \mathfrak{A}(\infty)\right\}.$$

Поскольку оба множества $\mathfrak{A}(\infty)$ и $\mathfrak{A}$ компактны в H, последнее соотношение означает включение $\mathfrak{A}(\infty) \subset \mathfrak{A}$. Обратное включение также выполнено (смотрите (17)), следовательно, множества $\mathfrak{A}(\infty)$ и $\mathfrak{A}$ совпадают.

Перейдем к доказательству второго утверждения *теоремы 1*. Оно следует из леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1 и неравенство (9). Тогда траектории динамической системы* (H, S_t^γ), *исходящие из ограниченного в* H *множества* $\mathfrak{B}$, *сходятся равномерно к диагонали фазового пространства* $diagH$, *а именно, существуют такие положительные числа* $\gamma_0 > 0$, $\delta > 0$, $t_0 = t_0(\mathfrak{B}) > 0$, *что для любой траектории* $S_t^\gamma(u^0, v^0, u^1, v^1) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ *с начальными данными* (u^0, v^0, u^1, v^1) *из* $\mathfrak{B}$ *выполнено неравенство (10) при* $t \ge t_0$, $\gamma \ge \gamma_0$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$, где $u(t), v(t)$ – слабое решение задачи (1) – (5). Очевидно, функция $w(x,t)$ является слабым решением следующей начально-краевой задачи:

$$w_{tt}+\left(B(u_t)-B(v_t)\right)+\Delta^2 w+\left(Q-\beta\int_\Omega|\nabla u|^2\,d\Omega\right)\Delta w+\beta\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\int_\Omega|\nabla v|^2\,d\Omega\right)d\Omega\Delta v+2\gamma w=0,\ x\in\Omega,\ t>0, \quad (25)$$

$$w\,|_{t=0}=w^0=u^0-v^0,\ w_t\,|_{t=0}=w^1=u^1-v^1,\ w=\partial_\nu w=0,\ x\in\Gamma_0,\ \Delta w+(1-\mu)\Sigma_1 w=0,\ x\in\Gamma_1,$$

$$\partial_\nu\Delta w+(1-\mu)\Sigma_2 w=d(x)\left(g(u_t)-g(v_t)\right)+\sigma w-\left(Q-\beta\int_\Omega|\nabla u|^2\,d\Omega\right)\partial_\nu w-\beta\int\left(|\nabla u|^2-|\nabla v|^2\right)d\Omega\partial_\nu v,\ x\in\Gamma_1.$$

Для функционала $V(t)$, определяемого соотношением:

$$V(t)=\frac{1}{2}\left(\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}+a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+2\gamma\|w\|^2_{L_2(\Omega)}\right)+\frac{1}{2}\left(Q-\beta\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}+\eta\int_\Omega w_t w\,d\Omega,\quad \eta>0,$$

докажем неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t)+\delta V(t)\le 0,\quad \delta>0,\ \text{при}\ t\ge t_0,\ \gamma\ge\gamma_0. \quad (26)$$

Отметим сначала, что в силу интерполяционного неравенства:

$$\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}\le C_1\varepsilon\left(a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right)+C(\varepsilon)\|w\|^2_{L_2(\Omega)},$$

функционал $V(t)$ удовлетворяет следующим оценкам:

$$\frac{1}{4}\left(\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}+a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+2\gamma\|w\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\le V(t)\le\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}+a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+2\gamma\|w\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Поочередно умножая уравнение (25) на w_t и w и интегрируя полученные равенства по Ω, получаем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}+a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+2\gamma\|w\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{1}{2}\left(Q-\beta\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\le$$

$$\le\eta_1\left(\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right)+C(\mathfrak{B},\eta_1)\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}-\int_\Omega\left(B(u_t)-B(v_t)\right)w_t\,d\Omega-\int_{\Gamma_1}d(x)\left(g(u_t)-g(v_t)\right)w_t\,d\Gamma,$$

и

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w\,d\Omega\le\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}-\left(a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+2\gamma\|w\|^2_{L_2(\Omega)}\right)+$$

$$+C_1\left(\int_\Omega\left(B(u_t)-B(v_t)\right)w_t\,d\Omega+\int_{\Gamma_1}d(x)\left(g(u_t)-g(v_t)\right)w_t\,d\Gamma\right)+C(\mathfrak{B})\|w\|^2_{H^{1+\theta}(\Omega)}$$

при некотором θ: $0<\theta<1$. В силу условий *леммы 2*, можем оценить нормы $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_1)$ функции w, используя, операторы внутреннего и граничного демпфирования:

$$\|w_t\|^2_{L_2(\Omega)}\le C\cdot\int_\Omega\left(B(u_t)-B(v_t)\right)w_t\,d\Omega,\quad \|w_t\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\le\int_{\Gamma_1}d(x)\left(g(u_t)-g(v_t)\right)w_t\,d\Gamma.$$

Применяя интерполяционное неравенство, можем записать оценку для $H^{1+\theta}(\Omega)$ – нормы w:

$$\|w\|^2_{H^{1+\theta}(\Omega)}\le\eta_2\left(a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right)+C(\eta_2)\cdot\|w\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Полученные неравенства дают нам возможность записать следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt}V(t)+\delta V(t)\le-\left(\eta-\delta-\eta_2 C(\mathfrak{B},\eta_1)+\eta\eta_2 C(\mathfrak{B})\right)\left(a(w,w)+\sigma\|w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right)-$$

$$-\left(1-\eta C_1-\eta_1 C_2\right)\left(\int_\Omega\left(B(u_t)-B(v_t)\right)w_t\,d\Omega+\int_{\Gamma_1}d(x)\left(g(u_t)-g(v_t)\right)w_t\,d\Gamma\right)-\left((\eta-\delta)2\gamma-(1+\eta)C(\mathfrak{B},\eta_1,\eta_2)\right)\|w\|^2_{L_2(\Omega)},$$

откуда при $\delta,\eta,\eta_1,\eta_2>0$ достаточно малых и γ достаточно больших, следует (26).

Применяя *лемму Гронуолла* к (26), получаем (10).

Лемма 2 доказана, и мы можем переходить к завершению доказательства *теоремы 1*.

Из утверждения *леммы 2* следует, что аттрактор $\mathfrak{A}^\gamma$ лежит на диагонали фазового пространства при достаточно больших значениях параметра γ:

$$\mathfrak{A}^\gamma\subset diagH,\ \gamma\ge\gamma_0>0,$$

что в силу (17) означает искомое равенство двух множеств:

$$\mathfrak{A}^\gamma=\mathfrak{A},\ \gamma\ge\gamma_0.$$

Выводы. Рассмотрена система связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Исследована зависимость структуры глобального аттрактора $\mathfrak{A}^{\gamma}$ системы от параметра γ, пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. Описана структура верхнего предела аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ при $\gamma \to \infty$. Установлено явление асимптотической (при $t \to \infty$) синхронизации системы для конечных значений параметра связи γ при дополнительных условиях на функции задачи (1) – (4).

Список литературы: 1. *Pikovsky A.*, *Rosenblum M.*, *Kurths J.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 432 p. **2.** *Strogatz S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. – New York: Hyperion Press, 2003. 338 p. **3.** *Afraimovich V.S.*, *Rodrigues H.M.* Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations // International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995). – N. J. World Scintific Publishing, River Edge, 1998. – 3 – 17. **4.** *Rodrigues H.M.* Abstract methods for synchronization and applications // Appl. Anal. –1996. – № 62. – 263 – 296. **5.** *Caraballo T.*, *Kloeden P.E.* The persistence of synchronization under environmental noise // Proc. Roy. Soc. London A. – 2005. – № 461. – 2257 – 2267. **6.** *Kloeden P.E.* Synchronization of nonautonomous dynamical systems // Elect. J. Diff. Eqns. – 2003. Vol. 2003. No. 39. – 1 – 10. **7.** *Carvalho A.N.*, *Rodrigues H.M.*, *Doltko T.* Upper semicontinuity of attractors and synchronization // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – № 220. – 13 – 41. **8.** *Rekalo A.M.*, *Chueshov I.D.* Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain // Sb. Math. – 2004. – № 195 – 97 – 119. **9.** *Chueshov I.* Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems // Applicable Analysis. – 2007. – V. 86, № 3. – 269 – 286. **10.** *Naboka O.* Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates // Nonlinear Analysis – 2007. – № 67. – 1015 – 1026. **11.** *Naboka O.* Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – № 341. – 1107 – 1124. **12.** *Naboka O.* On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping // CPAA – 2009. –Vol. 8, № 6 – 1933 – 1956. **13.** *Naboka O.* On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains // Nonlinear Analysis. – 2009. – № 71. – 6299 – 6311. **14.** *Berger M.* A new approach to the large deflection of plate // J. Appl. Mech. – 1955. – № 22. – 465 – 472. **15.** *Kapitansky L.V.*, *Kostin I.N.* Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations // Leningrad Math. J. – 1991. – № 2. – 97 – 117. **16.** *Набока Е.А.* Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1 // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологиях. – № 18 (1127). – 2015. – С. 98 – 108. **17.** *Lasiecka I.*, *Triggiani R.* Control theory of partial differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press. 2000. **18.** *Bucci F.*, *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate equation // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2007. – № 6. – 113 – 140. **19.** *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping // Memoirs AMS. – 2008. – Vol. 195, № 912. – 1 – 183. **20.** *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation // J. Diff. Eq. – 2004. – №198. – 196 – 231. **21.** *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Attractors of second order evolution equations with a nonlinear damping // J. Diff. Eq. – 2004. – №16. – 469 – 512. **22.** *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping // J. of Diff. Eq. – 2007. – № 233. – 42 – 86. **23.** *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Long time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior-boundary damping and source of critical exponents // AMS Contemporary Mathematics. – 2007. – №426. – 153 – 193. **24.** *Chueshov I.*, *Lasiecka I.* Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics. – Springer, 2010. 766 p.

Bibliography (transliterated): 1. Pikovsky, A., M. Rosenblum and J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in nonlinear science*. Cambridge University Press, 2001. Print. **2.** Strogatz, S. *Sync: The emerging science of spontaneous order.* New York: Hyperion Press, 2003. Print. **3.** Afraimovich, V. S., and H. M. Rodrigues. "Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations." *International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995).* World Scientific Publishing. River Edge, N. J. 1998. 3–17. Print. **4.** Rodrigues, H. M. "Abstract methods for synchronization and applications." *Appl. Anal.* No. 62. 1996. 263–296. Print. **5.** Caraballo, T., and P. E. Kloeden. "The persistence of synchronization under environmental noise." *Proc. Roy. Soc. London A.* No. 461. 2005. 2257–2267. Print. **6.** Kloeden, P. E. "Synchronization of nonautonomous dynamical systems." *Elect. J. Diff. Eqns.* Vol. 2003. No. 39. 2003. 1–10. Print. **7.** Carvalho, A. N., H. M. Rodrigues and T. Doltko. "Upper semicontinuity of attractors and synchronization." *J. Math. Anal. Appl.* No. 220. 1998. 13–41. Print. **8.** Rekalo, A. M., and I. D. Chueshov. "Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain." *Sb. Math.* No. 195. 2004. 97–119. Print. **9.** Chueshov, I. "Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems" *Applicable Analysis.* Vol. 86. No. 3. 2007. 269–286. Print. **10.** Naboka, O. "Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates." *Nonlinear Analysis.* No. 67. 2007. 1015–1026. Print. **11.** Naboka, O. "Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates." *J. Math. Anal. Appl.* No. 341. 2008. 1107–1124. Print. **12.** Naboka, O. "On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping." *CPAA.* Vol. 8. No. 6. 2009. 1933–1956. Print. **13.** Naboka, O. "On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains." *Nonlinear Analysis*. No. 71. 2009. 6299–6311. Print. **14.** Berger, M. "A new approach to the large deflection of plate." *J. Appl. Mech*. No. 22. 1955. 465–472. Print. **15.** Kapitansky, L. V., and I. N. Kostin. "Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations." *Leningrad Math. J.* No. 2. 1991. 97–117. Print. **16.** Naboka, E. A."Sinhronizacija kolebanij dvuh svjazannyh plastin Bergera s nelinejnym vnutren-nim i granichnym dempfirovaniem. Chast' 1." *Visnyk NTU «KhPI». Ser.: Matematychne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 98–108. Print. **17.** Lasiecka, I., and R. Triggiani. *Control theory of partial differential equations.* Cambridge University Press. 2000. Print. **18.** Bucci, F., I. Chueshov and I. Lasiecka. "Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate equation." *Communications on Pure and Applied Analysis.* No. 6. 2007. 113–140. Print. **19.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping." *Memoirs AMS.* Vol. 195. No. 912. 2008. 1–183. Print. **20.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation." *J. Diff. Eq.* No. 198. 2004. 196–231. Print. **21.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Attractors of second order evolution equations with a nonlinear damping." *J. Diff. Eq.* No. 16. 2004. 469–512. Print. **22.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping." *J. of Diff. Eq*. No. 233. 2007. 42–86. Print. **23.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Long time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior-boundary damping and source of critical exponents." *AMS Contemporary Mathematics.* No. 426. 2007. 153–193. Print. **24.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics*. Springer, 2010. Print.

Поступила (received) 08.09.2015

Набока Олена Олексіївна – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

Набока Елена Алексеевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

Naboka Helena Alekseevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»; tel.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.