

letin of the JSME. – 1983. – Vol. 26, No. 216. – P. 999 – 1006. **3.** Grabow G. Einfluss der Beschau felung auf das Kennlinien Verhalten von Freistrompumpen / G. Grabow // Pumpen und Verdichter. – 1972. – No. 2. – S. 18 – 21. **4.** Герман В.Ф., Свободно-вихревые насосы: учеб. пособие / В.Ф. Герман, И.А. Ковалев, А.И. Котенко; под общ. ред. А.Г. Гусака. – 2-е изд., доп. и перераб. – Сумы: Сумской государственный университет, – 2013. – 159 с. **5.** Евтушенко А.А. Основы теории рабочего процесса вихревых гидромашин // Технологические системы. – 2002. – №2 (13). – С. 110 – 113. **6.** Яременко О.В. Испытания насосов: справочное пособие. – М.: Машиностроение. – 1976. – 225 с. **7.** Волков Н.И., Кочевский А.Н. Расчет внутренних течений жидкости в каналах с помощью пакета CFX // Вісник СумДУ: технічні науки. – Суми : СумДУ, – № 12 (84). – 2005. – С. 7 – 14. **8.** Кочевский А.Н. Возможности моделирования течений жидкости и газа с помощью современных программных продуктов // Вісник СумДУ: технічні науки. – Суми: СумДУ, – № 13 (72). – 2004. – С. 5 – 20. **9.** CFX-5 Solver Theory, – 2004. – 261 p. **10.** Соляник В.О. Робочий процес і енергетичні якості вільновихрових насосів типу «ТУРО»: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.05.17 / В.О. Соляник. – Суми, 1999. – 19 с. **11.** Байбаков О.В. Вихревые гидравлические машины. – М.: Машиностроение, 1981. – 197 с. **12.** Электронный ресурс. – Режим доступа: <http://www.pompegarbarino.com>. **13.** Руднев С.С. Основы рабочего процесса вихревых насосов // Труды ВНИИГидромаша. – 1972. – № 43. – С. 3 – 9. **14.** Михайлов А.К., Малюшенко В.В. Лопастные насосы. Теория, расчет и конструирование. – М.: Машиностроение, – 1977. – 288 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Presman, L. S. "Smerchevye (svobodno-vihrevye) nasosy." *Trudy VNIIGidromasha*. No. 36. 1967. 46–65. Print. **2.** Ohba, H., Y. Nakashima and K. Shiramoto. "A Study of Internal Flow and Performance of a Vortex Pump. Part 1. Theoretical Analysis." *Bulletin of the JSME*. Vol. 26. No. 216. 1983. 999–1006. Print. **3.** Grabow, G. "Einfluss der Beschau felung auf das Kennlinien Verhalten von Freistrompumpen." *Pumpen und Verdichter*. No. 2. 1972. 18–21. Print. **4.** German, V. F., I. A. Kovalev and A. I. Kotenko. *Svobodno-vihrevye nasosy: ucheb. posobie*. Ed. A. G. Gusak. Sumy: Sumskoj gosudarstvennyj universitet, 2013. Print. **5.** Evtushenko, A. A. "Osnovy teorii rabocheho processa vihrevykh gidromashin." *Tehnologicheskie sistemy*. No. 2 (13). 2002. 110–113. Print. **6.** Jaremenko, O. V. *Ispytanija nasosov: spravochnoe posobie*. Moscow: Mashinostroenie, 1976. Print. **7.** Volkov, N. I., and A. N. Kochevskij. "Raschet vnutrennih techenij zhidkosti v kanalah s pomoshh'ju paketa CFX." *Visnik SumDU. Ser.: tehnicni nauky*. No. 12 (84). Sumy: SumDU. 2005. 7–14. Print. **8.** Kochevskij, A. N. "Vozmozhnosti modelirovaniya techenij zhidkosti i gaza s pomoshh'ju sovremennykh programmykh produktov." *Visnik SumDU. Ser.: tehnicni nauky*. No. 13 (72). Sumy: SumDU. 2004. 5–20. Print. **9.** *CFX-5 Solver Theory*. 2004. Print. **10.** Soljanik, V. O. *Robochyj proces i energetychni jakosti vil'novykhrovnykh nasosiv typu «TURO»*. *Avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk*. Sumy, 1999. Print. **11.** Bajbakov, O. V. *Vihrevye gidravlicheskie mashiny*. Moscow: Mashinostroenie, 1981. Print. **12.** Garbarino. Site. Web. 10 Desember 2014 <<http://www.pompegarbarino.com>>. **13.** Rudnev, S. S. "Osnovy rabocheho processa vihrevykh nasosov." *Trudy VNIIGidromasha*. No. 43. 1972. 3–9. Print. **14.** . Mihajlov, A. K., and V. V. Maljushenko. *Lopastnye nasosy. Teorija, raschet i konstruirovanie*. Moscow: Mashinostroenie, 1977. Print.

Поступила (received) 02.12.2014

УДК 539.3

**Л.В. КУРПА**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;  
**Т.В. ШМАТКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

## АНАЛІЗ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНО КОЛИВАНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ

© Л. В. Курпа, Т. В. Шматко, 2015

Для дослідження геометрично-нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною геометричною формою пропонується метод, що суттєво базується на використанні теорії  $R$  – функцій. Математична постановка задачі виконана в рамках уточненої теорії першого порядку, яка враховує деформації зсуву. Зведення вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь виконується в декілька етапів. Запропонований алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL, апробовано на тестових задачах та проілюстровано на прикладах оболонок зі складною формою плану.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні матеріали, геометрично-нелінійні коливання, теорія  $R$  – функцій, пологі оболонки зі складною формою плану.

**Вступ.** Широке застосування сучасних функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), які визначаються високою міцністю при наявності високотемпературних середовищ, спонукало науковців розробляти ефективні методи розрахунку елементів конструкцій, виготовлених з таких матеріалів. До актуальних питань, які виникають при експлуатації функціонально-градієнтних (ФГ) об'єктів, велика віднести дослідження вільних та вимушених коливань при наявності великих амплітуд, тобто при геометрично-нелінійному деформуванні об'єкту.

**Аналіз останніх досліджень.** Слід відзначити, що за останній час одержано досить великі досягнення в розв'язанні цього питання [5 – 10]. Але практично відсутні роботи, в яких було б проаналізовано коливання ФГ пологих оболонок зі складною формою плану. Раніше в роботах [2, 3] для дослідження геометрично нелінійних коливань багат шарових пологих оболонок та пластин було розроблено метод, що базується на використанні теорії  $R$  – функцій (RFM) [1, 4] та варіаційних методах. В даній роботі запропоновано розв'язання цього підходу для розв'язання задачі про геометрично-нелінійні коливання ФГ пологих оболонок практично довільної геометричної форми і різних видів граничних умов.

**Математична постановка.** Розглянемо пологу оболонку, яка виготовлена із суміші металу та кераміки, враховуючи, що об'ємні частки кераміки або металу змінюються безперервно вздовж товщини за степеневим законом

$$V = ((2z + h)/2h)^k,$$

де  $h$  – товщина оболонки;  $k$  – показник ступеня об'ємної частки матеріалу, ( $0 \leq k \leq \infty$ ).

Механічні властивості суміші з двох складових визначаються наступним чином:

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T)) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T). \quad (1)$$

Вираз (1) являє собою загальну формулу для визначення модуля пружності  $E$ , коефіцієнта Пуассона  $\nu$  і щільності  $\rho$  композиту,  $P_c, P_m$  – відповідні характеристики кераміки і металу.

Для дослідження нелінійних коливань ФГ пологих оболонок використаємо уточнену теорію першого порядку (типу теорії Тимошенка). Згідно цієї

теорії відносні деформації розтягу та зсуву  $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T$  в серединній площині та відносні деформації згину та крутіння  $\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$  задано наступними виразами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND}, \quad (i, j = 1, 2), \\ \varepsilon_{11}^L &= u_{,x} + w/R_x, \quad \varepsilon_{22}^L = v_{,y} + w/R_y, \quad \varepsilon_{12}^L = u_{,y} + v_{,x}; \\ \varepsilon_{13} &= w_{,x} + \psi_x, \quad \varepsilon_{23} = w_{,y} + \psi_y, \quad \varepsilon_{11}^{ND} = \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22}^{ND} = \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12}^{ND} = w_{,x} w_{,y}; \\ \chi_{11} &= \psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = \psi_{x,y} + \psi_{y,x}; \end{aligned}$$

де  $u, v$  та  $w$  – переміщення оболонки в серединній площині в напрямках осей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно;  $\psi_x, \psi_y$  – кути повороту нормалі до серединної поверхні відносно осей  $Oy$  та  $Ox$ .

Надалі будемо розглядати матеріали, для яких коефіцієнт Пуассона не залежить від температури та є однаковим для кераміки і металу, тобто  $\nu_m = \nu_c$ . В цьому випадку зусилля  $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$  та моменти  $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$  в рамках обраної теорії визначаються як:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu)}{2} \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_3(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} E_1 &= \left( E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)}; \\ E_3 &= \left( \frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3. \end{aligned}$$

Щільність композиту  $\rho$  визначається за формулою:

$$\rho = (\rho_m + (\rho_c - \rho_m)/(k+1)) h.$$

Потенціальна та кінетична енергія визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x (w_{,x} + \psi_x) + Q_y (w_{,y} + \psi_y)) d\Omega; \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} I_0 (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) + 2I_1 (u_{,t} \psi_{x,t} + v_{,t} \psi_{y,t}) + I_2 (\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2) dx dy,$$

де

$$I_0 = \left( \rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m) k}{2(k+1)(k+2)} h^2;$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz = \left( \frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.$$

Застосовуючи *принцип Остроградського-Гамільтона*, можна одержати рівняння руху, яке доповнюється відповідними граничними умовами.

**Метод розв'язання.** Для вирішення поставленої проблеми будемо використовувати підхід, запропонований у роботі [2]. Для реалізації цього підходу стосовно ФГ пологих оболонок, насамперед, необхідно вирішити лінійну задачу про вільні коливання пологої оболонки. Алгоритм розв'язання лінійної задачі за допомогою методу *R – функцій* (RFM) було описано в роботах [1, 3, 4]. Для вирішення нелінійної задачі представимо невідомі функції в наступному вигляді:

$$w = y(t) w_1^{(c)}(x, y), \quad \psi_x = y(t) \psi_{x1}^{(c)}(x, y), \quad \psi_y = y(t) \psi_{y1}^{(c)}(x, y), \quad (3)$$

$$u = y(t) u_1^{(c)}(x, y) + y^2(t) u_{11}, \quad v = y(t) v_1^{(c)}(x, y) + y^2(t) v_{11},$$

де  $w_1^{(c)}(x, y)$ ,  $u_1^{(c)}(x, y)$ ,  $v_1^{(c)}(x, y)$ ,  $\psi_{x1}^{(c)}(x, y)$ ,  $\psi_{y1}^{(c)}(x, y)$  – власні функції лінійної задачі, а коефіцієнт  $y(t)$  залежить від часу.

Слід звернути увагу на те, що функції  $u_{11}, v_{11}$  повинні задовольняти наступній системі диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_{11}) + L_{12}(v_{11}) &= -N I_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}), \\ L_{21}(u_{11}) + L_{22}(v_{11}) &= -N I_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$N I_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = w_1^{(c)}{}_{,x} L_{11} w_1^{(c)} + w_1^{(c)}{}_{,y} L_{12} w_1^{(c)},$$

$$N I_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = w_1^{(c)}{}_{,x} L_{12} w_1^{(c)} + w_1^{(c)}{}_{,y} L_{22} w_1^{(c)}.$$

Оператори  $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$  в рівняннях (4) визначаються як:

$$L_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( ( )_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} ( )_{,yy} \right);$$

$$L_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( \frac{1-\nu}{2} ( )_{,xx} + ( )_{,yy} \right); \quad L_{12} = L_{21} = \frac{E_1}{2(1-\nu)} ( )_{,xy}.$$

Система рівнянь (4) може бути вирішена за допомогою RFM практично для довільної форми плану і різних видів крайових умов. Підставляючи вирази (3) для функцій в рівняння руху та застосовуючи *метод Бубнова-Гальоркіна*, отримаємо наступну систему нелінійних звичайних диферен-

ціальних рівнянь щодо невідомих функцій  $y(t)$  :

$$y''(t) + \omega_L^2 y(t) + \beta y^2(t) + \gamma y^3(t) = 0. \quad (5)$$

Вирази для коефіцієнтів  $\beta, \gamma$  мають наступний вигляд:

$$\beta = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega_{11}} \left( N_{11}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,yy} + 2N_{12}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,xy} + \right. \\ \left. + M_{11}^{(NL)}_{,xx} + M_{22}^{(NL)}_{,yy} + 2M_{12}^{(NL)}_{,xy} - k_1 N_{11}^{(NL)} - k_2 N_{22}^{(NL)} \right) w_1^{(c)} d\Omega;$$

$$\gamma = -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,yy} + \right. \\ \left. + 2N_{12}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,xy} \right) w_1^{(c)} d\Omega,$$

де

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = 1/(1-\nu^2) [C] \left( E_1 \varepsilon^{(L)} + E_2 \chi \right);$$

$$N^{(NL)} = \{N_{11}^{(NL)}; N_{22}^{(NL)}; N_{12}^{(NL)}\}^T = \frac{E_1}{1-\nu^2} [C] \varepsilon^{(NL)};$$

$$M^{(NL)} = \{M_{11}^{(NL)}; M_{22}^{(NL)}; M_{12}^{(NL)}\}^T = \frac{E_3}{1-\nu^2} [C] \varepsilon^{(NL)};$$

$$\varepsilon^{(L)} = \varepsilon^{(L)}(u_1^{(c)}, v_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = \left\{ (u_1^{(c)})_{,x} + k_1 w_1^{(c)}; (v_1^{(c)})_{,y} + k_2 w_1^{(c)}; ((u_{i1}^{(c)})_{,y} + (v_1^{(c)})_{,x}) \right\}^T;$$

$$\varepsilon^{(NL)} = \varepsilon^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)}) = \left\{ (u_{11})_{,x} + \frac{1}{2} ((w_1^{(c)})_{,x})^2; (v_{11})_{,y} + \frac{1}{2} ((w_1^{(c)})_{,y})^2; \right. \\ \left. (u_{11})_{,y} + (v_{11})_{,x} + (w_1^{(c)})_{,x} (w_1^{(c)})_{,y} \right\}^T.$$

Матриця  $C$  має такий вигляд:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи (5) може бути знайдено за допомогою різних наближених методів. У цій роботі був використаний *метод Рунге-Кутта*.

**Чисельні результати.** З метою перевірки вірогідності запропонованого підходу розглянемо рішення деяких тестових завдань. В якості ФГМ виберемо комбінацію  $Al / Al_2O_3$ . Механічні характеристики для матеріалів, що становлять такий сплав, представляються наступними параметрами [6, 8]:

$$Al: E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0,3, \quad \rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3;$$

$$Al_2O_3: E_c = 380 \text{ GPa}; \quad \nu_c = 0,3; \quad \rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3.$$

**Аналіз лінійних коливань. Задача 1.** Розглянемо задачу про коливання ФГ пологої оболонки двоякої кривини з квадратним планом. Припустимо, що товщина оболонки дорівнює  $a/h = 5$ . Граничні умови відповідають умовам шарнірного закріплення, тобто мають наступний вигляд:

$$v = w = M_x = \psi_y = N_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm(a/2);$$

$$u = w = M_y = \psi_x = N_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm(a/2).$$

В якості структури розв'язку [4] поставленої задачі виберемо наступні вирази:

$$u = f_2 \Phi_1, \quad v = f_1 \Phi_2, \quad w = \omega \Phi_3, \quad \psi_x = f_2 \Phi_4, \quad \psi_y = f_1 \Phi_5,$$

де

$$\omega(x, y) = (f_1 f_2) / (f_1 + f_2), \quad f_1 = 0,5a(a^2 - x^2) \geq 0, \quad f_2 = 0,5b(b^2 - y^2) \geq 0;$$

$\Phi_i, i = \overline{1,5}$  – невизначені компоненти, які представляються у вигляді розкладання в усічені ряди з якої-небудь повної системи функцій  $\{\varphi_k^{(i)}\}$ :

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{k=N_i} a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

Таблиця 1. Порівняння власних частот  $\Omega_1 = \lambda_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$  ФГ ( $Al / Al_2O_3$ ) оболонки з квадратним планом з результатами роботи [8]

$a/h = 5$								
$b/R_y$	$a/R_x$	Метод	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	RFM	0,211	0,180	0,162	0,139	0,132	0,108
		[8]	0,212	0,182	0,164	0,138	0,131	0,108
0,5	0,5	RFM	0,2297	0,196	0,177	0,150	0,141	0,117
		[8]	0,2301	0,200	0,182	0,151	0,142	0,117
1	1	RFM	0,275	0,237	0,215	0,177	0,164	0,140
		[8]	0,274	0,243	0,223	0,186	0,169	0,139
0	0,5	RFM	0,214	0,183	0,165	0,141	0,133	0,109
		[8]	0,215	0,186	0,168	0,141	0,133	0,110
0	1	RFM	0,223	0,191	0,173	0,146	0,137	0,114
		[8]	0,224	0,194	0,177	0,148	0,138	0,114
-0,5	0,5	RFM	0,205	0,175	0,158	0,135	0,128	0,040
		[8]	0,206	0,177	0,160	0,135	0,127	0,105
-1	1	RFM	0,191	0,163	0,148	0,126	0,119	0,097
		[8]	0,192	0,165	0,149	0,125	0,118	0,098

У цій роботі в якості такої системи обрані степеневі поліноми. Після проведення обчислювального експерименту було встановлено, що збіжність

результатів, принаймні, в третьому знаку, настає при збереженні 9-го ступеня для поліномів  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4, \Phi_5$  і 10-го ступеня для полінома  $\Phi_3$ . Результати, представлені нижче, були отримані при зберіганні саме такої кількості координатних функцій. В табл. 1 представлено порівняння власних частот для пологих ФГ ( $Al/Al_2O_3$ ) оболонок двоякої кривини з результатами роботи [8] для товщини  $a/h = 5$ .

**Задача 2.** Тестування розробленого програмного забезпечення було виконано також для повністю вільних пластин і пологих оболонок з еліптичною формою плану. Геометричні параметри досліджуваної оболонки обрані наступними:

$$a/b = 2, h/2a = 0.01,$$

де  $a$  і  $b$  – піввіссі еліпса. Механічні характеристики розглянутого сплаву  $Al/Al_2O_3$  такі ж, як і в роботі [6]. Враховуючи симетрію задачі, інтегрування виконувалося тільки по 1/4 області. У табл. 2 представлено порівняння перших трьох власних частот  $\Omega_L = \lambda ab \sqrt{\rho_m h / D_m}$ , відповідних симетрично-симетричним формам коливань, для різних значень показника  $k$  об'ємної частки кераміки. Величина  $D_m$  визначається як

$$D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu_{mm}^2).$$

Таблиця 2. Порівняння значень параметра  $\Omega_L = \lambda ab \sqrt{\rho_m h / D_m}$  для основних частот еліптичних в плані ФГ ( $Al/Al_2O_3$ ) повністю вільних оболонок з результатами роботи [6]

$a/R_x = 0$									
$a/R_y$	мода	$k = 1$		$k = 4$		$k = 10$		$k = 100$	
		RFM	[6]	RFM	[6]	RFM	[6]	RFM	[6]
-1; 0;1	1	10.00	10.17	8.688	8.839	8.346	8.492	7.042	7.164
	2	41.52	42.27	36.06	36.73	34.63	35.28	29.22	29.77
	3	47.14	47.93	40.94	41.65	39.32	39.99	33.18	33.27
$a/R_x = 0.2$									
-1	1	11.94	12.17	10.21	10.41	9.626	9.811	8.187	8.342
	2	46.92	47.76	40.15	40.88	37.94	38.65	32.23	32.83
	3	49.50	50.35	42.72	43.47	40.76	41.47	34.49	35.09
0	1	10.12	10.30	8.786	8.945	8.421	8.579	7.110	7.240
	2	47.21	48.037	40.91	41.67	38.64	39.36	32.45	33.46
	3	48.09	48.88	41.09	41.79	39.58	40.06	33.24	33.81
1	1	10.51	10.70	9.090	9.262	8.881	8.848	7.343	7.481
	2	47.89	48.72	41.42	42.18	39.35	40.11	33.41	34.04
	3	49.51	50.38	42.20	42.95	40.00	40.69	33.90	34.48

**Аналіз нелінійних коливань. Задача 1.** Тестування запропонованого підходу для розв'язку нелінійних задач розглянемо на прикладі жорстко закріпленої сферичної оболонки, яка має еліптичний план. В роботі [3] ця задача була вирішена тільки в лінійній постановці та виконано порівняння для двох

сплавів:

**FG1** ( $Al / Al_2O_3$ ):

$$E_m / E_c = 70 / 380 \text{ GPa}; \nu_m = \nu_c = 0,3; \rho_m / \rho_c = 2707 / 3800 \text{ kg/m}^3; \quad (6)$$

**FG2** ( $Al / ZrO_2$ ):

$$E_m / E_c = 70 / 151 \text{ GPa}; \nu_m = \nu_c = 0,3; \rho_m / \rho_c = 2707 / 3000 \text{ kg/m}^3. \quad (7)$$

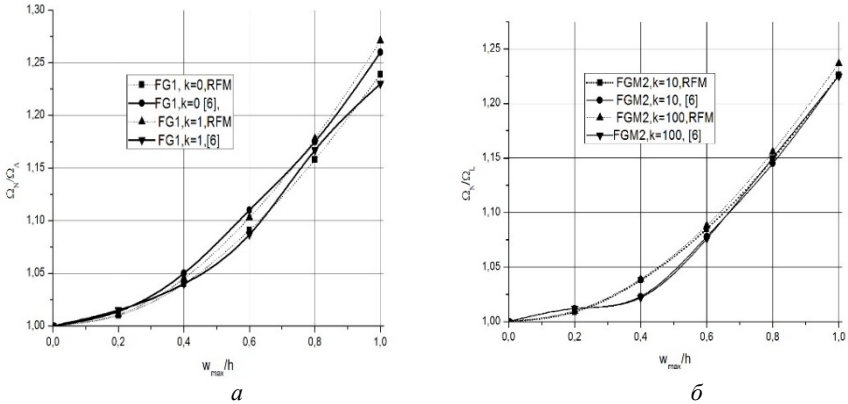


Рис. 1 – Порівняння скелетних кривих для сферичної оболонки з еліптичним планом з результатами роботи [6]:  
 а – суміш FG1; б – суміш FG2.

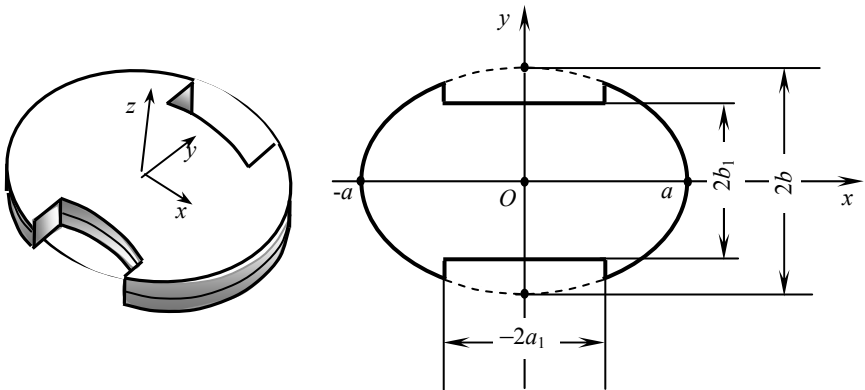


Рис. 2 – Геометрична форма сферичної оболонки та її плану.

Геометричні параметри досліджуваної оболонки були обрані наступними:

$$R_x / R_y = 1, a / b = 2, h / 2a = 0,1, 2a / R_x = 0,2. \quad (8)$$

На рис. 1, а представлені результати дослідження геометрично нелінійних коливань цієї оболонки для суміші FG1 і двох значень параметра  $k = 0, k = 1$ .



На рис. 1, б представлені результати для суміші FG2 та значень параметра  $k = 10, k = 100$ . Порівняння скелетних кривих з результатами роботи [6] підтверджує достовірність запропонованого підходу. В рамках точності графіка отримані результати практично збігаються. Максимальне відхилення не перевищує 1.5%.

**Задача 2.** Для ілюстрації можливостей розробленого підходу розглянемо аналогічну задачу для сферичних оболонок, що мають план, представлений на рис. 2. Передбачається, що оболонка повністю жорстко закріплена. Для побудови системи координатних функцій будемо використовувати наступні структурні формули:

$$u = \omega\Phi_1, \quad v = \omega\Phi_2, \quad w = \omega\Phi_3, \quad \psi_x = \omega\Phi_4, \quad \psi_y = \omega\Phi_5.$$

Рівняння границі області  $\omega = 0$  побудуємо за допомогою теорії  $R$ -функцій:

$$\omega = (\bar{f}_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 f_3,$$

де  $f_1, f_2, f_3$  визначають наступні множини точок:

$$f_1 = ((a_1^2 - x^2)/2a_1) \geq 0; \quad f_2 = ((b_1^2 - y^2)/2b_1) \geq 0; \quad f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \geq 0.$$

Символи  $\wedge_0, \vee_0$  визначають  $R$ -операції:  $R$ -кон'юнкцію та  $R$ -диз'юнкцію відповідно [3]. Невизначені компоненти в структурних формулах апроксимувались з урахуванням симетрії поставленого завдання щодо осей  $Ox$  та  $Oy$ , а саме:

$$\Phi_1, \Phi_4 : x, x^3, xy^2, x^5, x^3y^2, xy^4, x^7, x^5y^2, x^3y^4, xy^6, \dots;$$

$$\Phi_2, \Phi_5 : y, x^2y, y^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6y, x^4y^3, x^2y^5, y^7, \dots;$$

$$\Phi_3 : 1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \dots.$$

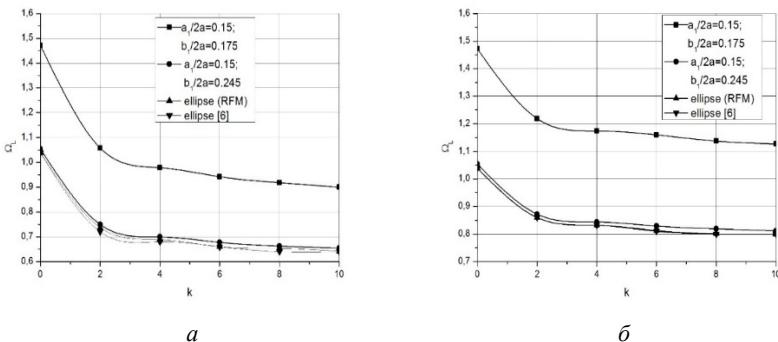


Рис. 3 – Залежність лінійної частоти від показника  $k$  – об'ємної долі кераміки:  $a$  – для суміші FG1;  $b$  – для суміші FG2.

Інтегрування виконувалося по 1/4 області. Результати розв'язку лінійної задачі для матеріалу FG1 представлені на рис. 3, а у вигляді залежностей

лінійної частоти  $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$  від значення показника  $k$  – об’ємної доли кераміки.

На рис. 3, б представлені залежності власних частот від параметра  $k$  для тієї ж оболонки, але для матеріалу FG2. При цьому було прийнято, що  $b_1 / 2a = 0.175$ ;  $a_1 / 2a = 0.15$ . Поряд з такими значеннями було розв’язано задачу для відношень  $b_1 / 2a = 0.245$ ;  $a_1 / 2a = 0.15$ . В останньому випадку геометрична форма плану (рис. 2) прямує до еліптичної і результати можна порівняти з результатами роботи [6]. З наведених графіків видно, що вони практично співпадають, що підтверджує вірогідність розв’язання лінійної задачі.

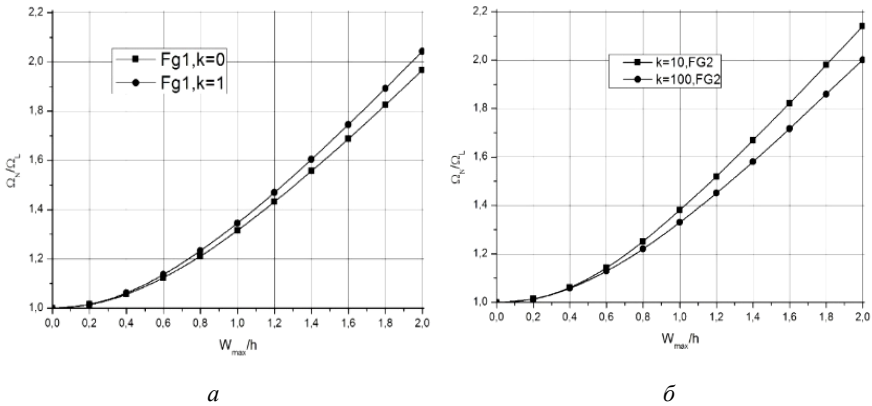


Рис. 4 – Скелетні криві для пологої сферичної оболонки:  
 а – для суміші G1; б – для суміші FG2.

На рис. 4, а зображені скелетні криві для пологої сферичної жорстко закріпленої оболонки, виготовленої з суміші FG1, для показників параметра  $k = 0; 1$ . Геометричні параметри співпадають з параметрами, обраними для лінійної задачі (6) та  $b_1 / 2a = 0.175$ ;  $a_1 / 2a = 0.15$ , На рис. 4, б наведено аналогічні залежності для досліджуємої оболонки, виготовленої з матеріалу FG2.

В обох випадках криві мають жорсткий характер, монотонно зростають, що характерно для помірно товстих жорстко закріплених оболонок ( $h / 2a = 0,1$ ).

При проведенні обчислювального експерименту було встановлено, що при прямуванні відношення  $b_1 / 2a \rightarrow 0,25$ , тобто,  $b_1 / b \rightarrow 1$ , скелетні криві збігаються з відповідними кривими для еліптичного плану, що підтверджує достовірність отриманих результатів.

**Висновки.** Таким чином, в роботі запропоновано метод дослідження геометрично нелінійних вільних коливань функціонально-градієнтних пологих

оболонок зі складною формою плану. Розглянутий метод базується на використанні теорії  $R$  – функцій, *варіаційному методі Рітца, процедури Бубнова-Гальоркіна* та методі Рунге-Кутта. Для уточненої теорії пологих оболонок 1-го порядку запропонований підхід реалізовано в рамках системи POLE-RL. Проведене тестування для оболонок, що спираються на квадратний і еліптичний план, доводить достовірність та ефективність запропонованого методу, ілюстрація якого виконана для оболонок зі складною формою плану. В майбутньому розроблений метод планується застосовувати не тільки для граничних умов, що відповідають жорстко закріпленім ФГ оболонкам, а і для інших, в тому числі змішаних. Крім цього, цікаво було б застосувати розроблений підхід для математичної постановки задачі в змішаній формі, а не тільки в переміщеннях.

**Список літератури:** 1. Курпа Л.В. Метод  $R$  – функцій для рішення лінійних задач изгиба и колебаний пологих оболочек // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408с. 2. Курпа Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – 51. №2. – С. 75 – 85. 3. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. // *Теорет. і прикладная механика.* – 2014. – Вып.8(54). – С. 77 – 85. 4. Рвачев В.Л. Теория  $R$  – функций и некоторые ее приложения. – Киев: *Наук.думка*, 1982. – 552 с. 5. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells// *Journal of Sound and Vibration.* – 2011. – 330. – P. 1432 – 1454. 6. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // *Composite Structures.* – 2010. – 92. – P. 2573 – 2581. 7. Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // *Int J Mech Sci.* – 1999. – 41. – P. 309 – 324. 8. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // *Composite Structures.* – 2008. – 84. – P. 132 – 46. 9. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates // *International Journal for numerical methods in engineering.* – 2000. – N 47. – P.663 – 684. 10. Shen H.S. *Functionally Graded Materials of Plates and Shells.* – Florida: CPC Press. – 2009. – 266 p.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kurpa, L. V. *Metod  $R$  – funkcij dlja reshenija linejnyh zadach izgiba i kolebanij pologih obolochek.* Kharkov, NTU «KhPI». 2009. Print. 2. Kurpa, L. V. "Nelinejnye svobodnye kolebanija mnogoslajnyh pologih obolochek simmetrichnogo stroenija so slozhnoj formoj plana." *Mat. metody ta fiz.-meh. polja.* Vol. 51. No. 2. 2008. 75–85. Print. 3. Kurpa, L. V., and T. V. Shmatko. "Svobodnye kolebanija funkcional'no-gradientnyh pologih obolochek so slozhnoj formoj plana." *Teoret. i prikladnaja mehanika.* No. 8 (54). 2014. 77–85. Print. 4. Rvachev, V. L. *Teorija  $R$  – funkcij i nekotorye ejo prilozhenija.* Kiev: *Nauk.dumka*, 1982. Print. 5. Alijani, F., et al. "Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells." *Journal of Sound and Vibration.* Vol. 330. 2011. 1432–1454. Print. 6. Chorfi, S. M., and A. Houmat. "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form." *Composite Structures.* No. 92. 2010. 2573-2581. Print. 7. Loy, C. T, K. Y. Lam and J. N. Reddy. "Vibration of functionally graded cylindrical shells." *Int J Mech Sci.* No. 41. 1999. 309–324. Print. 8. Matsunaga, H. "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory." *Composite Structures.* No. 84. 2008. 132–46. Print. 9. Reddy, J. N. "Analysis of functionally graded plates." *International Journal for numerical methods in engineering.* No. 47. 2000. 663-684. Print. 10. Shen, H. S. *Functionally Graded Materials of Plates and Shells.* Florida: CPC Press, 2009. Print.

Надійшла (received) 06.10.2014