freight train // J. Phys., Conf. Ser. – Jan. 2011. – № 1. – P. 012 – 024. **4.** *Schobel A.*, *Karner J*. Betrieb und Verkehr - Optimierungspotenziale bei der Stationierung von Heisslauferortungsanlagen // Eisenbahntechnische Rundshau ETR. – 2005. – №12. – P. 805 – 808. **5.** *Reason J.*, *Chen H*., *Crepaldi R*., *Duri S*. Intelligent Telemetry for Freight Trains // Mobile Computing, Applications, Services. – 2010. – Vol. 35. – P. 72 – 91. **6.** *Мартынов И.Э.*, *Петухов В.М*. Натурные испытания встроенной системы контроля технического состояния буксовых узлов // Мир транспорта. – 2013. – № 2. – С. 180 – 182. **7.** *Мартинов І.Е*. Результати температурних випробувань дослідних буксових вузлів вантажних вагонів // Восточно–Европейский журнал передовых технологий. – 2004. – № 7 (1). – С. 66 – 69. **8.** *Siyuan Ai*, *Wenzhong Wang*, *Yunlong Wang*, *Ziqiang Zhao* Temperature rise of double-row tapered roller bearings analyzed with the thermal network method // Tribology International. – July 2015. – Vol. 87. – P. 11 – 22. **9.** *Ke Yan*, *et al*. Theoretical and experimental investigation on the thermal characteristics of double-row tapered roller bearings of high speed locomotive // International Journal of Heat and Mass Transfer. – May 2015. – Vol. 84. – P. 1119 – 1130. **10.** *Миронов А.А.*, *Образцов В.Л*., *Павлюков А.Э*. Контролепригодность подвижного состава к тепловой бесконтактной диагностике // Автоматика, связь, информатика. – 2006. – № 11. – С. 54 – 57. **11.** *Панкратов Л.В.*, *Чистяков* С.Н. Мониторинг нагрева букс // Автоматика, связь, информатика. – 2008. – №6. – С. 23 – 24. **12.** *Биргер И.А*. Техническая диагоностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.

Bibliography (transliterated): 1. Fomin, O.V. "Pidvyshhennja stupenja ideal'nosti vantazhnyh vagoniv ta prognozuvannja stadij i'h evoljucii'." *Naukovyj visnyk Nacional'nogo girnychogo universytetu*. Dnepropetrovsk: NGU. No. 3. 2015. 68–76. Print. **2.** Hodge, V., et al. "Wireless Sensor Networks for Condition Monitoring in the Railway Industry: A Survey." *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. Vol. 16. No. 3 (06). 2015. 1088–1106. Print. **3.** Nan, W., et al. "Research on linear wireless sensor networks used for online monitoring of rolling bearing in freight train." *J. Phys., Conf. Ser*. No. 1. 2011. 012–024. Print **4.** Schobel, A., and J. Karner. "Betrieb und Verkehr - Optimierungspotenziale bei der Stationierung von Heisslauferortungsanlagen". *Eisenbahntechnische Rundshau ETR*. No. 12. 2005. 805 – 808. Print. **5.** Reason, J., et al. "Intelligent Telemetry for Freight Trains." *Mobile Computing, Applications, Services*. Vol. 35. 2010. 72–91. Print. **6.** Martynov, I. Je., and V. M. Petuhov. "Naturnye ispytanija vstroennoj sistemy kontrolja tehnicheskogo sostojanija buksovyh uzlov." *Mir transporta*. No. 2. 2013. 180–182. Print. **7.** Martynov, I. E. "Rezul'taty temperaturnyh vyprobuvan' doslidnyh buksovyh vuzliv vantazhnyh vagoniv." *Vostochno–Evropejskyj zhurnal peredovyh tehnologyj*. No. 7 (1). 2004. 66–69. Print. **8**. Siyuan, Ai. et al. "Temperature rise of double-row tapered roller bearings analyzed with the thermal network method". *Tribology International*. Vol. 87. 2015. 11–22. Print. **9**. Ke, Yan et al. "Theoretical and experimental investigation on the thermal characteristics of double-row tapered roller bearings of high speed locomotive." *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 84. 2015. 1119–1130. Print. **10.** Mironov, A. A., V. L.Obrazcov and A. Je. Pavljukov. "Kontroleprigodnost' podvizhnogo sostava k teplovoj beskontaktnoj diagnostike." *Avtomatika, svjaz', informatika.* No. 11. 2006. 54–57. Print. **11.** Pankratov, L. V., and S. N. Chistjakov. "Monitoring nagreva buks." *Avtomatika*, *svjaz'*, *informatika*. No. 6. 2008. 23–24. Print. **12.** Birger, I. A. *Tehnicheskaja diagonostika*. Moscow: Mashinostroenie, 1978. Print.

Поступила (received) 30.10.2015

Петухов Вадим Михайлович – кандидат технічних наук, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків; тел.: (057) 730-10-35; e-mail: hiitwagon@mail.ru.

Петухов Вадим Михайлович – кандидат технических наук, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, г. Харьков; тел.: (057) 730-10-35; e-mail: hiitwagon@mail.ru.

Petukhov Vadim Mykhaylovych – Candidate of Engineering Sciences, Ukrainian State University of Railway Transport, tel.: (057) 730-10-35; e-mail: hiitwagon@mail.ru.

УДК 629.7.05

Ю. А. ПЛАКСІЙ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРЬОХЧАСТОТНОЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ КВАТЕРНІОННОЇ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА. ПЕРШИЙ ТИП МОДЕЛІ

Запропонована нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на трьохчастотному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одномоментно змінюються у часі згідно лінійного закону. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонентів кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделі. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі для параметрів орієнтації. Показано, що нова модель описує обертання твердого тіла, що різниться від випадку регулярної прецесії. Модель може бути застосована в якості еталонної для отримання оцінок похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

Вступ і постановка задачі. Аналіз похибок розрахункових алгоритмів, що застосовуються в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС), є важливим етапом проектування програмного забезпечення таких систем [1]. Для цього використовуються *еталонні моделі* обертання твердого тіла, які встановлюють певний зв'язок між кватерніоном орієнтації і первинною інформацією про обертання твердого тіла на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$, що надходить з виходів вимірювачів кутової швидкості у вигляді *квазікоординат* [2]:

$$\theta^*_{ni} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

де ω_i, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}$ на осі зв'язаної системи координат.

У випадку застосування аналітичних (*неперервних*) еталонних моделей забезпечується точний зв'язок між квазікоординатами (1) і кватерніоном орієнтації моделі, бо в цьому випадку результати моделювання не містять

© Ю. А. Плаксій, 2015

похибок від чисельного інтегрування, як це має місце у випадку *дискретних еталонних моделей* [3]. У якості аналітичних еталонних моделей на практиці зазвичай використовують випадки точних розв'язків в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (моделі *конічного руху* [4] та *регулярної прецесії* [5]). Оскільки реальний рух об'єкта, як правило, не відповідає випадку прецесії, то розширення класу неперервних еталонних моделей є актуальною задачею точносного аналізу алгоритмів при проектуванні систем безплатформеної орієнтації.

Неперервна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятим в ній представленням кватерніона орієнтації $\Lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$. Щоб забезпечити виконання умови нормування кватерніона $\|\Lambda(t)\| = 1$, його компоненти представляються у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій (косинусів і синусів) відповідних кутів. Проекції вектора кутової швидкості обертального руху, яким відповідає кватерніон орієнтації $\Lambda(t)$, знайдуться з оберненого кінематичного рівняння [2]:

$$\omega_1 = 2(\dot\lambda_1\lambda_0 - \dot\lambda_0\lambda_1 + \lambda_3\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_3)\,;\ \omega_2 = 2(\dot\lambda_2\lambda_0 - \dot\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_1)\,;$$
$$\omega_3 = 2(\dot\lambda_3\lambda_0 - \dot\lambda_0\lambda_3 + \lambda_2\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_2)\,. \qquad (2)$$

Для моделювання квазікоординат (1) застосовується формула:

$$\theta^*_{ni} = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1})\,,\ i = 1, 2, 3\,, \qquad (3)$$

де $\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t)dt$, $\theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t)dt$, $i = 1, 2, 3$ – компоненти вектора *позірного повороту* $\vec\theta(t) = \int_0^t \vec\omega(t)dt$, обчислені в моменти часу t_n і t_{n-1} відповідно.

В даній роботі пропонується нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на узагальненні тригонометричної кінематичної моделі, яка представлена в [6].

Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі. В роботі [6] запропоновано представлення кінематичної частини еталонної моделі обертання твердого тіла у вигляді суперпозиції синусів і косинусів кутів, що лінійно змінюються у часі:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t) - \xi\sin(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t)\,;\ \lambda_1(t) = \eta\cdot\sin(k_1 t)\cdot\cos(k_3 t)\,;$$
$$\lambda_2(t) = \eta\cdot\sin(k_1 t)\cdot\sin(k_3 t)\,;\ \lambda_3(t) = \cos(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t) + \xi\sin(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\,, \qquad (4)$$

де на параметри η і ξ накладається обмеження: $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Спираючись на представлення (4), запишемо компоненти кватерніона орієнтації узагальненої моделі в двох наступних виглядах:

а) $\lambda_0(t) = \cos\psi(t)\cdot\cos\phi(t) - \cos\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;\ \lambda_{j1}(t) = \sin\vartheta(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;$

$\lambda_{j2}(t) = \sin\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;\ \lambda_{j3}(t) = \sin\psi(t)\cdot\cos\phi(t) + \cos\vartheta(t)\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;$ (5)

б) $\lambda_0(t) = \cos\psi(t)\cdot\cos\phi(t) - \sin\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;\ \lambda_{j1}(t) = \cos\vartheta(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;$

$\lambda_{j2}(t) = \cos\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;\ \lambda_{j3}(t) = \sin\psi(t)\cdot\cos\phi(t) + \sin\vartheta(t)\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,,$ (6)

де індекси $j1,\ j2,\ j3$ компонент векторної частини кватерніона $\Lambda(t) = (\lambda_0, \vec\lambda)^T$ утворюють одну з можливих перестановок чисел $(1, 2, 3)$.

Кожне з представлень (5) і (6) із всіма можливими перестановками індексів $j1,\ j2,\ j3$ породжує по 6 різних моделей обертання, які у відповідності до типу перестановок можна поділити на дві групи однотипних моделей. Першу групу однотипних моделей утворюють моделі з перестановками індексів $j1,\ j2,\ j3$, що мають парну кількість інверсій відносно основної перестановки $(1, 2, 3)$, другу групу – ті, що мають непарну кількість інверсій. Таким чином кожне з представлень (5) і (6) дає по дві групи однотипних моделей.

Розглянемо випадок кінематичної моделі (5), коли індекси $j1,\ j2,\ j3$ компонент векторної частини кватерніона утворюють основну перестановку $(1, 2, 3)$. Тоді компоненти кватерніона орієнтації моделі приймають вигляд:

$$\lambda_0(t) = \cos\psi(t)\cdot\cos\phi(t) - \cos\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;\ \lambda_1(t) = \sin\vartheta(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;$$
$$\lambda_2(t) = \sin\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,;\ \lambda_3(t) = \sin\psi(t)\cdot\cos\phi(t) + \cos\vartheta(t)\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,. \qquad (7)$$

Для цього представлення кватерніона орієнтації у відповідності до формул (2) отримаємо, що проекції вектора абсолютної кутової швидкості на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\omega_1(t) = \frac{1}{2}\dot\vartheta(t)\sin(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \frac{1}{2}\dot\vartheta(t)\sin(2\phi(t) - \vartheta(t)) + \dot\psi(t)\sin 2\vartheta(t) -$$
$$-\frac{1}{2}\dot\psi(t)\sin(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) - \frac{1}{2}\dot\psi(t)\sin(2\vartheta(t) - 2\phi(t)) + 2\dot\phi(t)\sin\vartheta(t)\,;$$

$$\omega_2(t) = -\dot{\vartheta}(t) + \dot{\upsilon}(t)\cos 2\phi(t) + \dot{\psi}(t)\cos(\upsilon(t) - 2\phi(t)) - \dot{\psi}(t)\cos(\upsilon(t) + 2\phi(t)) ;$$

$$\omega_3(t) = -\frac{1}{2}\dot{\upsilon}(t)\cos(2\phi(t) - \vartheta(t)) + \frac{1}{2}\dot{\upsilon}(t)\cos(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t)\cos 2\phi(t) +$$

$$+\dot{\psi}(t) + \dot{\psi}(t)\cos 2\vartheta(t) - \frac{1}{2}\dot{\psi}(t)\cos(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t)\cos\vartheta(t) - \frac{1}{2}\dot{\psi}(t)\cos(2\vartheta(t) - 2\phi(t)) . \quad (8)$$

Припустимо, що залежність кутів $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ від часу лінійна, тобто:

$$\vartheta(t) = k_1 t , \ \psi(t) = k_2 t , \ \phi(t) = k_3 t . \quad (9)$$

Для цього випадку *трьохчастотної моделі* компоненти кватерніона орієнтації (7) набувають вигляду:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_2 t)\cdot\cos(k_3 t) - \cos(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t) ; \ \lambda_1(t) = \sin(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t) ;$$

$$\lambda_2(t) = \sin(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t) ; \ \lambda_3(t) = \sin(k_2 t)\cdot\cos(k_3 t) + \cos(k_1 t)\cos(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t) , \quad (10)$$

а проекції вектора кутової швидкості згідно з (8) задаються формулами:

$$\omega_1(t) = \frac{1}{2}k_1\sin(2k_3 + k_1)t + \frac{1}{2}k_1\sin(2k_3 - k_1)t + k_2\sin 2k_1 t - \frac{1}{2}k_2\sin(2k_1 + 2k_3)t - \frac{1}{2}k_2\sin(2k_1 - 2k_3)t + 2k_3\sin k_1 t ;$$

$$\omega_2(t) = -k_1 + k_1\cos 2k_3 t + k_2\cos(k_1 - 2k_3)t - k_2\cos(k_1 + 2k_3)t ;$$

$$\omega_3(t) = -\frac{1}{2}k_1\cos(2k_3 - k_1)t + \frac{1}{2}k_1\cos(2k_3 + k_1)t + k_2\cos 2k_3 t + k_2 + k_2\cos 2k_1 t -$$

$$-\frac{1}{2}k_2\cos(2k_1 + 2k_3)t - \frac{1}{2}k_2\cos(2k_1 - 2k_3)t + 2k_3\cos k_1 t . \quad (11)$$

Для отримання компонент вектора позірного повороту $\bar{\theta}(t)$ проінтегруємо вирази для $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на інтервалі $[0, t]$, в результаті чого будемо мати:

$$\theta_1(t) = -\frac{k_1}{2(2k_3 + k_1)}(\cos(2k_3 + k_1)t - 1) - \frac{k_1}{2(2k_3 - k_1)}(\cos(2k_3 - k_1)t - 1) -$$

$$-\frac{k_2}{2k_1}(\cos 2k_1 t - 1) + \frac{k_2}{2(2k_1 + 2k_3)}(\cos(2k_1 + 2k_3)t - 1) - \frac{2k_3}{k_1}(\cos k_1 t - 1) + \frac{k_2}{2(2k_1 - 2k_3)}(\cos(2k_1 - 2k_3)t - 1) ;$$

$$\theta_2(t) = -k_1 t + \frac{k_1}{2k_3}\sin 2k_3 t + \frac{k_2}{k_1 - 2k_3}\sin(k_1 - 2k_3)t - \frac{k_2}{k_1 + 2k_3}\sin(k_1 + 2k_3)t ;$$

$$\theta_3(t) = -\frac{k_1}{2(k_1 - 2k_3)}\sin(k_1 - 2k_3)t + \frac{k_1}{2(2k_3 + k_1)}\sin(2k_3 + k_1)t + k_2 t + \frac{k_2}{2k_3}\sin 2k_3 t + \frac{k_2}{2k_1}\sin 2k_1 t -$$

$$-\frac{k_2}{2(2k_1 + 2k_3)}\sin(2k_1 + 2k_3)t - \frac{k_2}{2(2k_1 - 2k_3)}\sin(2k_1 - 2k_3)t + \frac{2k_3}{k_1}\sin k_1 t . \quad (12)$$

Відтворення квазікоординат (1) в еталонній моделі відбувається в аналітичному вигляді за формулою (3) з використанням формул (12).

Далі розглянемо другий випадок кінематичного представлення модельного кватерніона у вигляді (6), а саме, коли індекси $j1$, $j2$, $j3$ компонент його векторної частини утворюють основну перестановку (1, 2, 3). За цих умов кватерніон орієнтації моделі задається своїми компонентами у вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos\psi(t)\cdot\cos\phi(t) - \sin\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t) ; \ \lambda_1(t) = \cos\vartheta(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t) ;$$

$$\lambda_2(t) = \cos\vartheta(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t) ; \ \lambda_3(t) = \sin\psi(t)\cdot\cos\phi(t) + \sin\vartheta(t)\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t) . \quad (13)$$

Такому кватерніону орієнтації відповідають наступні вирази для проекцій вектора $\bar{\omega}(t)$ на зв'язані осі:

$$\omega_1(t) = -\frac{1}{2}\dot{\upsilon}(t)\cos(\upsilon(t) - 2\phi(t)) + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}(t)\cos(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t)\sin 2\vartheta(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\dot{\psi}(t)\sin(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) - \frac{1}{2}\dot{\psi}(t)\sin(2\vartheta(t) - 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t)\cos\vartheta(t) ;$$

$$\omega_2(t) = \dot{\upsilon}(t) - \dot{\vartheta}(t)\cos 2\phi(t) + \dot{\psi}(t)\sin(\upsilon(t) + 2\phi(t)) + \dot{\psi}(t)\sin(2\phi(t) - \vartheta(t)) ;$$

$$\omega_3(t) = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}(t)\sin(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \frac{1}{2}\dot{\upsilon}(t)\sin(2\phi(t) - \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t)\cos 2\phi(t) + \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}(t)\cos 2\vartheta(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\dot{\psi}(t)\cos(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t)\sin\vartheta(t) + \frac{1}{2}\dot{\psi}(t)\cos(2\vartheta(t) - 2\phi(t)) . \quad (14)$$

В припущенні, що кути $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ змінюються з часом лінійно у відповідності до (9), з формул (14) отримаємо, що:

$$\omega_1(t) = -\frac{1}{2}k_1\cos(k_1 - 2k_3)t + \frac{1}{2}k_1\cos(2k_3 + k_1)t + k_2\sin 2k_1 t - \frac{1}{2}k_2\sin(2k_1 + 2k_3)t - \frac{1}{2}k_2\sin(2k_1 - 2k_3)t + 2k_3\cos k_1 t ;$$

$$\omega_2(t) = k_1 - k_1\cos 2k_3 t + k_2\sin(k_1+2k_3)t + k_2\sin(2k_3-k_1)t\ ;$$

$$\omega_3(t) = \frac{1}{2}k_1\sin(2k_3+k_1)t + \frac{1}{2}k_1\sin(2k_3-k_1)t + k_2\cos 2k_3 t - k_2\cos 2k_1 t +$$

$$+ k_2 + \frac{1}{2}k_2\cos(2k_1+2k_3)t + 2k_3\sin k_1 t + \frac{1}{2}k_2\cos(2k_1-2k_3)t\ . \qquad (15)$$

Кватерніон орієнтації, що відповідає такому обертальному руху, задається компонентами:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_2 t)\cdot\cos(k_3 t) - \sin(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t)\ ;\ \lambda_1(t) = \cos(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t)\ ;$$

$$\lambda_2(t) = \cos(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t)\quad \lambda_3(t) = \sin(k_2 t)\cdot\cos(k_3 t) + \sin(k_1 t)\cos(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t)\ . \qquad (16)$$

Компоненти $\theta_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ вектора позірного повороту $\bar{\theta}(t)$ знайдуться після інтегрування виразів для $\omega_i(t)$ на інтервалі $[0, t]$ у вигляді:

$$\theta_1(t) = -\frac{k_1}{2(k_1-2k_3)}\sin(k_1-2k_3)t + \frac{k_1}{2(k_1+2k_3)}\sin(k_1+2k_3)t - \frac{k_2}{2k_1}(\cos 2k_1 t - 1) + \frac{k_2}{2(2k_1+2k_3)}(\cos(2k_1+2k_3)t - 1) +$$

$$+ \frac{2k_3}{k_1}\sin k_1 t + \frac{k_2}{2(2k_1-2k_3)}(\cos(2k_1-2k_3)t - 1)\ ;$$

$$\theta_2(t) = k_1 t - \frac{k_1}{2k_3}\sin 2k_3 t - \frac{k_2}{k_1+2k_3}(\cos(k_1+2k_3)t - 1) - \frac{k_2}{2k_3-k_1}(\cos(2k_3-k_1)t - 1)\ ;$$

$$\theta_3(t) = -\frac{k_1}{2(k_1+2k_3)}(\cos(k_1+2k_3)t - 1) - \frac{k_1}{2(2k_3-k_1)}(\cos(2k_3-k_1)t - 1) + k_2 t + \frac{k_2}{2k_3}\sin 2k_3 t - \frac{k_2}{2k_1}\sin 2k_1 t +$$

$$+ \frac{k_2}{2(2k_1+2k_3)}\sin(2k_1+2k_3)t + \frac{k_2}{2(2k_1-2k_3)}\sin(2k_1-2k_3)t - \frac{2k_3}{k_1}(\cos k_1 t - 1)\ . \qquad (17)$$

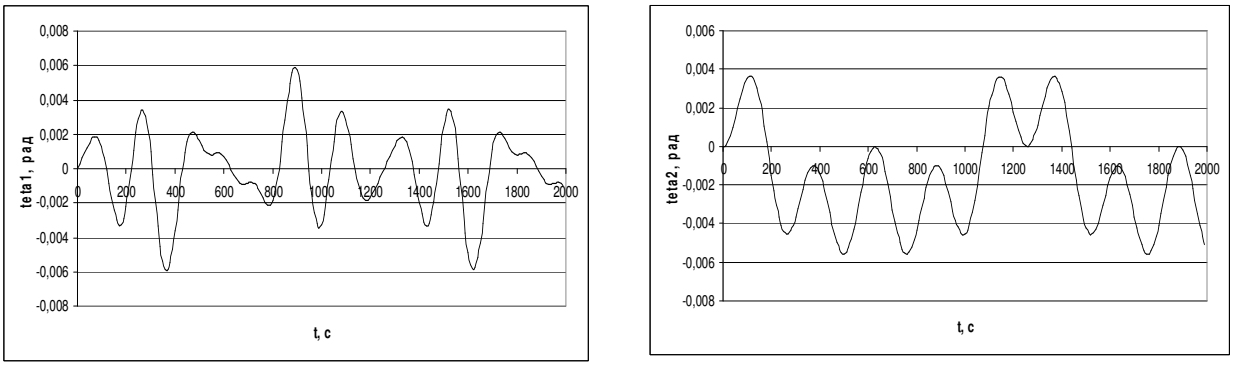
Квазікоординати (1), яким відповідають компоненти кватерніона орієнтації (16), можуть бути отримані на основі формул (17) в аналітичному вигляді за формулою (3).

Сукупність формул (17), (3) і (16), як і формул (12), (3) і (10), формально задають деяку *опорну еталонну модель* обертання твердого тіла. Якщо належним чином задати в цих формулах значення параметрів k_1, k_2, k_3 і такт обчислень Δt, отримаємо конкретну еталонну модель. Так, наприклад, параметри k_1, k_2, k_3 можуть бути заданими, виходячи з величини максимального модуля вектора кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ для об'єкта, що розглядається, або отримані, як результат відповідних апроксимацій реального руху об'єкта.

Зауважимо, що оскільки для запропонованої еталонної моделі обертання в ході її побудови були також отримані і представлення для компонент вектора модельної кутової швидкості (8) і (14), то цю модель можна використовувати і у випадку первинної інформації про обертання об'єкта у вигляді проекцій ω_i, $i = 1, 2, 3$ вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}$ твердого тіла на зв'язані осі, що знімаються з вимірювачів в моменти часу t_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

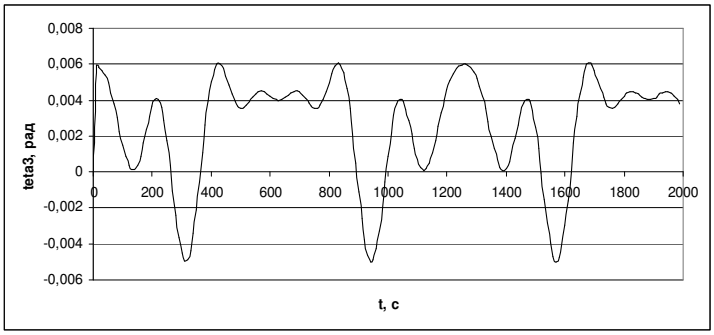
Чисельна реалізація узагальненої моделі. Побудуємо еталонну модель згідно формул (12), (3), (10) для декількох значень параметрів k_1, k_2, k_3 і такту обчислень $\Delta t = 0{,}1$ с.

Для набору параметрів $k_1 = 0{,}015$, $k_2 = 0{,}025$, $k_3 = 0{,}005$ результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ в конфігураційному просторі представлені відповідно на рис. 1 та рис. 2.



а *б*

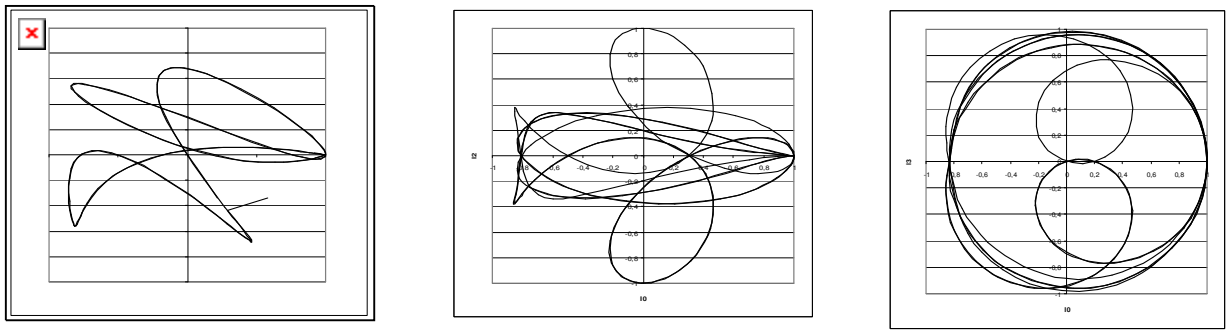
Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0{,}015$, $k_2 = 0{,}025$, $k_3 = 0{,}005$: *а* – по першій осі; *б* – по другій осі.



в

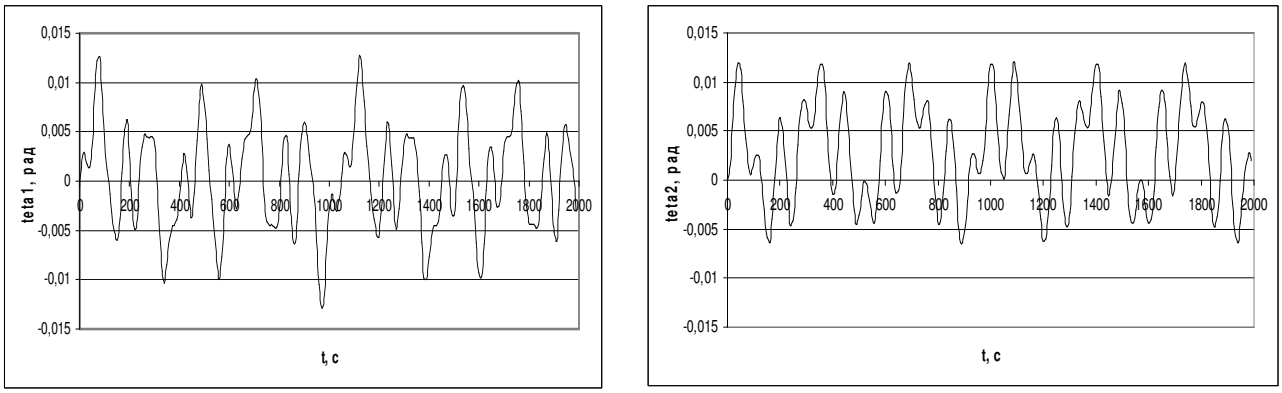
Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$: *а* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

Результати реалізації еталонної моделі (12), (3), (10) для значень параметрів $k_1 = -0,03$, $k_2 = 0,045$, $k_3 = -0,024$ на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 3 і рис. 4.

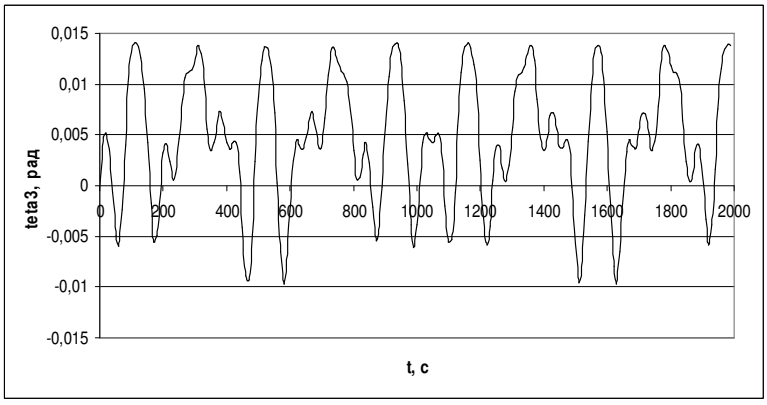


а *б* *в*

Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$: *а* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

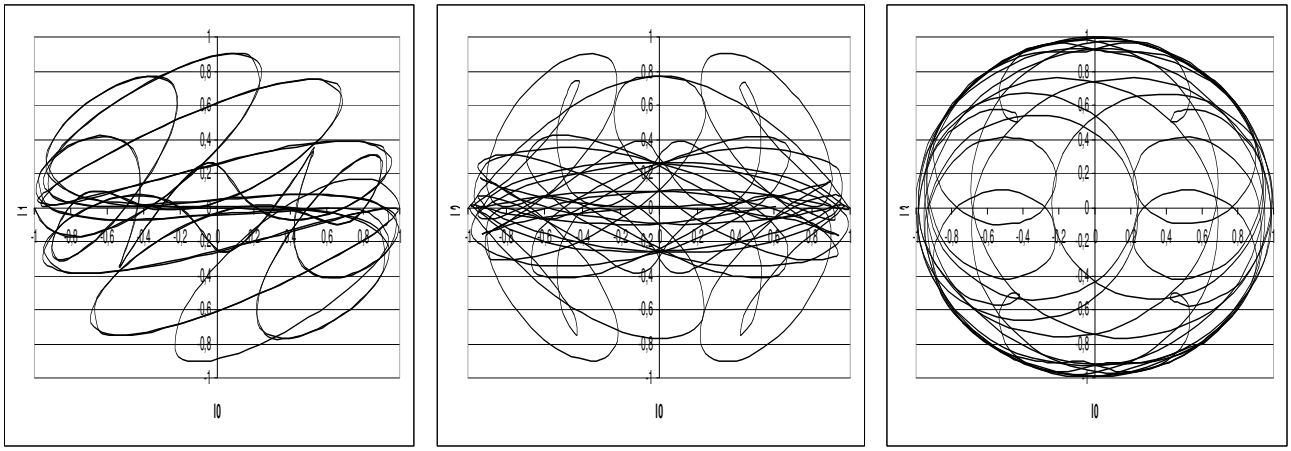


а *б*



в

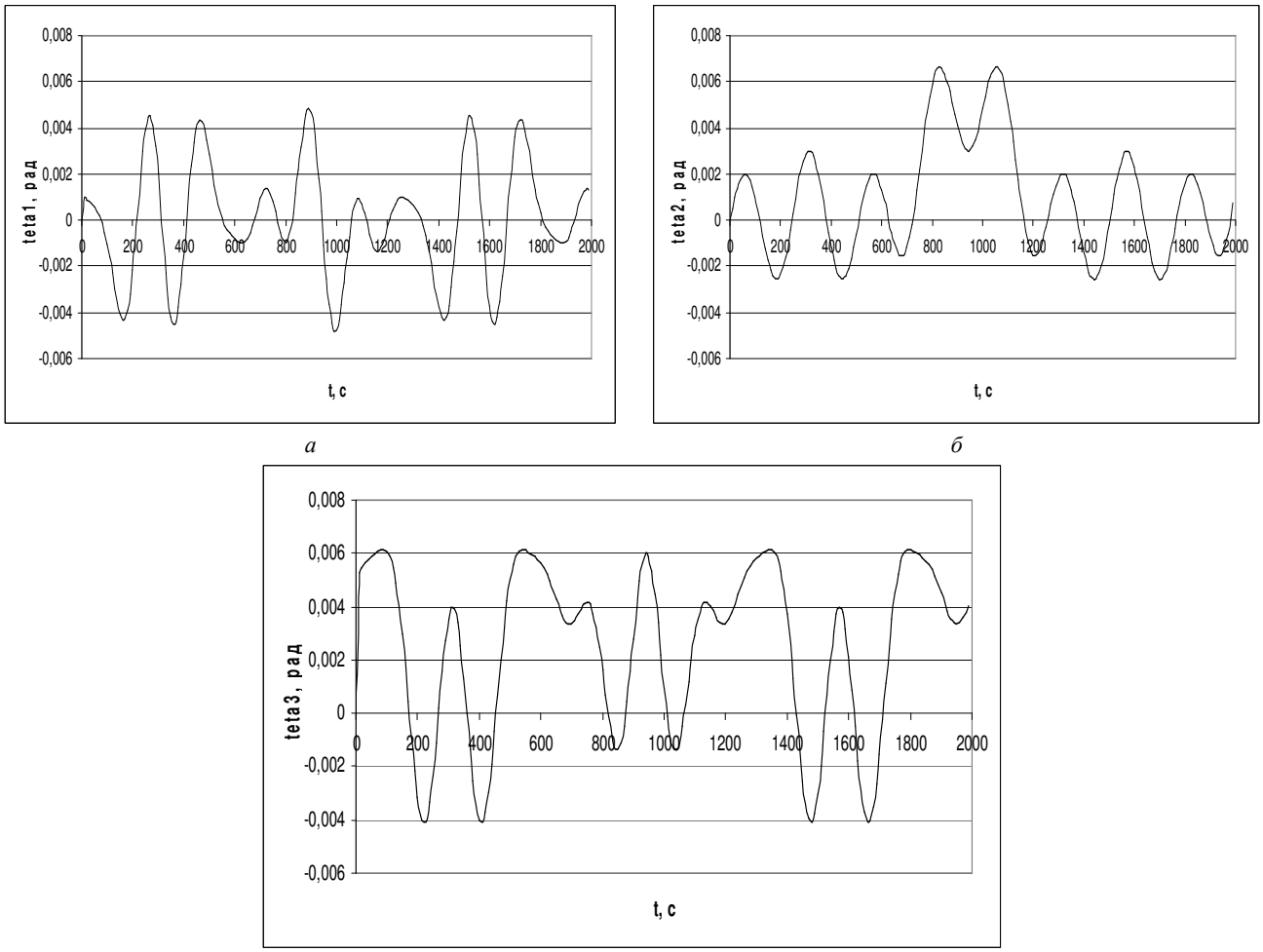
Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = -0,03$, $k_2 = 0,045$, $k_3 = -0,024$: *а* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



а *б* *в*

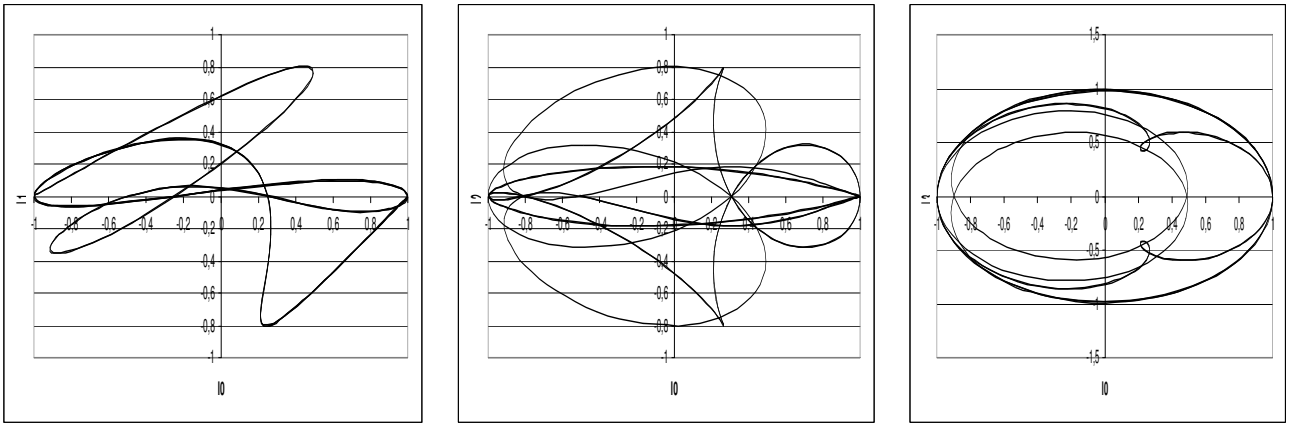
Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = -0,03$, $k_2 = 0,045$, $k_3 = -0,024$: *а* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Побудуємо еталонну модель (17), (3), (16) для декількох значень параметрів k_1, k_2, k_3 і такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с. Для набору параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$ результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат θ^*_{ni} від часу та траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі представлені на рис. 5 та рис. 6.



а *б* *в*

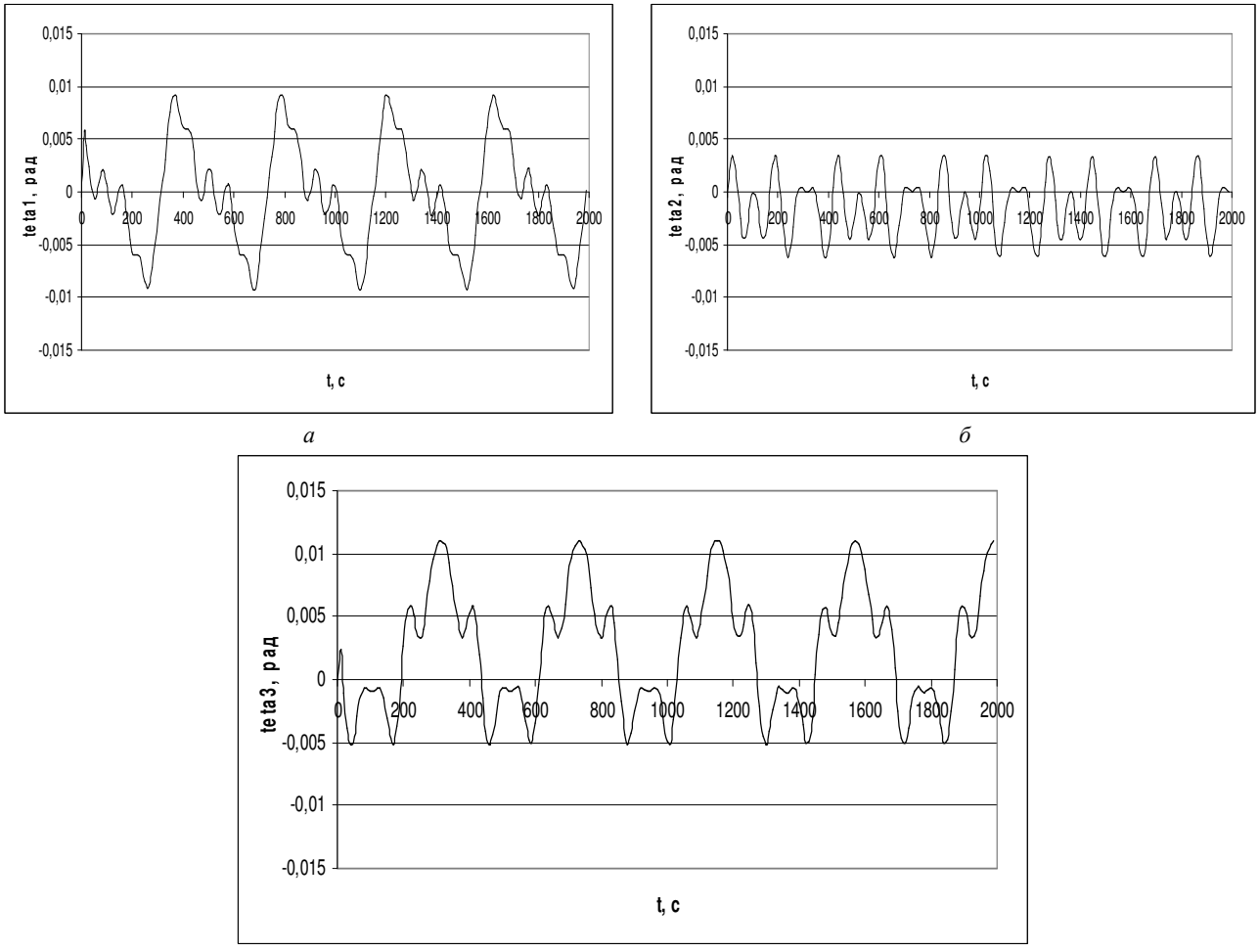
Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$
а – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



а *б* *в*

Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0{,}015$, $k_2 = 0{,}025$, $k_3 = 0{,}005$:
а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Результати реалізації еталонної моделі (17), (3), (16) для набору параметрів $k_1 = 0{,}015$, $k_2 = 0{,}025$, $k_3 = 0{,}03$ на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 7 і рис. 8.

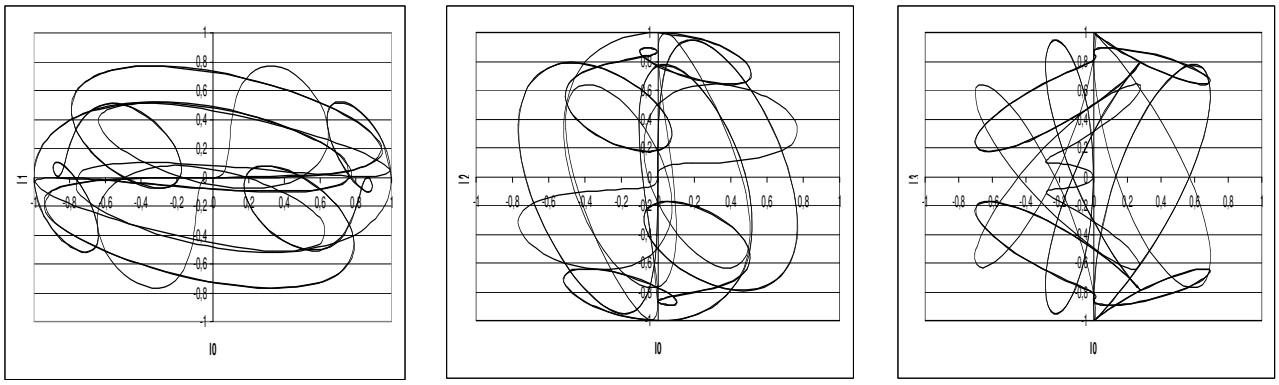


а *б*

в

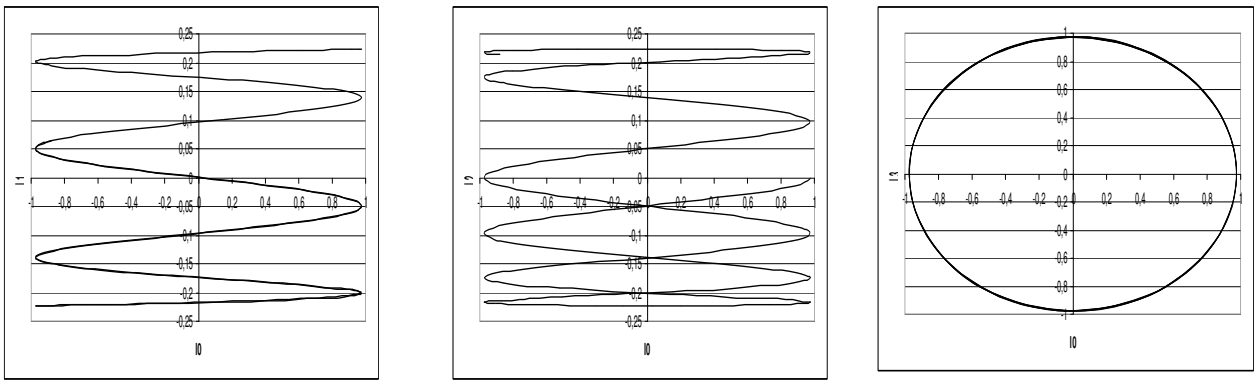
Рис. 7 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0{,}015$, $k_2 = 0{,}025$, $k_3 = 0{,}03$:
а – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

В роботі [7] наведено модель регулярної прецесії з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}(t) = (\mu \sin\vartheta \sin\nu t;$ $\mu \sin\vartheta \cos\nu t;\ \nu + \mu\cos\vartheta)^T$. Траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для цієї моделі представлені на рис. 9.



а *б* *в*

Рис. 8 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0{,}015$, $k_2 = 0{,}025$, $k_3 = 0{,}03$:
а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.



а *б* *в*

Рис. 9 – Траєкторії в конфігураційному просторі для регулярної прецесії:
а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с при значеннях параметрів $\nu = 0{,}02$, $\mu = 0{,}015$, $\vartheta = 0{,}45$. Порівняння результатів реалізацій запропонованої узагальненої моделі обертання з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропонована модель охоплює обертальні рухи твердого тіла, які суттєво відрізняються від регулярної прецесії.

Висновки. Представлена нова узагальнена трьохчастотна неперервна модель обертання твердого тіла, основана на представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями кутів, що лінійно змінюються у часі. В результаті аналізу побудованих траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показано, що при належному виборі параметрів цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, що відрізняються від класичного випадку регулярної прецесії. Отриману еталонну модель можна застосовувати для оцінювання похибок алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

Список літератури: 1. *Литманович Ю.* Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электроприбор». – 2003. – С. 250 – 260. **2.** *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. **3.** *Savage P.G.* Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints. Pp. (4–1)–(4–33). **4.** *Ткаченко А.И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. **5.** *Панов А.П.* Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. **6.** *Плаксий Ю.А.* Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». – 2013. – №37 (1010). – С.141 – 147.

Bibliography (transliterated): 1. Litmanovich, Yu. "Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialah Sankt-Peterburgskih konferencij za desjatiletie." *X Sankt-Peterburgskaja Mezhdunar. konf.* S.-Peterburg: CNII «Jelektropribor», 2003. 250–260. Print. **2.** Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem.* Moscow: Nauka, 1992. Print. **3.** Savage, P. G. "Strapdown System Performance Analysis." RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints. (4–1)–(4–33). Print. **4.** Tkachenko, A. I. "O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmah opredelenija orientacii ob"ekta." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 5. Kiev, 1970. 20–22. Print. **5.** Panov, A. P. "Optimizacija vysokotochnyh algoritmov vychislenija kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 73. Kiev, 1987. 3–9. Print. **6.** Plaksij, Yu. A. "Etalonna trygonometrychna kvaternionna model' precesijnogo typu obertannja tverdogo tila." *Visnyk NTU «KhPI».* No. 37 (1010). Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 141–147. Print.

Надійшла (received) 04.09.2015