УДК 519.71

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми;
О.М. НІКОЛАЄНКО, студент, СумДУ, Суми

ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОДЕЛІ СОЛОУ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглядається проблема специфікації та ідентифікації моделі Солоу макроекономічної системи, в якій інвестиції економіки в цілому зв'язані лінійним законом з випусками секторів. У ролі фазових координат виступають основні фонди, а керуваннями є випуски секторів. Траєкторії руху фазових координат розкладаються на трендову та періодичну складові. Поділ макроекономічної системи на сектори проводиться так, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, характерні для даної системи. Оскільки траєкторії випусків секторів невідомі, то диференціальне рівняння руху задовольняється в цілочисельних точках періоду ідентифікації. Невідомі параметри моделі оцінюються методами економетрики, причому замість основних фондів використовуються заміщуючі змінні – прирости основних фондів, для яких відома статистична інформація. Апробація моделі проводиться на статистичних даних реальної макроекономічної динаміки. Економетричне моделювання дозволяє виділити значущі гармоніки, характерні для даної системи, і відновити невідомі статистичні дані по основним фондам та інвестиціям. Одержані траєкторії руху мають високі імітаційні та прогнозні властивості. Аналіз гармонічних хвиль, які присутні в розкладі модельних кривих, дозволяє встановлювати причини підйомів і спадів в економіці країни та прогнозувати подальший економічний розвиток.

Ключові слова: стеганографія, стеганологія, стегоповідомлення, контейнер, вейвлет-перетворення.

Вступ. Останнім часом, у зв'язку зі зростаючим впливом макроекономічної ситуації на всі сфери життя, зростає і зацікавленість дослідників у відтворенні функціонування макроекономічних систем. Значення математичного моделювання як методу досліджень визначається тим, що модель являє собою концептуальний інструмент, орієнтований на аналіз та прогнозування динамічних процесів. При практичних дослідженнях модельні динамічні системи подаються системою диференціальних рівнянь. Побудова моделей у задачах макроекономіки ґрунтується на ідентифікованих рівняннях руху, які отримуються із законів, властивих даним економічним процесам [1, 2].

Однак більшість об'єктів, що вивчаються економічною наукою, можна охарактеризувати поняттям «складна система» [3, 4]. З'ясувати усі можливі зв'язки між елементами такої системи практично неможливо. Тут закон руху $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ не може адекватно відображати динамічний процес, оскільки завжди будуть діяти невраховані фактори.

Отже, ключовою проблемою моделювання макросистем є ідентифікація рівнянь руху, оскільки на практиці вони не специфіковані. Дослідник має виходити лише зі статистичної інформації про значення фазових та керованих змінних у дискретні моменти часу із заданого проміжку. Економетрична побудова моделі оптимального керування проводиться в рамках моделі «сірого ящика» [5], коли за допомогою аналізу даних та деякого обґрунтованого підходу проводиться повна або часткова специфікація між входами, станами та виходами системи, а невідомі параметри системи оцінюються економетричними методами. Адекватність моделі та точність отриманих результатів перевіряються за допомогою статистичних тестів і коефіцієнтів детермінації [6].

Важливе місце в економіко-математичних дослідженнях посідають моделі економічного зростання. За дослідження моделей економічного зростання *Р. Солоу* став лауреатом Нобелівської премії з економіки 1987 року. *Модель Солоу* [7] описує агреговану замкнену економіку і оптимізує економічне зростання односекторної економіки.

Питання про те, які фактори впливають на економічне зростання, залишається одним із центральних питань макроекономіки. Більшість економістів, дотримуючись класичної роботи Р. Солоу [7], описують процес економічного зростання за допомогою факторів, що характеризують економіку країни в цілому. Ключові з цих факторів: технічний прогрес, накопичення капіталу і зростання трудових ресурсів [8]. Модель Солоу пояснює зростання ВВП (валового внутрішнього продукту) екзогенними параметрами, а саме екзогенним темпом технічного прогресу. Однак при цьому причина технічного прогресу залишається непоясненою. В 1980-х роках з’явились нові теорії економічного зростання, які пропонують у якості пояснюючих змінних ендогенні змінні моделі. Нові моделі намагались пояснити технологічні зміни як результат ринкових взаємовідносин, а не як зовнішній вплив [9].

Інший підхід до моделювання економічного зростання базується на введені в модель секторів макроекономічної системи. Так, *модель Леонтьева* [10] описує динамічний міжгалузевий рівноважний баланс. На вхід системи тут подається невиробниче споживання секторів макроекономічної системи, а у ролі фазових координат виступають випуски цих секторів. Особливістю макроекономічних процесів, властивих розвинутим країнам Західної Європи, США, Канаді, Японії та іншим, є те, що вони відбуваються в умовах циклічності [11]. Як показують практичні дослідження (аналіз статистичних даних), фази підйому тут змінюються фазами спаду, після чого знову спостерігається зростання і так далі. Параметрична ідентифікація моделі Леонтьева розглянута в [12]. У цій роботі показано, що економічне зростання і спад макросистеми можуть бути пояснені властивостями гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

У даній роботі методика, запропонована в [12], розповсюджується на модель Солоу. Процес економічного зростання можна вивчати шляхом встановлення взаємозв’язків між секторами макроекономічної системи. На вхід системи будемо подавати випуски секторів, які розглядаються у якості керувань, а фазовими координатами будуть ОФ (основні фонди).

Постановка задачі. У загальному випадку економіку країни в момент часу $t \in [t_0, t_f]$ можна характеризувати обсягами основних фондів $k(t)$ й інвестицій $I(t)$ та внутрішнім валовим продуктом (ВВП) країни $x(t)$. Капітальні вкладення вимірюються швидкістю зміни основних фондів

$$\dot{k}(t) = dk(t)/dt .$$

Припустимо, що в кожний момент часу t необхідно замінити $r(t)$ амортизованого капіталу. Тоді, якщо валові інвестиції $I(t)$ економіки йдуть на чистий приріст існуючого капіталу та на заміну амортизованого капіталу, то динаміку зміни основних фондів можна описати диференціальним рівнянням

$$\dot{k}(t) + r(t) = I(t),\ t \in [t_0,\ t_f]. \tag{1}$$

При практичній реалізації ідентифікація моделі (1) спряжена з певними труднощами і має деякі недоліки.

1. Статистична інформація по амортизації ОФ та інвестиціям невідома. В [7] припускається, що амортизація макроекономічної системи пропорційна ОФ (λ – коефіцієнт амортизації), а інвестиції пропорційні ВВП (r – коефіцієнт інтенсивності вкладень інвестицій), тобто

$$\dot{k}(t) = -\lambda k(t) + rx(t),\quad t \in [t_0,\ t_f]. \tag{2}$$

2. Модель (2) не враховує взаємозв'язок між секторами макроекономічної системи. У випадку $n-$секторної економіки інвестиції вкладаються у кожний сектор, і тому можна вважати, що $I(t)$ залежить від випусків цих секторів $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Якщо залежність лінійна, то

$$I(t) = \mathbf{r}'\,\mathbf{x}(t), \tag{3}$$

де $\mathbf{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ ...,\ x_n(t))'$ – вектор випусків секторів (*вектор керувань*); $\mathbf{r} = (r_1,\ r_2,\ ...,\ r_n)'$ – вектор інтенсивностей вкладень інвестицій в сектори; $r_i > 0\ \ (i = \overline{1,n})$, оскільки збільшення випуску $i-$го сектора на практиці спонукає інвесторів збільшувати вкладення коштів в цей сектор.

Залежність (3) означає, що вплив випусків секторів на інвестиції відбувається необов'язково в однаковій пропорції. Якщо інвестиції в сектори вкладаються з однаковою інтенсивністю ($r_1 = r_2 = ... = r_n = r$), то з моделі інвестицій $n-$секторної економіки буде випливати модель інвестицій економіки в цілому. Як показують практичні дослідження, інтенсивності вкладень інвестицій в сектори різняться. Тому введення в розгляд секторів макроекономічної системи значно розширює можливості математичного моделювання.

Отже, модель Солоу будемо подавати у вигляді

$$\dot{k}(t) = -\lambda k(t) + \mathbf{r}'\,\mathbf{x}(t),\ t \in [t_0,\ t_f]. \tag{4}$$

3. Специфіка статистичних даних по основним фондам така, що відсутня інформація про обсяги ОФ, але відомі щорічні прирости ОФ

$$k_t - k_{t-1} = n_t,\ t = \overline{1,N}. \tag{5}$$

Із (5) випливає, що приріст ОФ у момент часу t відносно значення k_0 у момент t_0 дорівнює $k_t - k_0 = \sum_{i=1}^{t} n_i$. Позначимо $y_t = \sum_{i=1}^{t} n_i$, тоді $k_t = y_t + k_0$.

Відносно $y(t)$ маємо наступне диференціальне рівняння:

$$\dot{y}(t) = b_0 - \lambda y(t) + \mathbf{r}'\,\mathbf{x}(t),\ b_0 = -\lambda k_0,\ t \in [t_0, t_f] \tag{6}$$

або, в осередненому вигляді,

$$\dot{y}(t) - \bar{\dot{y}} = -\lambda(y(t) - \bar{y}) + \mathbf{r}'(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}),\ t \in [t_0, t_f]. \tag{7}$$

Порівнюючи (6) і (7), знаходимо

$$k_0 = -\overline{y} + \lambda^{-1}(\mathbf{r}'\overline{\mathbf{x}} - \overline{\dot{y}}). \qquad (8)$$

Отже, якщо нам вдасться реалізувати модель (8), то ми зможемо знайти значення k_0 ОФ економіки в цілому в момент часу $t = t_0$. Це дозволить у випадку необхідності відновити статистичні дані відносно ОФ:

$$k_t = y_t + k_0, \; t = \overline{1, N}. \qquad (9)$$

Для отримання однозначного розв'язку диференціального рівняння (7) його необхідно доповнити *граничною умовою*

$$y(t_*) = y_*, \; t_* \in [t_0, t_f], \qquad (10)$$

де t_* – точка відрізку $[t_0, t_f]$, в якій задається граничний стан.

Тоді сформульована *задача Коші* (7), (10) при заданих λ, $\mathbf{r}$ і y_* має єдиний розв'язок. Однак у реальних задачах параметри λ і $\mathbf{r}$ диференціального рівняння (7) невідомі. Більше того, граничні умови також можуть бути не заданими, наприклад, у випадку, коли t_* – момент часу, що розділяє базовий період і період прогнозування. Тому виникає обернена задача ідентифікації невідомих параметрів задачі Коші (7), (10).

Нехай в N цілочисельних точках проміжку $[t_0, t_1)$ з відрізка $[t_0, t_f]$ відома статистична інформація $\{y_t\}$ і $\{x_t\}$ відносно показників y і x. Множини y і x необхідно розкласти на підмножини $y_1, y_2, ..., y_n$ і $x_1, x_2, ..., x_n$, для яких відомі статистичні дані $\{y_{t1}, y_{t2}, ..., y_{tn}\}$ і $\{x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tn}\}$, $t = \overline{1, N}$, причому у всіх цих точках виконуються рівності $\sum_{i=1}^{n} y_{it} = y_t$, $\sum_{i=1}^{n} x_{it} = x_t$.

Метою даної роботи є прогнозування майбутніх станів системи. Тому граничну умову (10) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо $t_* = t_1 = N + 1$, тоді відрізок $[1, \; N]$ будемо називати *періодом ідентифікації*, а відрізок $[t_*, t_f]$ – *періодом прогнозування*. При оцінених значеннях $\lambda, \mathbf{r}$ і y_* можна перевіряти імітаційні властивості моделі на проміжку $[1, t_*)$ і встановлювати прогнозні властивості на відрізку $[t_*, t_f]$.

У даній роботі розв'язок задачі Коші (7), (10) будемо шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат (приростів ОФ секторів) на складові. Метою нашого дослідження є налаштування фазових координат на періодичні коливання навколо відповідних лінійних трендів [12]. Якщо імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій фазових координат нас влаштовують, то розв'язок вказаної задачі Коші дорівнює

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \,.$$

Після встановлення значення розмірності n фазового простору і оптимального поділу макроекономічної системи на n секторів, відповідні випуски цих секторів будуть виступати у ролі керувань диференціального рівняння

(7). Припускаємо, що відносно вказаних випусків існують статистичні дані.

Метод розв'язання задачі. Для оцінювання диференціального рівняння (7) будемо користуватися *методами аналізу часових рядів* [13]. Припускаємо, що траєкторія руху динамічної системи подається адитивною комбінацією її складових. Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес описувати лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Отже, регресійна модель траєкторій фазових координат (приростів ОФ секторів) має вигляд:

$$y_t - \overline{y} = c(t - \overline{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) + \nu_t, \ t = \overline{1, N}, \ \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \tag{11}$$

де ω_k – частота $k-$ї гармоніки; α_k, β_k – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в *обрізаний ряд Фур'є*; ν_t – вектор випадкових збурень. При вказаних значеннях частот вектор середніх значень залишків дорівнює нулю $(\overline{\mathbf{v}} = 0)$.

Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (11), на які налаштовані гармонічні хвилі, будемо здійснювати за допомогою регресійної моделі, яка відповідає приросту ОФ всієї системи:

$$y_t - \overline{y} = c(t - \overline{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) + \nu_t, \ t = \overline{1, N}, \ \omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \tag{12}$$

Фазові координати повинні бути обраними такими, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, ідентифіковані в (12). Оскільки кожний сектор має свою специфіку функціонування, то кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо вибраний сектор швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то йому відповідатиме максимальна кількість гармонік в розкладі (11), тобто $n-1$ гармоніка. Мінімальна кількість гармонік буде відповідати тим секторам, які слабко реагують на зміни в інших секторах.

Метою даної роботи є ідентифікація моделі (7) і перевірка припущень Р. Солоу про пропорціональність інвестицій валовому випуску макроекономічної системи. Оскільки траєкторії випусків секторів нам невідомі, то будемо задовольняти диференціальне рівняння (7) в цілочисельних точках періоду ідентифікації. Для цього скористаємось статистичними даними по випускам секторів і складемо регресійну модель (h_t – випадкове збурення):

$$\dot{y}(t) - \overline{\dot{y}} = -\lambda(y(t) - \overline{y}) + \mathbf{r}'(\mathbf{x}_t - \overline{\mathbf{x}}) + h_t, \ t = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Якщо модель (7) буде оцінена, то тим самим ми можемо відновити статистичні дані по ОФ економіки в цілому. За допомогою (8) знаходимо значення ОФ k_0 у початковий момент часу t_0, тоді співвідношення (9) дозволять відновити статистичну інформацію по ОФ на періоді ідентифікації. Крім того, якщо стануть відомими МНК-оцінки $\hat{\mathbf{r}}$ вектора інтенсивностей $\mathbf{r}$, то за допомогою рівності

$$I_t = \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{x}_t \tag{14}$$

можна відновити невідомі статистичні дані про інвестування економіки.

Практична реалізація алгоритму. Апробація побудованої динамічної моделі Солоу проводилася на базі статистичних даних макроекономічного розвитку Франції [14]. Координатами фазового вектора $\mathbf{y}$ моделі є прирости ОФ секторів, а координати вектора керувань $\mathbf{x}$ – випуски секторів. Встановлено, що оптимальне значення об'єму вибірки $N = 50$, 1960 – 2009 рр. – період ідентифікації, 2010 – 2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності n фазового простору показує, що при рівні значущості $\alpha = 0,005$ економіку Франції необхідно ділити на 5 секторів. У якості п'яти секторів вибиралися наступні: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (Service Industries).

Аналіз статистичної інформації показує, що економіка Франції розвивається циклічно (для всіх вказаних секторів і економіки в цілому фази підйому змінюються фазами спаду). Тому логічним є використання розкладання фазових координат на трендову та періодичну складові.

Чисельний експеримент підтверджує у випадку $\alpha = 0,005$ наявність у макроекономіці Франції чотирьох значущих гармонік ($k = 1, 2, 3, 6$). На прирости ОФ Франції суттєво впливають чотири основні гармоніки: *хвиля Кондратьєва* ($k = 1$), *хвиля Кузнеця* ($k = 3$), *хвиля Жугляра* ($k = 6$) і проявляє себе також хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва ($k = 2$).

Основним критерієм вибору п'яти секторів є присутність у траєкторіях приростів ОФ секторів вказаних чотирьох гармонік, причому гармонічні хвилі з іншими частотами повинні бути незначущими, оскільки вони є нехарактерними для макроекономіки Франції.

Оцінювання регресійної моделі приростів ОФ секторів дало такі значення коефіцієнтів R^2 трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл. 1).

Таблиця 1 – Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	$\sum$
R^2	0,8498	0,9335	0,9129	0,9459	0,8367	0,8910

Аналіз табл. 1 показує, що для деяких секторів (особливо для першого та п'ятого) і для економіки в цілому коливання ОФ навколо відповідного тренду є відчутними. Періодичні складові стають причиною підйому та спаду економіки, а їх взаємодія на певних проміжках часу приводить до кризових явищ. Тому є актуальним виділення характерних для даної системи гармонічних хвиль і дослідження їх впливу на економічний розвиток країни.

Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань секторів ($i = \overline{1, n}$) обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації [12], значення яких наведені в табл. 2. Як бачимо, хвиля Кондратьєва ($k = 1$) вносить основний вклад в коливання всіх секторів. Друга та третя хвилі впливають на коливальний процес секторів приблизно в однаковій мірі, а хвиля Жугляра ($k = 6$) особливо проявляє себе у третьому секторі. Сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань приростів ОФ секторів становить від 93,88% (5-й сектор) до 98,52 (3-й сектор). Як бачимо, моделі коливань мають якісні імітаційні властивості, і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії приростів ОФ. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій приростів ОФ приводяться в табл. 3.

Таблиця 2 – Коефіцієнти детермінації гармонік

№ сектора	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=6$	$\sum$
1	0,8882	0,0246	0,0258	0,0184	0,9570
2	0,9158	0,0304	0,0186	–	0,9648
3	0,8775	0,0252	0,0120	0,0705	0,9852
4	0,8768	0,0340	0,0302	0,0175	0,9585
5	0,8894	0,0421	0,0073	–	0,9388
$\sum$	0,8915	0,0301	0,0274	0,0153	0,9643

Таблиця 3 – Якість модельних траєкторій приростів ОФ

№ сектора	1	2	3	4	5	$\sum$
R^2	0,9999	0,9996	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999

Високі імітаційні властивості кривих приростів ОФ свідчать про адекватність одержаних модельних траєкторій статистичним даним, і тому можна переходити до параметричної ідентифікації моделі Солоу (7).

МНК-оцінювання регресійної моделі (13) дає наступні значення МНК-оцінок невідомих параметрів:

$$\hat{\lambda}=0{,}0181,\ \ \hat{r}_1=0{,}0818,\ \ \hat{r}_2=0{,}1277,\ \ \hat{r}_3=0{,}0957,\ \ \hat{r}_4=0{,}0767,\ \ \hat{r}_5=0{,}1162.$$

Отже, коефіцієнт амортизації економіки Франції становить 1,81%. Інтенсивності вкладень інвестицій у вибрані сектори суттєво різняться, вони змінюються від 0,0767 для 4-го сектора до 0,1277 для 2-го сектора. Це означає, що модель економічного зростання, запропонована Р. Солоу, потребує корегування. Поділ макроекономічної системи на сектори є доцільним, і тому виникає необхідність у побудові моделі Солоу $n-$секторної економіки.

Розроблений алгоритм параметричної ідентифікації моделі Солоу дозволяє оцінити невідоме значення ОФ економіки Франції у початковий момент часу t_0. Згідно формули (8) (одержуємо (в млн. евро): $\hat{k}_0=2069860$.

Отримані оцінки основних фондів у початковий момент часу дозволяють відновити статистичні дані ОФ, які нам були невідомі (відомі прирости ОФ). Тепер можна аналізувати траєкторії не приростів ОФ, а самих ОФ.

На рис. 1 приведені графіки модельної кривої ОФ та траєкторії відповідного коливання. Тут точками зображені відновлені статистичні дані на періодах ідентифікації (1960 – 2009 рр.) та прогнозування (2010 – 2011 рр. – дві останні точки), а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 році).

Аналіз рисунків свідчить про високоточні імітаційні властивості, а порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.), – про високоточні прогнозні властивості побудованої моделі Солоу.

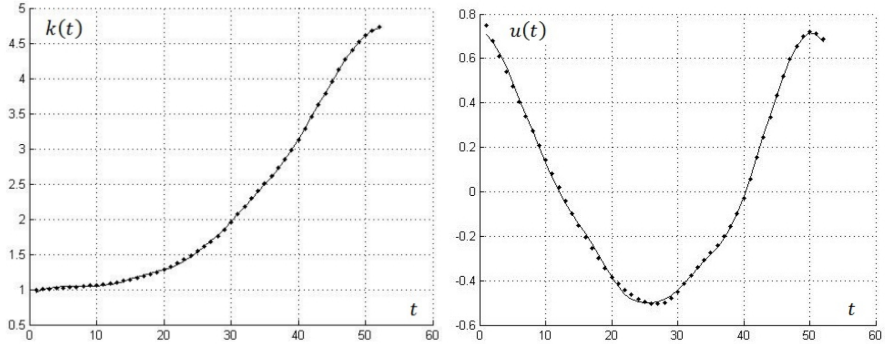

Рис. 1 – Модельні криві основних фондів та відповідних коливань.

Спробуємо спрогнозувати економічний розвиток Франції. Будемо виходити з модельної траєкторії ОФ (для зручності дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення k_0 у початковому 1960 році):

$$k(t)=2{,}0736+0{,}0744\,t+0{,}5600\cos(\omega_1 t)+0{,}0688\sin(\omega_1 t)+0{,}0998\cos(\omega_2 t)+$$
$$+0{,}0011\sin(\omega_2 t)+0{,}0478\cos(\omega_3 t)-0{,}0121\sin(\omega_3 t)+0{,}0068\cos(\omega_6 t)+0{,}0026\sin(\omega_6 t).$$

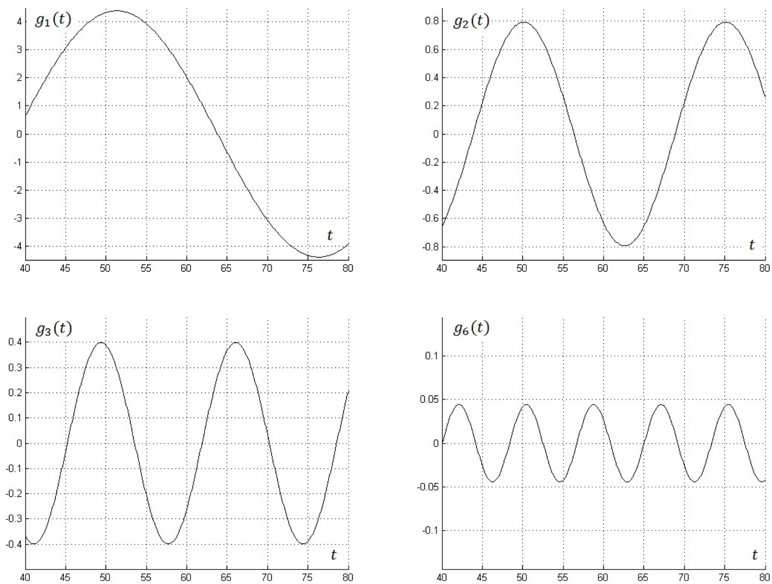

Рис. 2 – Модельні гармоніки, характерні для основних фондів.

На рис. 2 подані графіки всіх чотирьох гармонік за 1999 – 2039 рр. Аналіз показує, що починаючи з 1999 р. (рік введення євро) всі чотири гармоніки знаходяться у фазі підйому (вклад шостої гармоніки незначний, але фаза її спаду 2002 – 2006 рр. змінюється на фазу підйому 2006 – 2010 рр.). До 2008 р. включно всі гармоніки зростають, і тому період 1999 – 2008 рр. можна вважати «золотою ерою» Франції (і Західної Європи в цілому, оскільки Франція – одна з основних країн Євросоюзу).

Однак наприкінці 2008 р. надійшов сигнал від 3-ї гармоніки (вона вступила у фазу спаду). Аналогічні сигнали від 2-ї, 1-ї та 6-ї гармонік надійшли в 2009, 2011, 2011 рр. відповідно. Як наслідок, наприкінці 2008 р. почалася економічна криза, причиною якої стало те, що всі основні гармоніки вступили у фазу спаду. Обвалу економіки не відбувається, оскільки спочатку система рухається за інерцією (за рахунок тренду), а починаючи з кінця 2013 р. 6-а хвиля вступає у фазу підйому. З 2-ї половини 2016 р. починається фаза підйому хвилі Кузнеця, і тому слід очікувати поступового зростання економічного розвитку, яке посилиться починаючи з другої половини 2022 р. – входження 2-ї хвилі у фазу підйому. Отже, 2009 – 2022 рр. – не найкращі часи для Євросоюзу. А суттєвих змін слід очікувати починаючи з 2034 р., коли хвиля Кондратьєва увійде у фазу підйому.

Висновки. У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації модифікованої моделі Солоу макроекономічної динаміки. Аналіз імітаційних та прогнозних властивостей побудованої моделі вказує на її адекватність статистичним даним. Проводився аналіз і прогнозування розвитку макроекономічної системи за допомогою модельних гармонік, які характерні для основних фондів досліджуваної макроекономічної системи. У випадку макроекономіки Франції вказані причини економічної кризи 2008 – 2009 рр. і спрогнозовані подальші періоди економічного зростання.

Врахування взаємозв’язку підмножин динамічної системи розширює можливості математичного моделювання. У випадку макроекономічної динаміки виникає необхідність розглядати модель Солоу $n-$ секторної економіки.

Список літератури: **1.** *Колемаев В.А.* Математические методы в экономике. – М.: Юнити-Дана, 2005. – 297 с. **2.** *Ramsay J.O.*, *Hooker G.*, *Campbell D.*, *Cao J.* Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach // J. of the Royal Stat. Society. Series B. – 2007. – Part 5, No. 69. – P. 741 – 796. **3.** *Горчаков А.А.*, *Орлова И.В.* Компьютерные экономико-математические модели // Учебное пособие. – М. – Компьютер, Юнити, 1995. – 170 с. **4.** *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2002. – Т.5. – С. 54 – 86. **5.** *Juang J.N.* Applied System Identification // PTR Prentice Hall. Englewood Cliffs: NJ, 1994. – 394 p. **6.** *Назаренко О.М.* Основи економетрики // Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с. **7.** *Solow R.M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – №70. – P. 65 – 94. **8.** *Базілінська О.Я.* Макроекономіка // Вид. 2-ге, випр.: Навчальний посібник – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 442 с. **9.** Панорама экономической мысли конца XX столетия под ред. Д. Гринэуэя, М. Блини, И. Стюарта // Перевод с английского под редакцией *В.С. Автономова*, *С.А. Афонцева*. – 2002. – Т.1. – 670 с. **10.** *Leontief W.* Input-Output Economics // Oxford University Press, New York, 1986. – 436 p. **11.** *Korotayev A.V.*, *Tsirel S.V.* Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // Structure and Dynamics. – 2010. – Vol. 4. – No. 1. – P. 3 – 57. **12.** *Назаренко О.М.* Ідентифікація та прогнозування стаціонарних слабо формалізованих процесів з ефектом запізнення в n – вимірному просторі. // Вісник НТУ«ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – № 37 (1010). – С. 90 – 104. **13.** *Айвазян С.А.*, *Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы экономометрики // М.: Юнити, 1998. – 1056с. **14.** INSEE. – http://www.bdm.insee.fr-/bdm2/index.action.

Bibliography (transliterated): **1.** Kolemaev, V. A. *Matematicheskie metody v jekonomike*. Moscow: *Juniti-Dana*, 2005. Print. **2.** Ramsay, J. O., et al. "Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach." *J. of the Royal Stat. Society. Series B.* Vol. 5. No. 69. 2007. 741–796 Print. **3.** Gorchakov, A. A., and I. V. Orlova. *Komp'juternye jekonomiko-matematicheskie modeli*: *uchebnoe posobie*. Moscow: *Komp'juter*, *Juniti*, 1995. Print. **4.** Al'breht, Je. G. "Metodika postroenija i identifikacii matematicheskih modelej makrojekonomicheskih processov." *Jelektronnyj zhurnal «Issledovano v Rossii»*. No. 5. 2002. 54–86. Print. **5.** Juang, J. N. *Applied System Identification*. *PTR Prentice Hall*. Englewood Cliffs: NJ, 1994. Print. **6.** Nazarenko, O. M. *Osnovy ekonometriki*. *Vyd*. *2nd*, *pererob.: pidruchnyk*. Kyiv: Centr navchal'noi' literatury, 2005. Print. **7.** Solow, R. M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics*. No. 70. 1956. 65–94 Print. **8.** Bazilins'ka, O. Ja. *Makroekonomika*. *Vyd. 2nd*, *vypr.: navchal'nij posibnik*. Kyiv: Centr uchbovoi' literatury, 2009. Print. **9.** *Panorama jekonomicheskoj mysli konca XX stoletija*. Ed. D. Grinjeujej, M. Blini, and I. Stjuart. Perevod s anglijskogo. Ed. V. S. Avtonomova, and S. A. Afonceva. Vol. 1. 2002. Print. **10.** Leontief, W. *Input-Output Economics*. New York: Oxford University Press, 1986. Print. **11.** Korotayev, A. V., and S. V. Tsirel. "Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis." *Structure and Dynamics*. Vol. 4. No 1. 2010. 3–57. Print. **12.** Nazarenko, O. M. "Identyfikacija ta prognozuvannja stacionarnyh slabo formalizovanyh procesiv z efektom zapiznennja v n – vymirnomu prostori." *Visnyk NTU«KhPI». Ser.: Matematychne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah.* No. 37 (1010). Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 90–104 Print. **13.** Ajvazjan, S. A., and V. S. Mhitarjan. *Prikladnaja statistika i osnovy jekonomometriki*. Moscow: Juniti, 1998. Print. **14.** INSEE. "Banque de données macro-économiques." «INSEE». Web. 02 March 2015 <http://www.bdm.insee.fr-/bdm2/index.action>.

Надійшла (received) 13.03.2015

УДК 629.083:621-113

О.І. НАЗАРОВ, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ, Харків;
Д.М. КЛЕЦ, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ, Харків;
І.О. НАЗАРОВ, аспірант, ХНАДУ, Харків

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗНОШУВАННЯ ДИСКОВИХ ГАЛЬМІВНИХ МЕХАНІЗМІВ ЛЕГКОВИХ АВТОМОБІЛІВ В УМОВАХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Запропоновано математичну модель зношування поверхонь тертя дискових гальмівних механізмів легкового автомобіля під час екстрених гальмувань в експлуатаційних умовах. Для конкретних легкових автомобілів розглянуто роботу створеного алгоритму, наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту. Також розглянуто перспективи подальших досліджень для підвищення ресурсу дискових гальмівних механізмів.

Ключові слова: легковий автомобіль, дисковий гальмівний механізм, експлуатація.