ной постановки задачи, пластина является подпирающим элементом (возмущающая нагрузка воздействует на балку).

Список литературы: **1.** *Сметанкіна Н.В.*, *Угрімов С.В.*, *Шупіков О.М.*, *Бузько Я.П.* Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі // Вісник Харківського національного університету «ХПІ». Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. – 2002. – № 19. – С. 68 – 72. **2.** *Янютин Е.Г.*, *Воропай Н.И.* Исследование динамического деформирования пластины на основе одного волнового уравнения // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х., 2011. – №13. – С. 194 – 200. **3.** *Huang M.* Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions / *M. Huang*, *X.Q. Ma*, *T. Sakiyama*, *H. Matsuda*, *C. Morita* // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – V. 322. – P. 227 – 240. **4.** *Shahed Jafarpour Hamedani.* Vibration analysis of stiff ened plates using Finite Element Method / *Shahed Jafarpour Hamedani, Mohammad Reza Khedmati, Saeed Azkat* // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2012. – V. 9. – P. 1 – 20. **5.** *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. **6.** *Диткин В.А.*, *Прудников А.П.* Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. **7.** *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1967. – 444 с. **8.** *Верлань А.Ф.*, *Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с. **9.** *Шимкович Д. Г.* Расчет конструкций в MSC.visualNastran for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 448 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Smetankina, N. V., Ugrimov S.V., Shupikov A.N., Buz`ko Ja.P. "Dynamichnyj vidguk plastyn, jaki lezhat' na pruzhnij osnovi." *Visnyk Kharkivs'kogo nacional'nogo universitetu «KhPI». Tem. vyp.: Technologi'i v mashinobuduvanni.* No. 19. 2002. 68–72. Print. **2.** Janjutin, Je. G., and N. I. Voropaj. "Issledovanije dinamicheskogo deformirovanija plastiny na osnove odnogo volnovogo uravnenija." *Vistnyk NTU «KhPI». Tem. vyp.: Matematychne modeluvannja v tehnici ta tehnologijah.* No. 13. 2011. 194–200. Print. **3.** Huang, M., et al. "Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions." *Journal of Sound and Vibration.* Vol. 322. 2009. 227–240. **4.** Hamedani, Shahed Jafarpour, Mohammad Reza Khedmati and Saeed Azkat. "Vibration analysis of stiff ened plates using Finite Element Method." *Latin American Journal of Solids and Structures.* Vol. 9. 2012. 1–20. Print. **5.** Filippov, A. P. *Kolebanija deformirujemyh sistem.* Moscow: Mashinostroenie, 1970. Print. **6.** Ditkin, V. A., and A. P. Prudnikov. *Operacionnoe ischislenie*. Moscow: Vyshaja shkola, 1966. Print. **7.** Timoshenko, S. P. *Kolebanija v inzhenernom dele.* Moscow: Fizmatgiz, 1967. Print. **8.** Verlan', A. F., and V. S. Sizikov. *Integral'nye uravnenija, metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie.* Kyiv: Naukova dumka, 1986. Print. **9.** Shimkovich, D. G. *Raschjot konstrukcij v MSC.visualNastran for Windows*. Moscow: DMK Press, 2004. Print.

Поступила (received) 27.02.2015

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

С.В. ЯРОЩАК, канд. техн. наук, ст. викл., РДГУ, Рівне

ОДИН МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЇ У НЕОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВО ВИКРИВЛЕНИХ НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

Розроблено метод розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення. Для випадку сферичного пласта побудовано систему ортогональних криволінійних координат (ξ , η , ζ), відносно якої отримано усереднені по координаті ζ рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов.

Ключові слова: багатофазна фільтрація, квазіконформне відображення, числовий метод.

Вступ. У роботах [1 – 3] запропоновано методику розв'язання задач нестаціонарної багатофазної фільтрації, що базується на ідеях *методу квазіконформного* відображення та поетапної фіксації характеристик середовища та процесу у випадку, коли фільтрація є плоскопаралельною (пласти є досить тонкими і мають постійну товщину). Проте у природних умовах досить часто доводиться мати справу з просторово викривленими пластами змінної потужності, де окрім складності, пов'язаної з проектуванням розстановки свердловин та дослідженням їх взаємодії, виникає також необхідність врахування перетоків між пропластками і величин відбору з кожного із них.

У цій роботі розширено розроблену методику дослідження фільтраційних процесів та побудовано підхід до розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення [1 – 3]. Для випадку сферичного пласта побудовано систему ортогональних криволінійних координат (ξ, η, ζ), відносно якої отримано усереднені по координаті ζ рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов.

Загальна постановка задачі. Розглядається задача математичного моделювання процесу фільтрації (витіснення нафти підошвенною водою), породженого перепадом тиску $\Delta P = P_* - P^*$ на досконалих по ступеню і характеру розкриття пласта $G_\tau = A_* B_* C_* D_* A^* B^* C^* D^*$ експлуатаційних свердловинах L_i^* ($i = \overline{1, n^*}$) та контурі живлення $L_* = A_* A^* B_* B^* \cup B_* B^* C_* C^* \cup \cup C_* C^* D_* D^* \cup D_* D^* A_* A^*$ (рис. 1, *а*). Відповідні закон руху та рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, z) = -p(x, y, z) + +\tilde{p}$ ($p(x, y, z)$ – тиск в точці (x, y, z), $\tilde{p}$ – деяке характерне його значення), згідно з [4] представимо у вигляді:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0,$$

де $\tilde{k}$ – коефіцієнт проникності ґрунту; $\vec{\upsilon}$, μ – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості відповідно.

При розв'язанні рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов виникають певні труднощі, в першу чергу, пов'язані з тривимірністю задачі та складністю геометрії пласта, одним із методів подолання яких є заміна дійсної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху. До таких схем варто віднести запропоновану в роботах [5 – 8] схему апроксимації реальної тривимірної фільтраційної течії течією по стаціонарних поверхнях струму, яка ґрунтується на ідеях переходу до криволінійних (ортогональних) координат ξ, η, ζ, у яких підошва $A_*B_*C_*D_*$ та крівля $A^*B^*C^*D^*$ пласта повинні співпадати з координатними поверхнями одного із трьох сімейств, наприклад, $\zeta = \zeta_1 = const$ і $\zeta = \zeta_2 = const$, а *закон Дарсі* та *рівняння нерозривності* *течії* відносно цих координат мають вигляд:

$$\vec{\upsilon} = (\upsilon_\xi, \upsilon_\eta) = \left(\frac{k(\xi,\eta,\zeta)}{\mu H_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k(\xi,\eta,\zeta)}{\mu H_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \quad (1)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(\frac{\partial (H_2 H_3 \upsilon_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_1 H_3 \upsilon_\eta)}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0 . \quad (2)$$

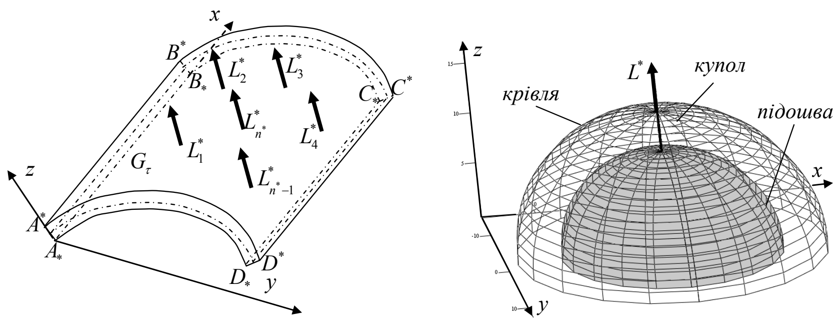

Рис. 1 – Нафтогазові пласти: *а* – G_τ ;*б* – сферичний.

Тут $k(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{k}(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$ – коефіцієнт проникності ґрунту, $H_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}$, $H_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2}$, $H_\zeta = \sqrt{x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2}$ – *параметри Ламе*, $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = z(\xi, \eta, \zeta)$ – задані неперервно-диференційовані функції, що пов'язують фізичні декартові координати з введеними криволінійними (ξ, η, ζ).

Для спрощення викладок основної методики математичного моделювання фільтраційних процесів в просторово викривлених пластах розглядатимемо випадок сферичного пласта, що розробляється експлуатаційною свердловиною L^*, розташованою в його куполі (рис. 1, *б*), тоді мають місце наступні співвідношення:

$$H_\eta = R\left(1 + \frac{\zeta h}{R}\right)\sin\xi , \ H_\zeta = h , \ H_\xi = R\left(1 + \frac{\zeta h}{R}\right),$$

$$x(\xi,\eta,\zeta) = R\left(1 + \frac{\zeta h}{R}\right)\sin\xi\cos\eta , \ y(\xi,\eta,\zeta) = R\left(1 + \frac{\zeta h}{R}\right)\sin\xi\sin\eta ,$$

$$z(\xi,\eta,\zeta) = R\left(1 + \frac{\zeta h}{R}\right)\cos\xi , \ 0 \le \eta \le 2\pi , \ 0 \le \xi \le \pi , \ 0 \le \zeta \le 1 ,$$

де R , h – відповідно радіус підошви та потужність пласта.

Підставляючи (1) в (2) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка при відповідних крайових умовах описує процес фільтрації (витіснення) у сферичному просторово викривленому пласті:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(T(\xi,\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(P(\xi,\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=0\,, \tag{3}$$

$$\varphi\big|_{f_*(\xi,\eta)=0}=\varphi_*\,,\ \varphi\big|_{f^*(\xi,\eta)=0}=\varphi^*\,, \tag{4}$$

де $T(\xi,\eta)=\overline{k}(\xi,\eta)\sin\xi$, $P(\xi,\eta)=\sin\xi\,/\,\overline{k}(\xi,\eta)$, $\overline{k}(\xi,\eta)=\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}k(\xi,\eta,\zeta)d\zeta$; $f_*(\xi,\eta)=0$, $f^*(\xi,\eta)=0$ – рівняння проекцій свердловини та контуру живлення на координатну площину (ξ,η) відповідно, що визначають двозв'язну область G_z .

Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$T(\xi,\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\,,\ P(\xi,\eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}=-\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\,, \tag{5}$$

при виконанні яких рівняння (3) перетворюється на тотожність. Система (5) визначає деяку функцію $\omega=\omega(z)=\varphi(\xi,\eta)+\mathrm{i}\psi(\xi,\eta)$, яка при виконанні умов:

$$\varphi\Big|_{f_*(\xi,\eta)=0}=\varphi_*\,,\ \varphi\Big|_{f^*(\xi,\eta)=0}=\varphi^*\,,\ \psi\Big|_{L_-}=0\,,\ \psi\Big|_{L_+}=Q \tag{6}$$

здійснює квазіконформне відображення [1] фізичної області зміни координат (ξ,η) G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_\omega=\{\omega:\varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q\}\,,$$

де Q – невідома фільтраційна витрата; L_-, L_+ – береги умовного розрізу області G_z вздовж деякої лінії $\eta=const$.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (5) – (6) на квазіконформне відображення $z=z(\omega)=\xi(\varphi,\psi)+i\eta(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z отримаємо у вигляді:

$$T(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial \psi}=\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\,,\ P(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial \psi}=-\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\,,\ (\varphi,\psi)\in G_\omega\,; \tag{7}$$

$$\begin{cases} f_*(\xi(\varphi_*,\psi),\eta(\varphi_*,\psi))=0, & \\ & 0\le\psi\le Q,\\ f^*(\xi(\varphi^*,\psi),\eta(\varphi^*,\psi))=0, & \\ \xi(\varphi,0)=\xi(\varphi,Q), & \\ & \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*,\\ \eta(\varphi,0)=\eta(\varphi,Q), & \end{cases} \tag{8}$$

зокрема, як наслідок (7), маємо:

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(T(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(P(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(P^{-1}(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T^{-1}(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right)=0\,, \qquad (9)$$

$$P(\xi,\eta)\frac{\partial\xi}{\partial\psi}\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}+T(\xi,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}=0\,,\ (\varphi,\psi)\in\partial G_\omega\,. \qquad (10)$$

Різницевий аналог задачі. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку

$$G_\omega^l=\Big\{(\varphi_i\,,\psi_j):\ \varphi_i=\varphi_*+i\Delta\varphi\,,\ \Delta\varphi=(\varphi^*-\varphi_*)/n\ \text{ при }\ i=\overline{0,n}\,;\ \psi_j=j\Delta\psi\,,$$

$$\Delta\psi=\frac{Q}{m}\,,\ j=\overline{0,m}\Big\}\,,$$

де $n,m\in\mathrm{N}$ – параметри розбиття цієї області.

Рівняння (9) у внутрішності сіткової області G_ω, крайові умови (8) з додатковими умовами для межових та примежових вузлів (*умовами ортогональності*) (10) апроксимуємо так:

$$\eta_{i,j}=\frac{\gamma^2\left(T_{i,j+0.5}\eta_{i,j+1}+T_{i,j-0.5}\eta_{i,j-1}\right)+P_{i+0.5,j}\eta_{i+1,j}+P_{i-0.5,j}\eta_{i-1,j}}{\gamma^2\left(T_{i,j+0.5}+T_{i,j-0.5}\right)+P_{i+0.5,j}+P_{i-0.5,j}}\,,\ j=\overline{1,m-1}\,;$$

$$\xi_{i,j}=\frac{\gamma^2\left(P^{-1}_{i,j+0.5}\xi_{i,j+1}+P^{-1}_{i,j-0.5}\xi_{i,j-1}\right)+T^{-1}_{i+0.5,j}\xi_{i+1,j}+T^{-1}_{i-0.5,j}\xi_{i-1,j}}{\gamma^2\left(P^{-1}_{i,j+0.5}+P^{-1}_{i,j-0.5}\right)+T^{-1}_{i+0.5,j}+T^{-1}_{i-0.5,j}}\,,\ i=\overline{1,n-1}\,; \qquad (11)$$

$$f_*(\xi_{0,j},\eta_{0,j})=0,\ f^*(\xi_{n,j},\eta_{n,j})=0,\ j=\overline{0,m},$$

$$\xi_{i,0}=\xi_{i,m},\,\eta_{i,0}=\eta_{i,m},\,i=\overline{0,n},; \qquad (12)$$

$$T_{n,j}(\eta_{n,j}-\eta_{n-1,j})(\eta_{0,j+1}-\eta_{0,j-1})+P_{n,j}(\xi_{n,j}-\xi_{n-1,j})(\xi_{0,j+1}-\xi_{0,j-1})=0\,;$$

$$T_{0,j}(\eta_{1,j}-\eta_{0,j})(\eta_{0,j+1}-\eta_{0,j-1})+P_{0,j}(\xi_{1,j}-\xi_{0,j})(\xi_{0,j+1}-\xi_{0,j-1})=0\,,\ j=\overline{1,m-1}\,;$$

$$T_{i,m}(\eta_{i+1,m}-\eta_{i-1,m})(\eta_{i,m}-\eta_{i,m-1})+P_{i,m}(\xi_{i+1,m}-\xi_{i-1,m})(\xi_{i,m}-\xi_{i,m-1})=0\,;$$

$$T_{i,0}(\eta_{i+1,0}-\eta_{i-1,0})(\eta_{i,1}-\eta_{i,0})+P_{i,0}(\xi_{i+1,0}-\xi_{i-1,0})(\xi_{i,1}-\xi_{i,0})=0\,,\ i=\overline{1,n-1}\,, \qquad (13)$$

де $T_{i,j\pm0.5}=(T_{i,j\pm1}+T_{i,j})/2$, $P_{i,j\pm0.5}=(P_{i,j\pm1}+P_{i,j})/2$, $P_{i\pm0.5,j}=(P_{i\pm1,j}+P_{i,j})/2$, $T_{i\pm0.5,j}=(T_{i\pm1,j}+T_{i,j})/2$, $T_{i,j}=\overline{k}_{i,j}\sin\xi_{i,j}$, $P_{i,j}=\sin\xi_{i,j}/\overline{k}_{i,j}$, $\overline{k}_{i,j}=\overline{k}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})$, $\eta_{i,j}=\eta(\varphi_i,\psi_j)$, $\xi_{i,j}=\xi(\varphi_i,\psi_j)$, $\gamma=\Delta\varphi/\Delta\psi$ - квазіконформний інваріант.

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q=m\Delta\varphi/\gamma$, величину γ одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma=\frac{1}{mn}\sum_{i,j=0}^{n-1,m-1}(\alpha_{i,j}+\alpha_{i,j+1})/(\beta_{i,j}+\beta_{i+1,j})\,, \qquad (14)$$

де

$$\alpha_{i,j}=\sqrt{\left(\xi_{i+1,j}-\xi_{i,j}\right)^2+\left(\eta_{i+1,j}-\eta_{i,j}\right)^2}\ ,$$

$$\beta_{i,j}=\sqrt{T_{i,j}^2\left(\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j}\right)^2+P_{i,j}^2\left(\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j}\right)^2}\ .$$

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (7) – (10) різницевою задачею в загальному випадку побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ, граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності, а саме: задавши геометричну конфігурацію сферичного пласта та ввівши криволінійні координати (за наведеними вище формулами) переходимо до області зміни координат (ξ,η) G_z. Після цього задаємо кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m), параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1, ε_2. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (12), та наближення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (14), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати $Q^{(0)}=(\varphi^*-\varphi_*)m/(n\gamma^{(0)})$. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів ($\xi_{i,j},\eta_{i,j}$) за формулами (11) (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх межових та примежових), використовуючи *різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана* (13). Використовуючи значення квазіконформного інваріанту (14), знаходимо нове наближення величини Q. Якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1, то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S=\max_{i,j}\sqrt{(\xi_{i,j}^{(k)}-\xi_{i,j}^{(k-1)})^2+(\eta_{i,j}^{(k)}-\eta_{i,j}^{(k-1)})^2}$$

– зміщення вузлів на границі за проведену k-ту загальну ітерацію. Якщо $S>\varepsilon_2$, то переходимо до уточнення вузлів. Значення швидкості у вузлах гідродинамічної сітки знаходимо аналогічно [1 – 7].

Висновки. Розроблено метод розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення. Варто відзначити, що розроблена методика дозволяє встановити час прориву підошвенних вод до експлуатаційних свердловин та час повного обводнення пласта.

У перспективі дослідження – узагальнення запропонованої методології на випадки просторових пластів, які розробляються серією експлуатаційних та нагнітальних свердловин, розташованих певним регулярним чином, за умов існування в присвердловинних ділянках тріщин гідророзриву.

Список літератури: **1.** *Бомба А.Я.* Методи комплексного аналізу: Монографія / *А. Я. Бомба, С.С. Каштан*, *Д.О. Пригорницький*, *С.В. Ярощак.* – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с. **2.** *Бомба А.Я.*, *Ярощак С.В.* Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34 – 40. **3.** *Bomba A.Ya*., *Yaroschak S.V.* Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 184, No. 1, July, 2012 pp. 56 – 69. **4.** *Zhangxin C.*, *Guanren H.*, *Yuanle M.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering). Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp. **5.** *Ярощак С.В*. Математичне моделювання двохфазної фільтрації в просторово викривлених нафтогазових пластах // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17) – Рівне : РДГУ, – 2011. – С. 241 – 248. **6.** *Бомба А.Я.*, *Теребус А.В.*, *Ярощак С.В.* Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в просторово викривлених нафтогазових пластах // Вісник Кременчуцького національного університету. – Кременчук. – 2011. – Вип. 5 (70). – С. 23 – 27. **7.** *Бомба А.Я.*, *Теребус А.В.*, *Ярощак С.В.* Комплексний підхід до моделювання процесів багатофазної фільтрації під час проектування розробки нафтогазових родовищ // Нафтова і газова промисловість. – 2012. – № 1. – С. 48 – 52. **8.** *Толпаев В.А.* Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / *В.А. Толпаев.* – Ставрополь. – 2004. – 38 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Bomba, A. Ja., et al. *Metody kompleksnogo analizu: Monografija*. Rivne: NUVGP, 2013. Print. **2.** Bomba, A. Ja., and S. V. Jaroshhak. "Metod kvazikonformnyh vidobrazhen' rozv"jazannja model'nyh zadach dvofaznoi' fil'tracii'." *Dopovidi NAN Ukrai'ny*. No. 10. 2010. 34–40. Print. **3.** Bomba, A. Ya., and S. V. Yaroschak. "Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions." *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 184. No. 1. 2012. 56–69. Print. **4.** Zhangxin, C., H. Guanren and M. Yuanle. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering)*. *Paperback*. *Society for Industrial and Applied Mathematic.* 2006. Print. **5.** Jaroshhak, S. V. "Matematychne modeljuvannja dvohfaznoi' fil'tracii' v prostorovo vykryvlenyh naftogazovyh plastah." *Volyns'kyj matematychnyj visnyk*. *Ser.: Prykladna matematyka*. Vol. 8 (17). Rivne: RDGU, 2011. 241–248. Print. **6.** Bomba, A. Ja., A. V. Terebus and S. V. Jaroshhak. "Matematychne modeljuvannja nelinijnyh procesiv vytisnennja v prostorovo vykryvlenyh naftogazovyh plastah." *Visnyk Kremenchuc'kogo nacional'nogo universytetu*. Vol. 5(70). Kremenchuk. 2011. 23–27. Print. **7.** Bomba, A. Ja., A. V. Terebus and S. V. Jaroshhak. "Kompleksnyj pidhid do modeljuvannja procesiv bagatofaznoi' fil'tracii' pid chas proektuvannja rozrobky naftogazovyh rodovyshh." *Naftova i gazova promyslovist'*. No. 1. 2012. 48–52. Print. **8.** Tolpaev, V. A. *Matematicheskie modeli dvumernoj fil'tracii v anizotropnyh*, *neodnorodnyh i mnogoslojnyh sredah*. *Avtoref. dis*. *na soiskanie uchenoj stepeni d-ra fiz.-mat*. *nauk*. Stavropol', 2004. Print.

Надійшла (received) 17.11.2014